COMPUTER DESIGN SYSTEMS. THEORY AND PRACTICE

Vol. 3, No. 1, 2021

https://doi.org/10.23939/cds2021.01.037

УДК 511.13; 004.89 + 612.82; 510.6

П.С. Кособуцький, М.С. Каркульовська, Ю.М. Лозинська
Національний університет «Львівська політехніка»

ЗАКОНОМІРНОСТІ ЧИСЕЛ В ТРИКУТНИКУ ФІБОНАЧЧІ, ПОБУДОВАНОГО НА СТЕПЕНЕВИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА

У цій роботі показано, що трикутник Фібоначчі утворюється з елементів степеневих перетворень квадратичного тричлена. Він двійковий, структурований доменами рядків однакової довжини, в яких сума чисел формує послідовність чисел. Ця послідовність збігається з перетвореною бісекцією класичної послідовності чисел Фібоначчі. У роботі обґрунтовано правило Паскаля для обчислення елементів у рядках трикутника Фібоначчі.

Ключовів слова - числа Фібоначчі, трикутник Фібоначчі, правило Паскаля.

Вступ

Відомо [1], що із коефіцієнтів степеневих перетворень бінома Ньютона $(x+y)^n$ на координатній площині можна побудувати розташування чисел у вигляді трикутника Паскаля. В таблиці 1 трикутники Паскаля побудовані для значень $x=1, y=1$ у вигляді трикутників прямокутної і симетричної форм. В них рядки представляють собою послідовність двійкових чисел

$$1, 2, 3, 4, ..., 2^n, ... \tag{1}$$

пов'язаних із біноміальними коефіцієнтами тотожністю

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k , \tag{2}$$

а самі числові ряди позиціонуються як степені 11^n :

$$\begin{aligned} &n=1: \quad 11=11^1, \quad n=2: \quad 121=11^2, \quad n=3: \quad 1331=11^3, \\ &n=4: \quad 14641=11^5, n=5: \quad 15101051=11^5, ... \end{aligned} \tag{3}$$

Таблиця 1.

n	Розгорнутий поліном	Прямокутна форма трикутника	Трикутник Паскаля
0	1	1	1
1	1x+1y	1 1	1 1
2	$1x^2+2xy+1y^2$	1 2 1	1 2 1
3	$1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$	1 3 3 1	1 3 3 1
4	$1x^4+4x^3y+6x^2y^2\ 4xy^3+1y^4$	1 4 6 4 1	1 4 6 4 1

В даних трикутниках вздовж бісектрис вершинного кута формується ряд чисел Каталана 1,2,6,20,70,…., а вздовж висхідної діагоналі трикутника, суми чисел дорівнюють числам Фібоначчі

$$F_n: \ 0,1, \qquad 1,2,3,5,8,\ldots, \quad n \geq 0, \tag{4}$$

де перші два числа мають фіксовані значення. Вперше на це звернув увагу Пойя [2].

Відомі трикутники із узагальнених чисел Фібоначчі (Fibonacci p-triangle), як двовимірною моделлю послідовності чисел Фібоначчі [3]:

$$\{F_{p,0} = 0, F_{p,1} = F_{p,2} = F_{p,3} = \ldots F_{p,p} = 1: \quad F_{p,n} = F_{p,n-1} + F_{p,n-p-1}, \quad n \rangle\, p \tag{5}$$

закономірності яких детально вивчались, в тому числі в роботах [3-6]. В даній роботі досліджені закономірності трикутника чисел (Fibonacci 1-triangle), побудованого на коефіцієнтах α_n, β_n степеневого перетворення

$$x^n = \alpha_n x + \beta_n \tag{6}$$

квадратного тричлена

$$x^2 = px + q \tag{7}$$

для якого вперше узагальнені закономірності (2) і (3) для довільних значень p, q.

В інтервалі додатних значень показника степеня $n \rangle\, 0$, перетворення (6) мають вигляд:

$$\begin{cases} n=0: \quad x^0 = 0 \cdot x + 1 = \alpha_0 \cdot x + \beta_0, \\ n=1: \quad x^1 = +1 \cdot x + 0 = \alpha_1 \cdot x + \beta_1, \\ n=2: \quad x^2 = p^1 x + q = \alpha_2 x + \beta_2, \\ n=3: \quad x^3 = (p^2 + q)x + pq = \alpha_3 x + \beta_3, \\ n=4: \quad x^4 = (p^3 + 2pq)x + (p^2 + q)q = \alpha_4 x + \beta_4, \\ n=5: \quad x^5 = (p^4 + 3p^2 q + q^2)x + (p^3 + 2pq)q = \alpha_5 x + \beta_5, \\ n=6: \quad x^6 = (p^5 + 4p^3 q + 3pq^2)x + (p^4 + 3p^2 q + q^2)q = \alpha_6 x + \beta_6, \\ n=7: \quad x^7 = (p^6 + 5p^4 q + 6p^2 q^2 + q^3)x + (p^5 + 4p^3 q + 3pq^2)q = \alpha_6 x + \beta_6, \\ n=8: \quad x^8 = (p^7 + 6p^5 q + 10p^3 q^2 + 4pq^3)x + (p^6 + 5p^4 q + 6p^2 q^2 + q^3)q = \alpha_6 x + \beta_6 \\ \ldots.. \end{cases} \tag{8}$$

В (8), послідовності чисел $\{\alpha_n\}$ рекурентні, а їх члени α_n обчислюються за формулами

$$\alpha_{n+2} = p\alpha_{n+1} + q\alpha_n, \quad n \geq 0 \tag{9}$$

доповнені початковими умовами

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1. \tag{10}$$

Якщо $p = 1, q = 1$, то послідовністю чисел $\{\alpha_n\}$ є послідовністю $\{F_n\}$ (4). Члени послідовностей $\{\beta_n\}$, зв'язані із членами послідовності $\{\alpha_n\}$ за формулою

$$\beta_n = q\alpha_{n-1} \tag{11}$$

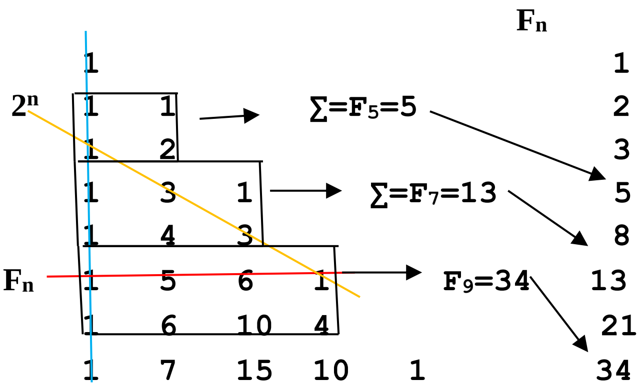
тому також рекурентні.

Випишемо із (8) вирази для α_n у вигляді прямокутного символічного трикутника Паскаля (рис.1а). Це є Fibonacci 1-triangle. Для $p = 1, q = 1$, у числовій формі числовий він приведений на рис.1б. В перетвореннях (8), перші два числа α_0, α_1 фіксовані (10), то в трикутнику Фібоначчі нульове значення $\alpha_0 = 0$ до уваги не приймалось. Якщо в трикутнику Паскаля сума чисел в рядках обчислюється за допомогою біному Ньютона $(1+1)^n$, то в Fibonacci 1-triangle аналогічні закономірності (при $p=1, q=1$ двійкування чисел (1)) представлення чисел спостерігаються вздовж низхідний діагоналі, вздовж якого біном Ньютона має вигляд

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}q^k=\binom{n}{0}p^nq^0+\binom{n+1}{1}p^{n-1}q^1+\binom{n+2}{2}p^{n-2}q^2+\ldots+\binom{n+k}{n}p^0q^n \quad (12)$$

a_2:	p					
a_3:	p^2	q				
a_4:	p^3	$2pq$				
a_5:	p^4	$3p^2q$	q^2			
a_6:	p^5	$4p^3q$	$3pq^2$			
a_7:	p^6	$5p^4q$	$6p^2q^2$	q^3		
a_8:	p^7	$6p^5q$	$10p^3q^2$	$4pq^3$		
a_9:	p^8	$7p^6q$	$15p^4q^2$	$10\,p^3q^3$	q^4	

а



б

Рис.1

За композицією розташування елементів, the Fibonacci 1-triangle нагадує із Fibonacci 2-triangle [6]. В Fibonacci 1-triangle усі рядки розпочинаються із одиниці, а закінчуються або числом $\frac{m+2}{2}=\frac{n}{2}$, якщо він парний, або одиницею, якщо непарний. Елементи довільного рядка n обчислюються як сума елементів двох попередніх рядків за алгоритмом:

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
m=0 \quad 1 & 0\;\;1 & m=0 \quad 1\;\;0 & & m=9 \quad 1 \\
 & + & & & \\
m=1 \quad 1\;\;1 & 1\;\;1 & m=1 \quad 1\;\;1 & 0\;\;1\;\;1 & m=1 \quad 1\;\;1 \\
 & = & & + & \\
 & 1\;\;2 & m=2 \quad 1\;\;2 & 1\;\;2\;\;0 & m=2 \quad 1\;\;2 \\
 & & & = & \\
 & & & 1\;\;3\;\;1 & m=3 \quad 1\;\;3\;\;1
\end{array}\right. \quad (13)$$

де після сумування, результуючий рядок зсувається праворуч. В трикутнику Паскаля класичної симетричної форми, вздовж рядків чисел Фібоначчі, сума сусідніх чисел задовольняє відоме правило Паскаля. Тому алгоритм (13) – це рекурентне правило для обчислення елементів рядків в Fibonacci 1-triangle.

Як показано на рис.1б, площа the Fibonacci 1-triangle бінарно структурується областями (виділені різними кольорами) із двох рядків однакових довжин непарного і парного номерів. Аналогічні області структурування із трьох і чотирьох рядків однакових довжин можна виділити in the Fibonacci 2-triangle і Fibonacci 3-triangle [6].

Рекурентне правило для знаходження суми чисел в однотипних областях має вигляд

$$F_{2n+p}=F_{2n-1}+F_{2n},\quad n\geq 1 \quad (14)$$

Для the Fibonacci 1-triangle, послідовність чисел (14) дорівнює

$$F_{2n}:\ 2, 5, 13, 34, 89,\ldots\ n\geq 1, \quad (15)$$

яка представляє собою ряд чисел, одержаний бісекцією послідовності Фібоначчі $\{F_n\}$ (4).

Приведемо міркування, що підтверджують правомірність формування послідовності (15). Для цього розглянемо степеневе перетворення до квадратного тричлена типу $px+q=x^2$:

$$(px+q)^0=1,\,(px+q)^1=x^2,\,(px+q)^2=x^4,\,(px+q)^3=x^6,\ldots,(px+q)^n=x^{2n} \qquad (16)$$

Тепер послідовність (16) застосуємо до коренів $x_{\pm}=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$:

$\begin{cases} 1, \quad {x_+}^2, \quad {x_+}^4, \quad {x_+}^6,\ldots,{x_+}^{2n},\ldots \\ 1, \quad {x_-}^2, \quad {x_-}^4, \quad {x_-}^6,\ldots,{x_-}^{2n},\ldots \end{cases}$ із яких сформуємо різницю:

$$2,\,{x_+}^2-{x_-}^2,\,{x_+}^4-{x_-}^4,\,{x_+}^6-{x_-}^6,\ldots,{x_+}^{2n}-{x_-}^{2n} \qquad (17)$$

Таким чином, якщо прийняти до уваги відому [1] формулу Біннета, то також одержимо бісекційну послідовність

$$\sqrt{p^2+4q}\cdot\{F_0,\,F_2,\,F_4,\,F_6,\,\ldots,F_{2n},\ldots\} \qquad (18)$$

аналогічну (15).

Перейдем до узагальнення закономірностей (2) і (3) в трикутнику Фібоначчі із довільними значеннями множників p,q. Степеневі біноми (12) формують аналогічні (2) узагальнені послідовності чисел

$$(p+q)^0,\,(p+q)^1,\,(p+q)^2,\,(p+q)^3,\ldots,(p+q)^n,\ldots \qquad (19)$$

$$(p\times q)^m=\begin{cases} m=1:\ (p\times q)^1=p \quad q, \\ m=2:\ (p\times q)^2=\begin{array}{c} p \quad q \\ \times \\ p \quad q \\ \hline p^2 \quad qp \quad qp \quad q^2=p^2 \quad 2qp \quad q^2 \end{array} \\ m=3:\ (p\times q)^3=\begin{array}{c} p^2 \quad 2qp \quad q^2 \\ \times \\ p \quad q \\ \hline p^3 \quad 2qp^2 \quad pq^2 \quad qp^2 \quad 2q^2p \quad q^3=p^3 \quad 3qp^2 \quad 3q^2p \quad q^3 \end{array} \\ \ldots \end{cases} \qquad (20)$$

Отже, якщо $p=1,q=1$, то

$$(1\times 1)^m=\begin{cases} m=1:\ (1\times 1)^1=11, \\ m=2:\ (1\times 1)^2=\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \times \\ 1 \quad 1, \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1=121 \end{array}, \\ m=3:\ (1\times 1)^3=\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 1 \\ \times \\ 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1=1331 \end{array}, \\ \ldots \end{cases} \qquad (21)$$

Трикутник чисел Фібоначчі побудований на перетвореннях (6) для значень $p=1, q=1$. Однак на площині прямокутних декартових координат $0pq$, на параболі $p=\sqrt{q}$ існує множина точок із координатами p, q, для якої зберігаються вище описані закономірності трикутника Фібоначчі:

$$p=\sqrt{q},:\begin{cases} \alpha_2/p & 1 \\ \alpha_3/p^2 & 1\quad 1 \\ \alpha_4/p^3 & 1\quad 2 \\ \alpha_5/p^4 & 1\quad 3\quad 1 \\ \alpha_6/p^5 & 1\quad 4\quad 3 \\ \alpha_7/p^6 & 1\quad 5\quad 6\quad 1 \\ \alpha_8/p^7 & 1\quad 6\quad 10\quad 4 \\ & \ldots \\ Column & 0^{th}\ 1^{th}\ 2^{th}\ 3^{th}\ .. \end{cases} \tag{22}$$

В інших точках $p \neq 1, q \neq 1$, наприклад для фазового напрямку $p=q=s$ [7], в трикутнику Фібоначчі

$$p=3,\ q=3:\begin{cases} Rows, n & & & & & & & & F_{n+2}=3F_{n+1}+3F_n \\ 2 & 3 & & & & & & & 3 \\ 3 & 9 & 3 & & & & & & 12 \\ 4 & 27 & 18 & 0 & & & & & 45 \\ 5 & 81 & 81 & 9 & 0 & & & & 171 \\ 6 & 243 & 324 & 81 & 0 & 0 & & & 648 \\ 7 & 729 & 1215 & 486 & 27 & 0 & 0 & & 2457 \\ 8 & 2187 & 4374 & 2430 & 324 & 0 & 0 & 0 & 9315 \\ & & & & \ldots \end{cases} \tag{23}$$

сума чисел вздовж рядків також дорівнює відповідному числу F_n, а вздовж діагональних напрямків, паралельних гіпотенузі трикутника (23), у відповідності до правила (2) обчислюється як:

$$(3+3)^0, (3+3)^1, (3+3)^2, (3+3)^3, \ldots \Rightarrow (s+s)^0, (s+s)^1, (s+s)^2, (s+s)^3, \ldots \tag{24}$$

Отже, якщо $p=q=s$, то для трикутника Фібоначчі, правило (13) реалізується аналогічно з тією відмінністю, що результат сумування треба домножити на s:

$$\begin{cases} m=1 \quad 9\quad 3 & 9\quad 3 & m=2 \quad 9\quad 3 \\ & + & \\ m=2 \quad 27\quad 18 & 27\quad 18 & m=2 \quad 27\quad 18 \\ & = & \\ & 27\quad 27\quad 3 & m=3 \quad 81\quad 81\quad 9 \end{cases} \tag{25}$$

У випадку $p \neq q$ правило (25) обчислення елементів рядків в трикутнику Фібоначчі справджується із врахуванням відомого рекурентного співвідношення

$$F_{n+2}=pF_{n+1}+qF_n \tag{26}$$

Продемонструємо його на конкретному прикладі:

$$
\begin{array}{l} p=2 \\ q=3 \end{array}:\left\{\begin{array}{llllllllll}
m & & & & & & & & & F_{n+2}=2F_{n+1}+3F_n \\
0 & 2 & & & & & & & & 2 \\
1 & 4 & 3 & & & & & & & 7 \\
2 & 8 & 12 & 0 & & & & & & 20 \\
3 & 16 & 36 & 9 & 0 & & & & & 61 \quad \Rightarrow \\
4 & 32 & 96 & 54 & 0 & 0 & & & & 182 \\
5 & 64 & 240 & 216 & 27 & 0 & 0 & & & 547 \\
6 & 128 & 576 & 720 & 216 & 0 & 0 & 0 & & 1640 \\
 & & & & \ldots & & & & &
\end{array}\right. \qquad (27)
$$

$$
\Rightarrow\left\{\begin{array}{llllllllll}
m=3 & 16 & 36 & 9 & & 16\cdot 3\cdot & 36\cdot 3 & 9\cdot 3 & & \\
 & & & & & & + & & & \\
m=4 & 32 & 96 & 54 & 32\cdot 2 & 96\cdot 2 & 54\cdot 2 & & & \\
 & & & & & & = & & & \\
 & & & & 64 & 240 & 216 & 27 & m=5 & 64 \quad 240 \quad 216 \quad 27
\end{array}\right.
$$

Якщо $p=q\neq 1$, то представлення чисел (3) справджується у вигляді:

$$
Fibonacci \qquad 2-triangle
$$

$$
p=3,q=3:\ \left\{\begin{array}{lllllll}
\alpha_n & & & & & & \\
\alpha_2 & 3 & & & & & \\
\alpha_3 & 9 & 3 & & & & \rightarrow 33=3\cdot(11)=3^1\cdot(11)^1 \\
\alpha_4 & 27 & 18 & & & & \\
\alpha_5 & & 81 & 9 & & & \rightarrow 9189=3^2\cdot(121)=3^2\cdot(11)^1 \\
\alpha_6 & & & 81 & & & \\
\alpha_7 & & & & 27 & & \rightarrow 27818127=3^3\cdot(1331)=3^3\cdot(11)^3 \\
 & & & & & \ldots &
\end{array}\right. \qquad (28)
$$

У випадку $p\neq q$, треба застосувати запропонований в даній роботі алгоритм поелементного перемноження

$$
Fibonacci \qquad 2-triangle
$$

$$
p=2,q=3:\ \left\{\begin{array}{llllll}
\alpha_n & & & & & \\
\alpha_2 & 2 & & & & \\
\alpha_3 & 4 & 3 & & & \\
\alpha_4 & 8 & 12 & & & \\
\alpha_5 & & 36 & 9 & & \rightarrow 4129=23\times 23=\left\{\begin{array}{lll} & 23 & \\ & \times & \\ & 23 & \\ & = & \\ & 6 & 9 \\ 4 & 6 & \\ ----- & & \\ 4 & 12 & 9 \end{array}\right. =(23)^2 \\
\alpha_6 & & & 54 & & \\
\alpha_7 & & & & 27 & \\
 & & \ldots & & &
\end{array}\right. \qquad (29)
$$

або

$$
p=2,q=3:\ \left\{\begin{array}{llllll}
\alpha_n & & & & & \textit{Fibonacci}\quad 2-\textit{triangle} \\
\alpha_2 & 2 & & & & \\
\alpha_3 & 4 & 3 & & & \\
\alpha_4 & 8 & 12 & & & \\
\alpha_5 & & 36 & 9 & & \\
\alpha_6 & & & 54 & & \\
\alpha_7 & & & & 27 & \to 36\ \ 54\ \ 27 = 23\times 23\times 23 = \left\{\begin{array}{l} \quad 4\ \ 12\ \ 9 \\ \qquad \times \\ \qquad 23 \\ \qquad = \\ \quad 12\ \ \ 36\ \ \ 27 \\ 8\ \ \ 24\ \ \ 18 \\ -------- \\ 8\ \ \ 36\ \ \ 54\ \ \ 27 \end{array}\right. = (23)^3 \\
 & & \ldots & & &
\end{array}\right. \tag{30}
$$

Обгрунтуємо закономірність бісекції (14-15) послідовності чисел Фібоначчі (28) у загальному випадку для довільних значень p,q.

$$
p=2,\,q=3:\left\{\begin{array}{lllllllll}
n & & & & & & & F_{n+2}=2F_{n+1}+3F_n & \\
1 & 1 & & & & & & 1 & \\
2 & 2 & & & & & & 2 & \\
3 & 4 & 3 & & & & & 7 & \\
4 & 8 & 12 & 0 & & & & 20 & \\
5 & 16 & 36 & 9 & 0 & & & 61 & (b) \\
6 & 32 & 96 & 54 & 0 & 0 & & 182 & \\
7 & 64 & 240 & 216 & 27 & 0 & 0 & 547 & \\
8 & 128 & 576 & 720 & 216 & 0 & 0 & 1640 & \\
 & & & \ldots & & & & &
\end{array}\right. \tag{31}
$$

У випадку $p \neq q$, числа Фібоначчі в структурованих бінарно областях обчислюються за правилом (25) додавання елементів в стовпцях:

$$
p=2,\,q=3:\left\{\begin{array}{l}
\quad\ldots \\
n=3:\ \ 4\ \ \ 3 \\
n=4:\ \ 8\ \ \ 16 \\
\quad\ldots
\end{array}\right. \Rightarrow F_5=\left(2\cdot 16+3\cdot 8\right)+\left(2\cdot 12+3\cdot 3\right)=61 \tag{32}
$$

Висновок

Трикутник Фібоначчі, сформованого із елементів степеневих перетворень квадратного тричлена, бінарно структурується областями із рядків однакових довжин, в яких сума чисел формує послідовність чисел, яка співпадає із перетвореною бісекцією класичної послідовності чисел Фібоначчі. Обгрунтовано правило Паскаля для обчислення елементів в рядках трикутника Фібоначчі та загальні співвідношення двійкування чисел в рядках для довільних значень p,q.

Література

1. T.Koshy. "Fibonacci and Lucas numbers with application", A Wiley-Interscience Publication: New York. (2001).

2. G.Polya. Mathematicaal Discavery. John Wiley Sons, Inc.1962 (vol.I) and 1965 (vol.II).

3. Hosoya H. Fibonacci triangle. FQ,173-179, 1976.

4. A. P. Stakhov. Fibonacci matrices, a generalizatin of the Cassini formula, and a new coding theory. Chaos, Solitons and Fractals, 30, 56–66, (2006). Stakhov A.P, Aranson S. The Golden Non-Euclidean Geometry. World Scientific; 2016.

5. S. Falcon, A. Plaza.. The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle. Chaos, Solitons and Fractals, 33, 38–4, (2007).

6. 1.K.Kuhapatanakul.. The Fibonacci p-numbers and Pascal’s triangle. Cogent Mathematics, 3,1-7, (2016).

7. P. S. Kosobutskyy.. Phidias numbers as a basis for Fibonacci analogues. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics. 26(1): 172—178, (2020).

P. Kosobutskyy, M. Karkulovska, Yu. Losynska
Lviv Polytechnic National University

REGULARITIES OF NUMBERS IN THE FIBONACHI TRIANGLE CONSTRUCTED ON THE DEGREE TRANSFORMATIONS OF A SQUARE THREE MEMBERS

In this paper, it is shown that the Fibonacci triangle is formed from the elements of power transformations of a quadratic trinomial. It is binary structured by domains of rows of equal lengths, in which the sum of numbers forms a sequence of certain numbers. This sequence coincides with the transformed bisection of the classical sequence of Fibonacci numbers. The paper substantiates Pascal's rule for calculating elements in the lines of a Fibonacci triangle. The general relations of two forgings of numbers in lines of a triangle of Fibonacci for arbitrary values are received

Keywords: Fibonacci numbers, Fibonacci triangle, Pascal's rule