

О. Станкевич

Національний університет “Львівська політехніка”

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ТІЛІ З ДЕФЕКТОМ

© Станкевич О., 2021

Представлено розв’язок динамічної задачі про визначення хвильового поля переміщень на поверхні пружного півпростору, спричиненого розкриттям внутрішньої тріщини під дією крутних зусиль. На основі розв’язків крайових інтегральних рівнянь показано характер зміни амплітудно-частотних характеристик пружних коливань на поверхні твердого тіла залежно від розмірів дефекту.

Ключові слова – пружні хвилі, тріщина скруту, граничні інтегральні рівняння

Вступ

Динамічна локальна перебудова структури матеріалів під дією внутрішніх напружень призводить до зміни кристалічної решітки, утворення та руху мікро- і макродефектів. Цей процес супроводжується поширенням у тілі пружних акустичних хвиль збурень. Джерелами випромінювання хвиль можуть бути вихід дислокацій на поверхню, утворення скупчень дислокацій, процеси утворення, підростання і руху тріщиноподібних дефектів тощо. Після досягнення поверхні тіла пружні хвилі спричинюють переміщення точок поверхні, що можна відповідним чином зареєструвати.

Дослідження параметрів хвильового поля переміщень, спричиненого внутрішніми структурними змінами у тілах, насамперед, важливо для сейсмології, геофізики, неруйнівного контролю [1–5]. Поля напружень і переміщень, породжені дифрагованими на тонких неоднорідностях хвилями, досліджували у працях [6–10]. Високу ефективність у розв’язуванні тривимірних динамічних задач для тіл із тріщинами і включеннями показав метод граничних інтегральних рівнянь [8, 10, 11].

Постановка задачі

Розглянемо пружний ізотропний півпростір з вільною поверхнею S_0 , матеріал якого характеризується густиною ρ , модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν . Півпростір містить дискову тріщину радіуса a , яка займає область S_1 , паралельну до поверхні S_0 тіла та розташовану на глибині d . Протилежні поверхні S_1^\pm дефекту зазнають дії самозрівноважених у часі t крутних зусиль

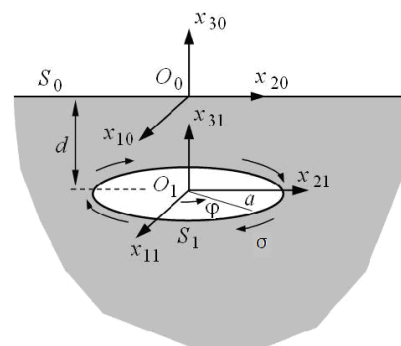


Рис. 1. Схема зміщення поверхонь тріщини у півпросторі

$N_j^+(\mathbf{x}, t) = -N_j^-(\mathbf{x}, t) = (-1)^{j+1} x_{j+1} \frac{\tau_0}{a} T(t)$, $j=1, 2$, де τ_0 – інтенсивність прикладених зусиль,

$T(t)$ – часова функція навантаження. Вибір декартових систем координат $O_k x_1 x_2 x_{3k}$ ($k=0,1$) показано на рис. 1. Контур тріщини вважаємо нерухомим.

Задача визначення хвильового поля переміщень на поверхні тіла в перетвореннях Фур'є за часом з врахуванням принципу причинності і нульових початкових умов зводиться до розв'язування диференціального рівняння руху відносно компонент вектора $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ пружних переміщень

$$\omega_2^{-2} \Delta_3 \tilde{\mathbf{u}} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}) \text{grad div } \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами на поверхні півпростору

$$\tilde{\sigma}_{j3}(\mathbf{x}_0, \omega) = 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x}_0 \in S_0 \quad (2)$$

і поверхнях тріщини

$$\sum_{n=1}^3 \tilde{\sigma}_{nj}(\mathbf{x}_1, \omega) \cos(x_3, x_n) = (-1)^{j+1} (1 - \delta_{j3}) x_{j+1} \frac{\tau_0}{a} \tilde{T}(\omega), \quad j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x}_1 \in S_1. \quad (3)$$

Тут $\Delta_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – тривимірний оператор Лапласа; δ_{ij} – символ Кронекера; \tilde{u}_j , $\tilde{\sigma}_{ij}$ –

Фур'є – трансформанти амплітудних значень компонент вектора переміщень u_j і тензора напружень σ_{ij} ; ω – параметр інтегрального перетворення; $\omega_n = \omega / c_n$; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$, $c_1 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} c_2$ – швидкості поширення у тілі поперечної і поздовжньої пружних хвиль.

Розв'язування задачі

На підставі принципу суперпозиції переміщення в довільній точці \mathbf{x}_0 з координатами (x_1, x_2, x_{30}) в системі координат $O_0 x_1 x_2 x_{30}$ подамо у вигляді суми переміщень від скруту тріщини і переміщень точок поверхні S_0 тіла

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{j0}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{2}{\omega_2^2} \left[\frac{\omega_2^2}{2} \frac{\partial P_{j0}^2}{\partial x_{30}} + \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial P_{30}^1}{\partial x_j} - \left(\Delta_2 + \omega_2^2 \right) \frac{\partial P_{30}^2}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial P_{j1}^2}{\partial x_{310}}, \quad j = \overline{1,2}, \\ \tilde{u}_{30}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \left[\Delta_2 (P_{30}^1 - P_{30}^2) + \frac{\omega_2^2}{2} P_{30}^1 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$P_{jk}^n(x_{k0}, \omega) = \iint_{S_k} \Delta \tilde{u}_{jk}(\xi, \omega) \frac{\exp(i \omega_n |x_{k0} - \xi|)}{|x_{k0} - \xi|} dS_\xi, \quad j = \overline{1,3}, \quad k = \overline{0,1}, \quad n = \overline{1,2} \quad - \text{потенціали}$$

Гельмгольца; $i = \sqrt{-1}$ уявна одиниця; $|x_0 - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$; (x_1, x_2, x_{310}) – координати точки \mathbf{x}_0 в системі координат $O_1 x_1 x_2 x_{31}$, $|x_{10} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{310}^2}$, $x_{310} = d$; невідомі функції $\Delta \tilde{u}_{j1}$ ($j = \overline{1,2}$) характеризують стрибок зміщень точок протилежних поверхонь S_1^\pm тріщини у напрямках координатних осей $O_1 x_j$; невідомі густини $\Delta \tilde{u}_{j0}$ ($j = \overline{1,3}$) характеризують переміщення точок поверхні півпростору. Інтегральні представлення (4) переміщень за допомогою потенціалів Гельмгольца тотожньо задовольняє рівняння (1) і умови Зоммерфельда випромінювання на безмежності.

Застосувавши до (4) співвідношення закону Гука, отримаємо вирази для напружень:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{j3}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{4G}{\omega_2^2} \left[-B_j + \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial^2 (P_{30}^1 - P_{30}^2)}{\partial x_j \partial x_{30}} - \frac{\omega_2^2}{4} (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{j0}^2 \right], \\ \tilde{\sigma}_{33}(\mathbf{x}_0, \omega) &= \frac{4G}{\omega_2^2} \left[-B_3 - \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 P_{30}^1 + \Delta_2 (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{30}^2 \right],\end{aligned}\quad (5)$$

де

$$B_j = \frac{\omega_2^2}{4} (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{j1}^2, \quad j=1, 2, \quad B_3 = 0.$$

Вважаючи функції $\Delta \tilde{u}_{j1}$ ($j=1, 2$) тимчасово відомими та задовольнивши крайові умови (2) на поверхні півпростору, отримаємо систему граничних інтегральних рівнянь для знаходження невідомих густин $\Delta \tilde{u}_{j0}$ ($j=1, 3$) у вигляді

$$\begin{aligned}\left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial^2 (P_{30}^1 - P_{30}^2)}{\partial x_j \partial x_{30}} - \frac{\omega_2^2}{4} (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{j0}^2 &= B_j, \quad j=1, 2, \quad x_0 \in S_0, \\ \left(\Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 P_{30}^1 + \Delta_2 (\Delta_2 + \omega_2^2) P_{30}^2 &= B_3.\end{aligned}\quad (6)$$

Застосувавши до (6) двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_1, x_2 і скориставшись теоремою про згортку, отримаємо систему 3-х алгебраїчних рівнянь відносно $\Delta \tilde{u}_{j0}$. Застосувавши до розв'язків рівнянь обернене перетворення Фур'є, отримаємо представлення густин $\Delta \tilde{u}_{j0}$ через функції $\Delta \tilde{u}_{j1}$ ($j=1, 2$) зміщення поверхонь тріщини у вигляді

$$\Delta \tilde{u}_{j0} = \frac{1}{\pi^2 \omega_2^2} \iint_{S_0} \int_0^\infty \frac{\rho}{R_2(\rho)} J_0(\rho|\xi - \eta|) B_j d\rho dS_\eta. \quad (7)$$

Тут $R_2(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \omega_2^2}$; $J_0(z)$ – Бесселева функція нульового порядку першого роду дійсного аргументу z . Підставивши (7) у співвідношення (4) та скориставшись результатами роботи [10], запишемо вирази для переміщень на поверхні S_0 півпростору, спричинені динамічним скрутом тріщини, у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{j0}(\mathbf{x}_0, \omega) &= 2 \frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_{S_1} \Delta \tilde{u}_{j1}(\xi, \omega) \frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}_{10} - \xi|)}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|} dS_\xi, \quad j=1, 2, \\ \tilde{u}_{30}(\mathbf{x}_0, \omega) &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

На основі представлень (8) можна зробити такі висновки:

1. При розглянутому утворенні тріщини кручення в тілі поширюються лише горизонтально поляризовані (SH) поперечні хвилі зі швидкістю c_2 ;
2. Вертикальні переміщення точок поверхні півпростору відсутні;
3. Наявність вільної поверхні півпростору призводить до того, що амплітуди зсувних переміщень на ній удвічі перевищують свої аналоги для випадку безмежного тіла.
4. Інтегрування проводиться по скінченій області тріщини, що суттєво під час числових розрахунків.

Результати та їх обговорення

Нехай функції зміщення поверхонь тріщини описуються залежностями

$$\Delta u_{11}(x) = \sqrt{a^2 - r^2} r \sin \varphi, \quad \Delta u_{21}(x) = -\sqrt{a^2 - r^2} r \cos \varphi. \quad (9)$$

Підставивши (9) у (8) та провівши інтегрування по круговій області розташування дефекту, отримаємо остаточні вирази для переміщень

$$u_\varphi(r^*, \omega) = 4\pi a^2 \int_0^\infty \frac{1}{\tau} P(\tau) e^{-dR_2(\tau)} J_1(\tau r^*) d\tau, \quad u_3(r^*, \omega) = 0, \quad (10)$$

$$P(\tau) = \left(\frac{3}{a^2 \tau^2} - 1 \right) \sin a\tau - \frac{3}{a\tau} \cos a\tau.$$

Залежності амплітудних нормованих значень переміщень $|u_\varphi|/a$ від хвильового числа $\omega_2 a$ представлено на рис. 2. Глибина d залягання тріщини дорівнює $2a$, відстань r^* від епіцентру до точки визначення переміщень – $8a$. Графіки починаються від статичних значень переміщень для $\omega_2 a = 0$, зростають до досягнення максимального значення, після чого осцилюючи спадають, приймаючи зникаючий характер.

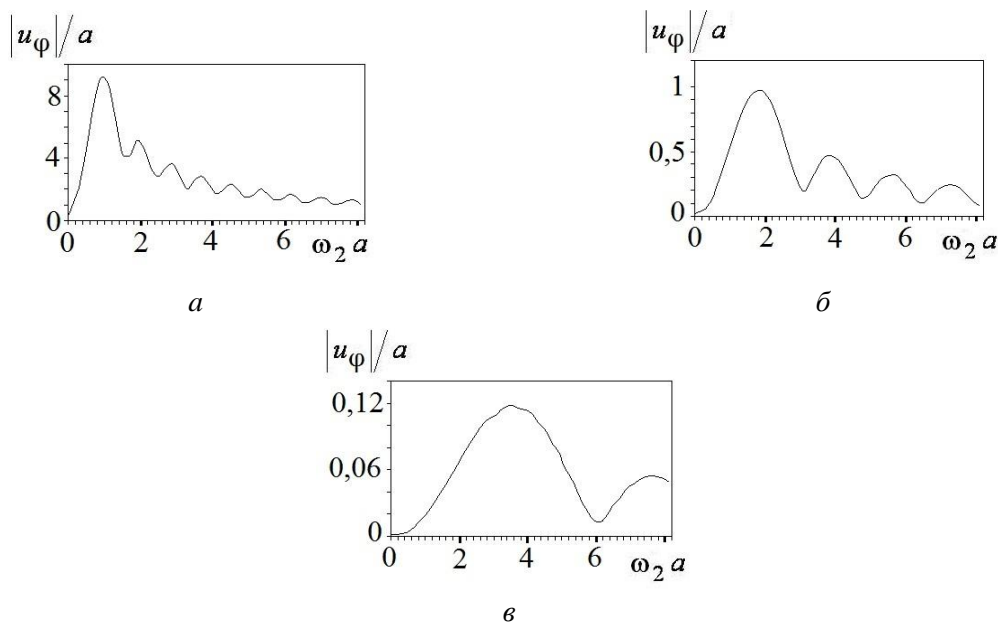


Рис. 2. Залежність нормованих значень переміщень на поверхні півпростору у точці спостереження $r^* = 8a$ і $d = 2a$ від хвильового числа: $a - R_T = 4a$; $b - R_T = 2a$; $v - R_T = a$.

За аналізом графічних залежностей бачимо, що збільшення розмірів тріщини призводить до зростання величини переміщень та звуження ширини смуги домінуючих частот. Зі збільшенням розмірів дефекту відбувається зменшення величини приведеної частоти, за якої амплітуди переміщень досягають максимальних значень.

Висновки

За отриманими розв'язками тривимірної динамічної задачі для пружного півпростору, послабленого дископодібною тріщиною скруту, встановили, що характер коливань поверхні півпростору залежить від розмірів тріщини. Коливання мають осцилюючий характер, із поступовим зниканням. За умови збільшення розмірів тріщини зростають амплітуди коливань точок поверхні півпростору, звужується ширина смуги частот та зменшується значення частоти, за якої коливання досягають максимальних амплітуд. Отримані результати важливо враховувати під час неруйнівного контролю відповідальних об'єктів методом акустичної емісії (АЕ). За зміною параметрів сигналів АЕ можна встановити характер руйнування у конструкційному матеріалі, що водночас сприяє підвищенню ефективності оцінки залишкового ресурсу об'єкта контролю.

Література

1. Takeo M. Ground rotational motions recorded in near-source region of earthquakes // *Geophys. Res. Lett.* 1998. 25. P. 789–792.
2. Вакулин А. В. Физика волнового сейсмического процесса. Петропавловск-Камчатский: Изд-во Камчатского педагогического университета, 2003. 150 с.
3. Reginald H. Acoustic emission / Microseismic activity. V. 1. Principles, techniques and geotechnical applications. 2003. 297 p.
4. Андрейків О. Є., Скальський В. Р., Сулим Г. Т. Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування. Львів: СПОЛОМ, 2007. 480 с.
5. Назарчук З. Т., Скальський В. Р. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій. Т. 1. Теоретичні основи методу акустичної емісії. К.: Наук. думка, 2009. 287 с.
6. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // *Изв. РАН, Механика твердого тела.* 1992. № 3. С. 139–146.
7. Хай М. В., Станкевич В. З. Фундаментальний розв'язок квазістатичної задачі для півпростору з плоскими розривами // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2002. № 3. С. 25–28.
8. Mykhas'kiv V. Transient response of plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid // *Wave Motion.* 2005. 41. P. 133–144.
9. Грилицький М. Д., Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В. Дифракція SH-хвиль тонким прямолінійним тунельним включенням низької жорсткості в півпросторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2006. 49(4). С. 92–96
10. Скальський В. Р., Станкевич О. М. Визначення переміщень на поверхні півпростору, спричинених утворенням внутрішньої тріщини скруту // *Вісник ДНУЗТу ім. академіка В. Лазаряна.* Вип. 33. Дніпропетровськ, 2010. С. 255–258.

O. Stankevych,

Lviv Polytechnic National University

MATHEMATICAL MODELING OF ELASTIC WAVE PROPAGATION IN A BODY WITH A DEFECT

© Stankevych O., 2021

The solution of the dynamic problem of calculation the wave field of displacements on the surface of an elastic half-space caused by the opening of an internal crack under the action of torsional forces is presented. Based on the solutions of the boundary integral equations, the nature of the change in the amplitude-frequency characteristics of elastic oscillations on the surface of a rigid body depending on the size of the defect is shown.

Keywords - elastic wave, crack of mode III, boundary integral equations method.