

Олександр МАРЧЕНКО, Сергій ПЕРІЙ, Іван ПОКОТИЛО,  
Зоряна ТАРТАЧИНСЬКА

Національний університет “Львівська політехніка”, Інститут геодезії, вул. Карпінського, 6, Львів, 79013, Україна,  
march@pancha.lviv.ua, periy\_ss@ukr.net, ivan.y.pokotylo@lpnu.ua ztartachynska@yahoo.com

<https://doi.org/10.23939/jgd2021.02.005>

## ГРАВІТАЦІЙНА ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ТА ОСНОВНІ ПАРАМЕТРИ ЗЕМНИХ І ПЛАНЕТ-ГІГАНТІВ

Основною метою цього дослідження (перший етап) стало накопичення відповідного набору фундаментальних астрономо-геодезичних параметрів для їх подальшого використання з метою визначення складових розподілів густини для земних та зовнішніх планет Сонячної системи (на інтервалі більше ніж десять років). Початкові дані отримано у результаті кількох кроків загального способу дослідження Сонячної системи із виконанням ітерацій за допомогою різних космічних апаратів та місій. Механічні та геометричні параметри планет дають змогу знайти розв’язання оберненої гравітаційної задачі (другий етап) у разі використання гауссового розподілу густини для Місяця та земних (Меркурій, Венера, Земля, Марс) і планет-гігантів (Юпітер, Сатурн, Уран, Нептун). Цей закон розподілу густини Гаусса (або нормальний розподіл) вибрано як частковий розв’язок рівняння Адамса – Вільямсона та найкраще наближення кусково-радіального профілю Землі, урахувавши модель PREM на основі незалежних сейсмічних швидкостей. Цей висновок, як гіпотеза вже зроблений для Землі, використано для вирішення проблеми апроксимації для інших планет, щодо яких ми сподіваємося вирішити обернену гравітаційну проблему в разі застосування розподілу густини Гаусса для інших планет, оскільки сейсмічна інформація в такому випадку майже відсутня. Тому, якщо ми можемо знайти стійкий розв’язок для оберненої гравітаційної задачі та відповідний розподіл густини Гаусса, апроксимований із належною якістю, то приходимо у результаті до стабільного визначення гравітаційної потенційної енергії земних та гігантських планет. Крім нормального закону густини планети, визначено гравітаційну потенціальну енергію, інтеграл Діріхле та інші фундаментальні параметри планет Сонячної системи. Це дослідження здійснюється вперше як статичне, щоб уникнути можливих залежностей від часу в гравітаційних полях планет.

*Ключові слова:* фундаментальні астрономо-геодезичні параметри; розв’язання оберненої гравітаційної задачі; розподіл густини Гаусса; інтеграл Діріхле.

### *Вступ*

Одну із перших робіт про внутрішню будову сонячних планет виконав піонер геофізики Georg H. Darwin (1877, 1884), прийнявши деякі їх основні параметри для оцінювання внутрішньої густини земних і зовнішніх планет. Згідно із “Encyclopedia of the Solar System” (2015) більшість великих тіл Сонячної системи виявлено набагато раніше від початку космічної ери планетарних досліджень. Вивчення ж планет за допомогою космічних зондів зазвичай містить кілька основних кроків методом послідовних ітерацій.

На першому етапі космічні апарати дають близькі зображення та визначають глобальні фізичні властивості планет. Подальше використання супутників навколо орбіт поблизу небесних тіл приводить до картографування більшої частини поверхні та проведення детальних вимірювань методами дистанційного зондування. Відтак розвідка продовжується

з посадкою зонда на поверхню для виконання вимірювань у точці посадки апарата. Повернення зразків на Землю для детального аналізу – це наступний крок, перш ніж розглядати можливість висадки людини на досліджувану планетарну систему. Аналізуючи ці кроки, ми знову приходимо до загального способу дослідження Сонячної системи методом послідовних ітерацій.

Насправді усі планети та деякі менші тіла вже відвідали космічні апарати, але вивчали лише Місяць, урахувавши всі вищезгадані етапи – додаткову систему із двох низьких супутників GRAIL та мінімальною висотою 23 км, що дає змогу детально вивчати гравітаційне поле [Konopliv, et al., 2014; Lemoine, et al., 2014] та рельєф [Neumann, et al., 2015; Zuber, et al., 2016] Місяця з горизонтальною роздільною здатністю 3–5 км. Усі планети та деякі менші тіла космічні апарати відвідали, але, на відміну від Місяця, без виконання всіх кроків. Короткий опис етапів дослідження великих об’єктів у Соняч-

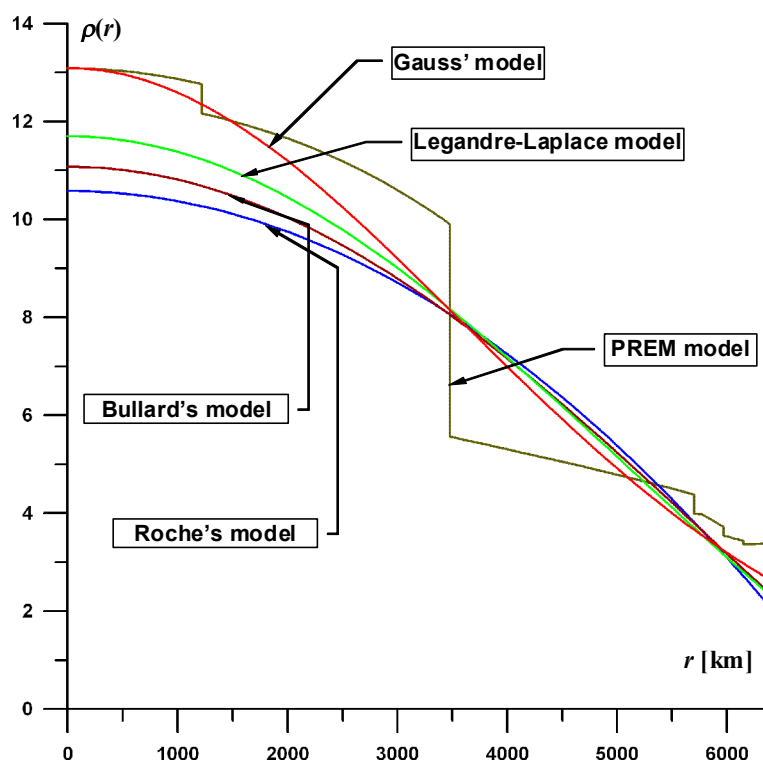
ній системі – це польоти космічних апаратів та орбітальні місії до Землі, Меркурія (Mariner 10, 1974; MESSENGER, 2008), Венери (Mariner 2, 1962; Venera 9, 1975), Марса (Mariner 4, 1965; Mariner 9, 1971; Viking1, 1976), Юпітера (Pioneer 10, 1973; Pioneer 11, 1974; Voyagers 1, 1979; Voyagers 2, 1979; Galileo 1995; JUNO 2016), Сатурна (Pioneer 11, 1979; Cassini 2017), Урана (Voyager 2, 1986) та Нептуна (Voyager 2, 1986). Уран і Нептун детально не досліджувались з космосу, окрім одиночних польотів Voyager 2 у 1986.

Оскільки багато ключових характеристик планет щодо їх походження, еволюції та внутрішньої будови не визначено, то актуальною залишається проблема уточнення фундаментальних параметрів поступально-обертального руху планет та їх вико-

ристання для побудови радіальних профілів густини, зокрема оцінки такого важливого параметра, як гравітаційна потенціальна енергія планет.

Перші описи густини Землі у вигляді їх сферично-симетричного розподілу здійснювали Лежандр, Лаплас, Дарвін, Роше тощо. Нещодавно замість поліноміального зображення кусково-радіальної щільності [Dziewonski and Anderson, 1981] проаналізовано гіпотезу, яка основана на рівнянні Adams – Williamson [Bullen, 1975]. Останнє приводить до відомого розподілу Гаусса, який названо нормальним законом густини Землі [Marchenko, 2000].

Рис. 1 ілюструє декілька неперервних розподілів густини, зокрема кусково-неперервну радіальну густину PREM.



**Рис. 1.** Неперервні розподіли густини Землі за Лежандром – Лапласом, Роше, Bullard та Gauss, порівняно з моделлю густини PREM,  $\text{г/см}^3$

Зазначимо, що випадок розподілу Землі як нормальної густини найкраще відповідає моделі PREM з погляду апроксимації, побудованої також на основі сейсмічних даних. З іншого боку, безперервна гауссова модель радіальної густини дає найнадійнішу оцінку  $E_{Gauss}$  потенціальної енергії  $E$  [Marchenko, 2009], взяту з кусково-неперервної моделі PREM [Marchenko, Zayatz, 2011], відповідаючи на таке питання: який закон безперервної густини вибрати для порівняння таких загальних характеристик, як значення маси планети, величина середнього моменту інерції або гравітаційна потенціальна енергія планети. Зауважимо, що енергія  $E$ , взята зі знаком (-), є робо-

тою  $W(=-E)$  гравітації, необхідною для транспортування мас, які мають загальну масу Землі  $M$ , “зі стану нескінченної дифузії до її фактичного стану” всередині планети [Thomson and Tait, 1883]. Gauss у своїх знаменитих мемуарах (1867) довів, що  $W(=-E)$  має деяке мінімальне значення  $W_{min}$ , якщо всі маси зосереджені на границі планети, що вважається рівневою поверхнею.

Загалом, метою дослідження стають оцінки енергії  $E = -(W_{min} + \Delta W)$  для різних земних планет та планет-гігантів, що ґрунтуються лише на гауссовій (нормальній) густині. Добре відома формула уможливило простий пошук  $W_{min}$  і пропонує важ-

ливу інтерпретацію відхилення  $\Delta W$  від  $W_{\min}$ , на якому інтеграл Діріхле  $\Delta W$  застосовується до внутрішнього потенціалу  $V_i$ , породженого прийнятним розподілом густини.

**Вихідні дані. Рівняння Адамса – Вільямсона**

Густина  $\rho$  може задовольняти так зване рівняння Adams – Williamson для кожної оболонки стратифікованої Землі за таких припущень: 1) Земля загалом перебуває у гідростатичній рівно-

з погляду співвідношень для сили притягання

$$g(\ell) = \frac{4\pi G}{3} \ell \cdot \delta_m(\ell) \Leftrightarrow g(\ell) = \frac{GM}{\ell^2} \quad (2)$$

та гідростатичної рівноваги

$$\text{grad}p(\ell) = \rho(\ell) \cdot \text{grad}V(\ell) \Rightarrow \frac{dp(\ell)}{d\ell} = -\rho(\ell) \cdot g(\ell) \quad (3)$$

за рахунок чого рівняння Adams–Williamson набуває остаточної форми

$$\frac{d \ln \rho(\ell)}{d\ell} = -\frac{g(\ell)}{\Phi(\ell)} \quad (4)$$

де параметр  $p(\ell)$  – не що інше, як тиск всередині Землі. Отже, (4) – це формула для визначен-

ня розподілу радіальної щільності за даними сейсмічних швидкостей, виконаних за припущеннями, перерахованими вище. Табл. 1 містить прийняті фундаментальні параметри планет, отримані в результаті дослідження Сонячної системи та подані нижче як початкова інформація.

$$\Phi = \Phi(\ell) = V(\ell)_p^2 - \frac{4}{3}V(\ell)_s^2 \quad (1)$$

Таблиця 1

**Фундаментальні параметри планет (NASA-параметри, прийняті на 2020 р.)**

Планета	$a_e$ , км	$\rho_m$ , g/cm <sup>3</sup>	$I$ (or $C$ )	$R$ , км	$\rho_s$ , g/cm <sup>3</sup>
1	2	3	4	5	6
<i>Місяць та планети земної групи</i>					
<i>Mercury</i>	2439,4 Messenger 2439,5 NASA	5,428 Margot, et al. 2012 5,427 NASA	C=0,346 ±0,014 Margot, et al. 2012: I=0,35 NASA	2439,7 NASA	2,9 Rivoldini et al., 2009
<i>Venus</i>	6051 Magellan	5,25 Cottureau, Souchay, 2009 5,243 NASA	C=0,3360 Cottureau, Souchay, 2009 I=0,33 NASA	6051,8 NASA	2,85 Yoder, 1995 2,9 Rappaport et al., 1999
<i>Earth</i>	6378,137 NASA	5,514 NASA	0,3308 NASA	6371 NASA	2,67 Moitz, 1990
<i>Moon</i>	1738 GRAIL	3,344 NASA	0,394 NASA	1737,4 NASA	2,8 Hikida, 2007, Wieczorek 2013
<i>Mars</i>	3396 Mars Reconnaissance Orbiter	3,935 Lemoine et al., 2001; Seidelmann et al. 2002 3,933 NASA	0,3653 ± 0,0008 Mocquet et al. 2010 0,3638 Konopliv et al 2016	3389,5 NASA	3,0 Zuber, et al. 2000; 2,9 Konopliv, et al. 2006
<i>Планети-гіганти</i>					
<i>Jupiter</i>	71492 NASA	1,326 NASA	C=0,2629 – 0,2645 Helled et al. 2011 I=0,254 NASA	69911 NASA	<0,8 NASA

1	2	3	4	5	6
<i>Saturn</i>	60268 NASA	0,687 NASA	C=0,218 Helled et al., 2011 0,210 NASA	58232 NASA	<0,4 NASA
<i>Uranus</i>	25559 NASA	1,271 NASA	0,225 NASA	25362 NASA	<0,1 NASA
<i>Neptune</i>	24764 NASA	1,638 NASA	0,230 NASA	24622 NASA	<0,1 NASA

Примітки:  $a_e$  – екваторіальний радіус;  $R$  – середній радіус;  $\rho_m$  – середня густина;  $I$  – безрозмірний середній або  $C$  – полярний моменти інерції;  $\rho_s$  – густина на поверхні планети. Всі NASA параметри взято згідно із web-site (<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/>). Усі прийняті параметри виділено жирним шрифтом.

Для того, щоб використати (4), ми повинні спочатку спробувати розв'язати це рівняння і подати спостережувані сейсмічні дані відповідною функцією глибини, розділивши Землю на зручні оболонки. Традиційно вважатимемо, що поділ на оболонки потрібно вибирати в тих сферах, де можна спостерігати розриви в параметрі  $\Phi$  або його похідній. Очевидно, що формальне розв'язання (4) можна отримати після інтегрування рівняння Адамса – Вільямсона

$$\rho(\ell) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^\ell \frac{g(x)}{\Phi(x)} dx\right), \quad (5)$$

і ми отримуємо функціональну залежність для радіальної густини як експоненціальну функцію. Права частина виразу (5) невідома. З цієї причини застосовуватимемо замість (5) найпростішу наближену функцію

$$M(\ell) = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{\beta^2} \left[ \frac{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\beta \cdot x)}{4\beta} - \frac{x}{2\rho_0} \rho(\ell) \right], \quad (9)$$

і середнього моменту інерції

$$I(\ell) = \frac{8\pi\rho_0 R^5}{3\beta^4} \left[ \frac{3\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\beta \cdot x)}{8\beta} - \frac{x}{4\rho_0} \rho(\ell) \cdot (2\beta^2 x^2 + 3) \right] = \frac{R^2}{\beta^2} \left[ M(\ell) - \frac{4\pi\ell^3}{3} \rho(\ell) \right], \quad (10)$$

де  $\operatorname{erf}(z)$  – інтеграл нормального розподілу від 0 до  $z$  або інтеграл ймовірності з розподілом густини згідно із (6).

Отже, одержуємо чудовий результат: один із розв'язків рівняння Адамса – Вільямсона – це не що інше, як знаменитий розподіл Гаусса, який можна апроксимувати і моделлю Роша, яка представляє можливе розв'язання рівняння Клеро. Незважаючи на відмінність між розглянутими вище різними виразами густини, приходимо до їх експоненціальної природи загалом. Модель Роша тепер можна розглядати просто як усічену версію ряду Тейлора для моделі Гаусса.

$$\rho(\ell) = \rho_0 \exp(-\beta^2 x^2), \quad \beta = \text{const}, \quad (6)$$

де ступінь 2 – найменший ступінь, для якого можемо отримати ненульове значення  $\Phi$  на початку координат.

Для застосування надалі запишемо деякі добре відомі формули у сфері радіуса  $\ell$  (частина маси Землі, обмежена цим радіусом) для маси

$$M(\ell) = 4\pi \int_0^\ell \rho(x) x^2 dx, \quad (7)$$

де  $dx$  – елемент прямої та середньої густини  $\rho_m(\ell)$ :

$$\rho_m(\ell) = \frac{3}{4\pi\ell^3} M(\ell). \quad (8)$$

Параметр  $\rho_m(\ell)$  в формі (8) приводить до формули (2). Вираз (6) допускає відповідно до (1) та (4) такі чудові вирази для маси

### Розподіл нормальної густини планет

Згідно із [Moritz, 1990] три вищезгадані умови привели до такого висновку: “будь-який закон глобальної густини повинен задовольняти три основні умови” [див. також, Bullard, 1954]: 1) він повинен забезпечувати правильну загальну масу або, що еквівалентно, середню густину; 2) він задає значення середнього моменту інерції; 3) він відтворює густину в основі континентальних шарів, значення якої можна прийняти приблизно від 3,2 до 3,3 г/см<sup>3</sup> (наприклад, густина трохи нижче від розриву Мохоровича), широко використовується у теорії ізостазії  $\rho_M = 3,27 \text{ г/см}^3$ .

Ці три умови уможливають побудову безперервного радіального розподілу густини. Перші дві умови можуть застосовуватися для визначення безперервної моделі Роша. По-перше, згідно з моделлю Гаусса для густини на початку координат, яка залежить від спостережуваного значення  $\Phi$ , отримуємо

$$\Phi_1(0) = -\frac{2 \cdot \pi \cdot G \cdot R^2}{3 \cdot \beta_1^2} \rho_0, \quad (11)$$

де  $\Phi_1(0)$  відповідає першому інтервалу сейсмічних даних  $\Phi$  на початку координат. Відповідно до наведеної вище стратифікації одержуємо ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) сегментів загалом. Далі, після простих маніпуляцій, можна записати таку формулу

$$\beta_m = -\frac{2 \cdot \pi \cdot G \cdot R^2 \rho_0}{3 \cdot \Phi_1(0)} \cdot \frac{\Phi_1(\ell_1) \cdot \Phi_2(\ell_2) \cdot \Phi_3(\ell_3) \dots \Phi_{m-1}(\ell_{m-1})}{\Phi_2(\ell_1) \cdot \Phi_3(\ell_2) \cdot \Phi_4(\ell_3) \dots \Phi_m(\ell_{m-1})}, \quad (12)$$

що дає підстави для такого висновку: якщо густина Землі відома в центрі Землі, то сейсмічних даних на межі стрибків Землі достатньо для визначення коефіцієнтів (12) кусково-неперервної моделі Гаусса (Marchenko, 2009).

Однак, згідно із (12), можемо додати в початку координат ще одну умову на густину, яка залежатиме від спостережуваного значення  $\Phi$ . Це дає змогу нарешті описати деякі найпростіші властивості нормальної моделі, що мають вигляд сферичної оболонки із відповідною стратифікацією планети. Повернемося до трьох умов, наведених на початку цього розділу. Після перетворення (10) на безрозмірний момент інерції  $I_m = I / MR^2$  отримуємо найпростіше співвідношення

$$I_m = \frac{1}{\beta^2} \left[ 1 - \frac{\rho_s}{\rho_m} \right], \quad (13)$$

між середньою густиною Землі  $\rho_m$ , моментом інерції  $I_m$  та поверхневою густиною  $\rho_s$ . Ця формула забезпечує для нашої нелінійної оберненої задачі чудовий замкнений вираз

$$\beta^2 = \frac{1}{I_m} \left[ 1 - \frac{\rho_s}{\rho_m} \right], \quad (14)$$

для коефіцієнта  $\beta$  неперервної моделі Гаусса.

Отже, ми приходимо до послідовного розв'язання нелінійної оберненої задачі за допомогою

двох замкнених виразів для двох основних параметрів. Перша – це якісна характеристика (14) глобального розподілу густини.

Друга – це кількісна характеристика

$$\rho_0 = \frac{4 \cdot \beta^3 \rho_m \cdot \exp(\beta^2)}{3 \cdot (\sqrt{\pi} \cdot \exp(\beta^2) \cdot \operatorname{erf}(\beta) - 2\beta)}, \quad (15)$$

яку одержано з виразу (8) для середньої густини Гаусса. Розв'язання (14)–(15), нарешті, забезпечує густину в центрі мас планети та чудове узгодження середньої густини та середнього моменту інерції. У випадку Землі ця модель найкраще узгоджується з безперервною моделлю Bullard (рис. 1), яка використовує три параметри.

Зауважимо, що визначення двох параметрів безперервної моделі Роша ґрунтується лише на середній густині  $\rho_m$  та середньому моменті інерції  $I_m$  без будь-якої умови на  $\rho_s$ . Власне, у випадку безперервної моделі густини Гаусса з двома параметрами всі ці три умови можна замінити одним співвідношенням (14) для якісної характеристики  $\beta$  нормального розподілу густини планети. Кількісною характеристикою  $\rho_0$  тепер є нелінійна функція (15) обчисленого коефіцієнта  $\beta$  та середньої густини планети  $\rho_m$ .

Таблиця 2

Параметри нормального закону та модель Роша для планет Сонячної системи

Планети	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$\beta$	$g(\ell)$ на поверхні планети, м/с <sup>2</sup>	Глибина максимальна $g(\ell)$ , км
1	2	3	4	5
<b>Місяць і планети Землі</b>				
<i>Меркурій</i>	11,33066	1,153545	3,7	202
<i>Венера</i>	11,07512	1,163695	8,9	404
<i>Земля</i>	12,89487	1,248673	9,8	1039
<i>Місяць</i>	4,25882	0,642566	1,6	0
<i>Марс</i>	5,95588	0,849683	3,7	0

1	2	3	4	5
<b>Планети-гіганти</b>				
<i>Юпітер</i>	8,19094	1,984189	24,8	20118
<i>Сатурн</i>	5,49708	2,182179	10,4	20796
<i>Уран</i>	9,24325	2,108185	8,9	7819
<i>Нептун</i>	11,55951	2,085144	11,1	7515

Відповідно до так званої теореми Сейджи (Moritz, 1990), сила гравітації  $g(\ell)$  має максимум всередині Землі. Якщо радіальну модель використано як базовий інструмент, можна отримати деякі додаткові замкнені зв'язки.

$$\frac{dg(\ell)}{d\ell} = \frac{4\pi G}{3} \left( \rho_m(\ell) + \ell \frac{d\rho_m(\ell)}{d\ell} \right) = 4\pi G \left( \rho(\ell) - \frac{2}{3} \rho_m(\ell) \right) = 0 \Rightarrow \rho(\ell) = \frac{2}{3} \rho_m(\ell) \quad (16)$$

І навіть більше, оскільки модель Роша є наближенням закону Гаусса, то використаємо це наближення, що і дає прості оцінки у закритій формі

$$\rho(x) = \rho_0(1 - Kx^2) = a + bx^2, \quad (K = \text{const}), \quad (17)$$

де

$$a = \rho_0 > 0 \quad \text{and} \quad b = \rho_0 K < 0. \quad (18)$$

й одержимо

$$\rho_m(\ell) = a + \frac{3 \cdot b}{5} \left( \frac{\ell}{R} \right)^2 = a + \frac{3 \cdot b}{5} x^2. \quad (19)$$

Тепер розв'язок (16) веде до замкненого виразу для параметра  $x$ :

$$x = \frac{\ell}{R} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a}}{3 \cdot \sqrt{-b}}. \quad (20)$$

Цей корінь відповідає (17) і  $a > 0$ , де знак  $b$  має бути від'ємним:  $b < 0$ . Крім того, застосовуючи таке безрозмірне співвідношення (20) для  $x \in [0,1]$ , можна отримати таку нерівність

$$\frac{a}{-b} \leq \frac{9}{5}, \quad (21)$$

для коефіцієнтів  $(a, b)$ . Зазначимо, що з коефіцієнта  $b$  впливає лише ознака другої радіальної похідної. З цієї причини  $\frac{d^2g(\ell)}{d\ell^2} < 0$  в точці (20) й наша функція  $g(\ell)$  має тільки один максимум у цій точці. Для обчислення коефіцієнтів  $a, b$  наведемо такі зручні рівняння

$$a = \frac{5\rho_m(10 - 21I_m)}{8},$$

Отже, необхідно знайти таку точку(и), де радіальна похідна  $\frac{dg(\ell)}{d\ell}$  дорівнює нулю. У результаті для стаціонарної(их) точки(ок) запишемо передусім добре відомі вирази

$$b = \frac{35\rho_m(5I_m - 2)}{8}, \quad (22)$$

які разом із виразами (14)–(15) використано для розрахунку параметрів планети, наведених у табл. 2.

Зазначимо, що у випадках Місяця та Марса модель Роша не може допустити позитивних результатів для теореми Сейджи, оскільки нерівність (21) не виконується. Формули (16)–(22) ведуть до максимуму на поверхні цих планет. Це очевидно, оскільки для доведення цієї теореми використано закон Роша. Послідовніші результати можна отримати за допомогою розподілу густини Гаусса.

### Гравітаційна потенціальна енергія планет і висновки

Нормальний розподіл густини  $\rho(\ell/R)$  [г/см<sup>3</sup>] для Місяця та планет земної групи (рис. 2, а) відображено на рис. 2, зокрема додатково і зовнішніх планет (рис. 2, б). Зауважимо, що густина навколо поверхні всіх планет-гігантів близька до нуля, що відповідає даним NASA з табл. 1 у вигляді нерівностей або нульових значень. Рис. 3 відображає графічно теорему Сейджи, яка ілюструє розподіл сили гравітації  $g(\ell/R)$  [м/с<sup>2</sup>] на основі нормальної густини Місяця та земних і зовнішніх планет (за винятком Місяця та Марса). Проте нормальний закон густини приводить до найглибших значень максимуму, як показано на рис. 3. Детальніший аналіз дає можливість зробити ті самі висновки, як показано на рис. 2, 3, разом із табл. 1, 2.

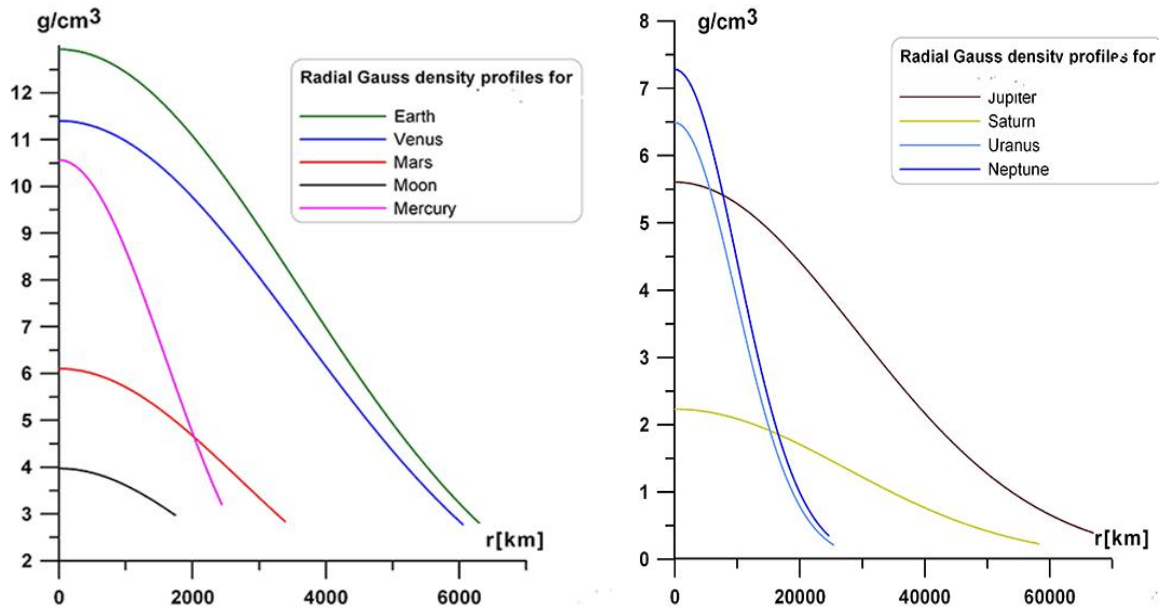


Рис 2. Нормальний розподіл густини  $\rho(r)$  [г/см<sup>3</sup>] Місяця та планет земної групи (зліва), включаючи цей закон для зовнішніх планет (праворуч)

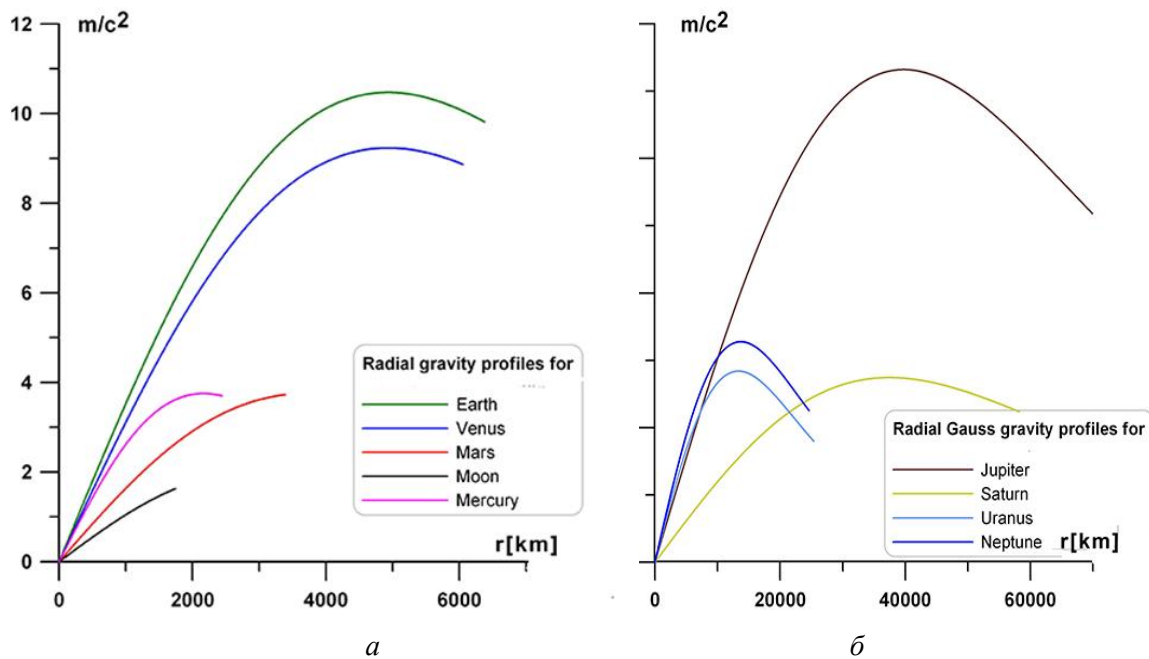


Рис 3. Розподіл сили притягання  $g(r)$ , побудований на основі нормальної густини Місяця і планет земної групи (а), урахувуючи цей закон для зовнішніх планет (б), м/с<sup>2</sup>

Одним із критеріїв єдності визначення  $\rho$  (як вирішення некоректно поставленої проблеми) є пошук стаціонарного значення  $E$  [Wermer, 1981]. Такий підхід впливає із результату Мещерякова (1977 р.): “Якщо надати числове значення потенційної енергії  $E$  та густини на поверхні Землі  $\sigma$  апріорі, то у розумінні Тіхонов визначення густини  $\rho$  перетворюється на коректно поставлену проблему” [Tikhonov

and Arsenin, 1974]. Отже, роботу  $W = -E$  гравітації, що представляє квадратичний функціонал на  $\rho$  [Moritz, 1990], можна використати для розв’язання цієї оберненої задачі. З огляду на геофізику, енергію  $E$  можна також застосувати як оцінку нижньої межі в’язкості мантії, отриманої на підставі швидкості зміни часу  $E$  [Rubincam, 1979]. Неперервні закони Лежандра – Лапласа, Роша, модель Bullard, нормальний розподіл Землі та

кусково-безперервний профіль Роша використано у Marchenko (2009) для кількох оцінок  $E$ , які привели до нерівності з мінімальною границею  $E_{Gauss}$ , що відповідає неперервному профілю Гаусса або кусково-неперервній моделі PREM [Marchenko, Zayats, 2011]. Отже, порівняння усіх оцінок для  $E$  дає, як вказано у Marchenko (2009), такі границі:

$$E_{Gauss} \leq E_{Earth} \leq E_H < -W_{min}, \quad (23)$$

де  $E_H$  – енергія Землі з однорідним розподілом густини.

Загальноприйнятий вираз для гравітаційної потенціальної енергії Землі  $E = -W$  має такий вигляд [Gauss, 1867; Moritz, 1990]:

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} V_i(r, \vartheta, \lambda) \cdot \rho(r, \vartheta, \lambda) \cdot d\tau, \quad (24)$$

Згідно із [Gauss, 1867; Moritz, 1990], робота  $W = -E$  має деяке мінімальне значення  $W_{min}$ , якщо всі маси зосереджені на рівневій поверхні  $\sigma$ , де гравітаційний потенціал  $V_0 = \text{const}$ , а всередині вона порожня. У цьому випадку внутріш

ній потенціал  $V_i = V_0 = \text{const}$  репрезентує гармонічну функцію всередині поверхні  $\sigma$  і приводить до нульового інтеграла Діріхле. Отже, мінімальна кількість  $W = -E$  дорівнюватиме

$$W_{min} = M \cdot V_0 / 2, \quad (25)$$

і є розв'язком варіаційної задачі Гаусса [Gauss, 1867]. Підстановка рівняння (25) у (24) приводить до таких фундаментальних формул

$$E = -(W_{min} + \Delta W),$$

$$\Delta W = \frac{1}{8\pi G} \int_{\tau} D(V_i, V_i) d\tau. \quad (26)$$

Отже, інший вираз для  $E$ , поданий за припущення, що границя  $\sigma$  є поверхнею рівня, забезпечує просту оцінку  $W_{min}$  та чудову інтерпретацію відхилення від цієї мінімальної величини  $\Delta W$ , тобто через ненульовий інтеграл Діріхле, коли всі маси розподіляються всередині відповідно до прийнятого закону густини.

Рівняння (26) дає змогу тепер сформулювати остаточні вирази для розподілу Гаусса

$$-E = W_{min} = \frac{GM^2}{2R} = \frac{\pi^2 G \rho_0^2 R^5 \exp(-2\beta^2)}{2\beta^6} [2\beta - \sqrt{\pi} \exp(\beta^2) \text{erf}(\beta)]^2, \quad (27)$$

$$-\Delta E = \Delta W = \frac{\sqrt{\pi^5} G \rho_0^2 R^5}{2\beta^6} [\sqrt{2}\beta \cdot \text{erf}(\sqrt{2}\beta) - \sqrt{\pi} \text{erf}(\beta)^2]. \quad (28)$$

Табл. 3 містить оцінки енергії  $E = -(W_{min} + \Delta W)$  окремо для кожної планети,

але у всіх випадках застосовувався нормальний закон щільності.

Таблиця 3

**Результати розрахунку роботи гравітації  $W_{min}$ ,  $\Delta W$  та енергії  $E$**

Planet	$W_{min}$	$\Delta W$	$E = -(W_{min} + \Delta W)$
<i>Місяць та планети земної групи</i>			
<i>Mercury</i>	$1.4902260 \cdot 10^{37}$ erg	$4.6793022 \cdot 10^{36}$ erg	$-1.9581562 \cdot 10^{37}$ erg
<i>Venus</i>	$1.3063239 \cdot 10^{39}$ erg	$4.1336440 \cdot 10^{38}$ erg	$-1.7196883 \cdot 10^{39}$ erg
<i>Earth</i>	$1.8682711 \cdot 10^{39}$ erg	$6.3194654 \cdot 10^{38}$ erg	$-2.5002176 \cdot 10^{39}$ erg
<i>Moon</i>	$1.0381252 \cdot 10^{36}$ erg	$2.3922314 \cdot 10^{36}$ erg	$-1.2773484 \cdot 10^{36}$ erg
<i>Mars</i>	$4.0513002 \cdot 10^{37}$ erg	$1.0374989 \cdot 10^{37}$ erg	$-5.0887992 \cdot 10^{37}$ erg
<i>Планети-гіганти</i>			
<i>Jupiter</i>	$1.7190280 \cdot 10^{43}$ erg	$1.1264831 \cdot 10^{43}$ erg	$-2.8455112 \cdot 10^{43}$ erg
<i>Saturn</i>	$1.8500793 \cdot 10^{42}$ erg	$1.4445069 \cdot 10^{42}$ erg	$-3.2945862 \cdot 10^{42}$ erg
<i>Uranus</i>	$9.9237757 \cdot 10^{40}$ erg	$7.2661139 \cdot 10^{40}$ erg	$-1.7189889 \cdot 10^{40}$ erg
<i>Neptune</i>	$1.4213884 \cdot 10^{41}$ erg	$1.0197873 \cdot 10^{41}$ erg	$-2.4411757 \cdot 10^{41}$ erg

Зазначимо, що гравітаційну потенціальну енергію в табл. 3 додатково розраховано за

прямою формулою (Marchenko, 2009), що ґрунтується на виразі (24):



$$E = \frac{\pi^2 G \beta_0^2 R^5}{\beta^4} \left( \frac{2\sqrt{\pi} \exp(-\beta^2) \operatorname{erf}(\beta)}{\beta} - 2 \exp(-2\beta^2) - \frac{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\beta)}{2\beta} \right), \quad (29)$$

без припущення, що поверхня кожної планети є рівневою поверхнею. Оскільки стратифікацію планет прийнято сферичною, доходимо важливого висновку, що формули (29) і  $E = -(W_{\min} + \Delta W)$  дають однакові результати. Наступний висновок буде пов'язаним із загальною кількістю гравітаційної потенційної енергії. Згідно із Encyclopedia of the Solar System (2015), нагадаємо, що на такі планети-гіганти, як Юпітер, Сатурн, Уран і Нептун, припадає 99,5 % усіх мас планет Сонячної системи. Гравітаційна потенціальна енергія цих зовнішніх планет становить 74,6 % усієї енергії планет, наведених у табл. 3. Одночасно кількість енергії всіх земних планет, ураховуючи Місяць, становить 25,4 % усієї енергії планет.

Висловлюючись математично, інші види виразів (27)–(28) для  $E$  дають чудову інтерпретацію відхилення роботи сили гравітації від нескінченного переходу до поверхні планети з мінімальним значенням  $W_{\min}$  (відповідає на першому кроці (27) та роботи гравітації), що має загальну масу Землі  $M$ , від стану нескінченної дифузії до її розподілу на поверхні планети  $\sigma$  [Thomson and Tait, 1883]. Стосовно ненульового інтеграла Діріхле у табл. 3 показано, що його значення  $\Delta W > 0$  для кожної планети істотно залежить від її радіуса. Якщо радіус менший, зменшується і вплив, що має просте пояснення. Справді, інтеграл Діріхле  $\Delta W$  (формула (28)) як другий етап відповідає роботі гравітації для транспортування мас, які мають загальну масу Землі  $M$ , “від стану нескінченної дифузії на поверхні планети  $\sigma$  до її фактичного стану всередині планети”. Тобто робота гравітації перенесення маси, що дорівнює загальній масі Землі  $M$ , відповідає формулі (29) та знову об'єднує визначення [Thomson and Tait, 1883] і сам перехід від стану нескінченної дифузії до фактичного розподілу всередині планети. Збільшення радіуса планети приводить до відповідного збільшення роботи сили гравітації. Такий стан речей можна змінити (через відповідні зміни  $\Delta W$ ) лише застосуванням різних законів густини, які краще апроксимують кусково-неперервний її розподіл. Однак використаний у роботі нормальний розподіл густини, на нашу думку, є одним із найкращих стосовно апроксимації та трансформації у метод скінченних елементів різних сегментів радіальних профілів густини.

### Список літератури

- Мещеряков Г. А. Про єдине розв'язання оберненої задачі теорії потенціалу. *Доповіді НАН України*. Київ, 1977, серія А, № 6, 492–495.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Ю. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
- Bullard, E. C. (1954). The interior of the Earth. In: *The Earth as a Planet* (G. P. Kuiper, ed.). Univ. of Chicago Press, 57–137.
- Bullen, K. E. (1975). *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London.
- Cottureau, L., & Souchay, J. (2009). Rotation of rigid Venus: a complete precession-nutation model. *Astronomy & Astrophysics*, 507(3), 1635–1648. DOI: 10.1051/0004-6361/200912174.
- Darwin, G. H. (1884). On the figure of equilibrium of a planet of heterogeneous density. *Proceeding of the Royal Society*, 36(228–231), 158–166.
- Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. (1981). Preliminary reference Earth model. *Physics of the earth and planetary interiors*, 25(4), 297–356. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).
- Encyclopedia of the Solar System (2015). Edited by Tilman Spohn, Doris Breuer, Torrence V. Johnson, 3<sup>rd</sup> ed., ELSELVER.
- Gauss, C. F. (1840, 1867). Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. In *Werke* (pp. 195-242). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Helled, R., Anderson, J. D., Schubert, G., & Stevenson, D. J. (2011, October). Constraining the Internal Structures of Jupiter and Saturn from Moments of Inertia Measurements: Implications for the Juno and Solstice Missions. Paper presented at the “European Planetary Science Congress”, Abstracts, Vol. 6, EPSC-DPS2011-52-2, EPSC-DPS Joint Meeting. <http://meetings.copernicus.org/epsc-dps2011>.
- Hikida, H., & Wieczorek, M. A. (2007). Crustal thickness of the Moon: New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models. *Icarus*, 192(1), 150–166. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.06.015>.
- Konopliv, A. S., Yoder, C. F., Standish, E. M., Yuan, D. N., & Sjogren, W. L. (2006). A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. *Icarus*, 182(1), 23–50. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.12.025>.
- Konopliv, A. S., Park, R. S., Yuan, D. N., Asmar, S. W., Watkins, M. M., Williams, J. G., ... & Zuber, M. T. (2014). High-resolution lunar

- gravity fields from the GRAIL primary and extended missions. *Geophysical Research Letters*, 41(5), 1452–1458. doi:10.1002/2013GL059066.
- Konopliv, A. S., Park, R. S., & Folkner, W. M. (2016). An improved JPL Mars gravity field and orientation from Mars orbiter and lander tracking data. *Icarus*, 274, 253–260. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.02.052>.
- Konopliv, A. S. (2016). Private communication.
- Lemoine, F. G., Goossens, S., Sabaka, T. J., Nicholas, J. B., Mazarico, E., Rowlands, D. D., ... & Zuber, M. T. (2014). GRGM900C: A degree 900 lunar gravity model from GRAIL primary and extended mission data. *Geophysical research letters*, 41(10), 3382–3389. <https://doi.org/10.1002/2014GL060027>
- Marchenko, A. N. (2000). Earth's radial density profiles based on Gauss' and Roche's distributions. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, 59(3), 201–220.
- Marchenko, A. N. (2009). The Earth's global density distribution and gravitational potential energy. In *Observing our Changing Earth*, 483–491. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Marchenko, A. N., & Zayats, A. S. (2011). Estimation of the gravitational potential energy of the earth based on different density models. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 55(1), 35–54. <https://doi.org/10.1007/s11200-011-0003-8>.
- Margot, J. L., Peale, S. J., Solomon, S. C., Hauck, S. A., Ghigo, F. D., Jurgens, R. F., ... & Campbell, D. B. (2012). Mercury's moment of inertia from spin and gravity data. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 117(E12). DOI:10.1029/2012JE004161.
- Mocquet, A., Rosenblatt, P., Dehant, V., & Verhoeven, O. (2011). The deep interior of Venus, Mars, and the Earth: A brief review and the need for planetary surface-based measurements. *Planetary and Space Science*, 59(10), 1048–1061. DOI:10.1016/j.pss.2010.02.002.
- Moritz, H. (1990). The figure of the Earth: theoretical geodesy and the Earth's interior. *Karlsruhe: Wichmann*.
- Neumann, G. A., Zuber, M. T., Wieczorek, M. A., Head, J. W., Baker, D. M., Solomon, S. C., ... & Kiefer, W. S. (2015). Lunar impact basins revealed by Gravity Recovery and Interior Laboratory measurements. *Science advances*, 1(9), e1500852. DOI: 10.1126/sciadv.1500852.
- Rubincam, D. P. (1979). Gravitational potential energy of the Earth: A spherical harmonic approach. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 84(B11), 6219–6225.
- Rappaport, N. J., Konopliv, A. S., Kucinskis, A. B., & Ford, P. G. (1999). An improved 360 degree and order model of Venus topography. *Icarus*, 139(1), 19–31.
- Rivoldini, A., Van Hoolst, T., & Verhoeven, O. (2009). The interior structure of Mercury and its core sulfur content. *Icarus*, 201(1), 12–30. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2008.12.020>.
- Seidelmann, P. K., Abalakin, V. K., Bursa, M., Davies, M. E., De Bergh, C., Lieske, J. H., Oberst, J., Simon, J. L., Standish, E. M., Stooke, P., Thomas, P. C. (2002). Report of the IAU/IAG working group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 2000. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 82(1), 83–110.
- Thomson, W., & Tait, P. G. (1883). *Treatise on Natural Philosophy*. Vol. 2, Cambridge University Press.
- Wermer, J. (1981). *Potential theory*, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Wieczorek, M. A., Neumann, G. A., Nimmo, F., Kiefer, W. S., Taylor, G. J., Melosh, H. J., ... & Zuber, M. T. (2013). The crust of the Moon as seen by GRAIL. *Science*, 339(6120), 671–675. DOI: 10.1126/science.1231530.
- Yoder, C. F. (1995). Venus' free obliquity. *Icarus*, 117(2), 250–286.
- Zuber, M. T., Solomon, S. C., Phillips, R. J., Smith, D. E., Tyler, G. L., Aharonson, O., ... & Zhong, S. (2000). Internal structure and early thermal evolution of Mars from Mars Global Surveyor topography and gravity. *Science*, 287(5459), 1788–1793. <https://doi.org/10.1126/science.287.5459.1788>

Alexander. N. MARCHENKO<sup>1</sup>, Serhii PERII<sup>2</sup>, Ivan POKOTYLO<sup>3</sup>, Zoriana TARTACHYNSKA<sup>4</sup>

Lviv Polytechnic National University, Institute of Geodesy, 6, Karpinsky Str., Lviv, 79013, Ukraine,  
e-mail: march@pancha.lviv.ua; periy\_ss@ukr.net; ivan.y.pokotylo@lpnu.ua; ztartachynska@yahoo.com;

<sup>1</sup> <https://orcid.org/0000-0002-9315-5903>

#### GRAVITATIONAL POTENTIAL ENERGY AND FUNDAMENTAL PARAMETERS OF THE TERRESTRIAL AND GIANT PLANETS

The basic goal of this study (as the first step) is to collect the appropriate set of the fundamental astronomic-geodetics parameters for their further use to obtain the components of the density distributions for the terrestrial and outer planets of the Solar system (in the time interval of more than 10 years). The initial data were adopted from several steps of the general way of the exploration of the Solar system by iterations through different spacecraft. The mechanical and geometrical parameters of the planets allow finding the solution of the inverse gravitational problem (as the second stage) in the case of the continued Gaussian density distribution for the Moon, terrestrial planets (Mercury, Venus, Earth, Mars) and outer planets (Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune). This law of Gaussian density distribution or normal density was chosen as a partial solution of the Adams-Williamson equation and the best approximation of the piecewise radial profile of the Earth, including the PREM model based on independent seismic velocities. Such conclusion already obtained for the Earth's was used as hypothetic in view of the approximation problem for other planets of the Solar system where we believing to get the density from the inverse gravitational problem in the case of the Gaussian density distribution for other planets because seismic information, in that case, is almost absent. Therefore, if we can find a stable solution for the inverse gravitational problem and corresponding continue Gaussian density distribution approximated with good quality of planet's density distribution we come in this way to a stable determination of the gravitational potential energy of the terrestrial and giant planets. Moreover to the planet's normal low, the gravitational potential energy, Dirichlet's integral, and other planets' parameters were derived. It should be noted that this study is considered time-independent to avoid possible time changes in the gravitational fields of the planets.

*Key words:* fundamental astronomic-geodetics parameters; solution of the inverse gravitational problem; Gaussian density distribution; Dirichlet's integral.

Надійшла 13.08.2021 р.