

Михайло ФИС<sup>1</sup>, Андрій БРИДУН<sup>2</sup>, Мар'яна ЮРКІВ<sup>3</sup>, Андрій СОГОР<sup>4</sup>, Юрій ГУБАР<sup>5</sup>

<sup>1-4</sup> Кафедра картографії та геопросторового моделювання, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, 79013, Україна. ел. пошта: <sup>1</sup> Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua; <sup>2</sup> Andrii.M.Brydun@lpnu.ua

<sup>3</sup> Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua; <sup>4</sup> Andrii.R.Sohor@lpnu.ua; <sup>1</sup> <https://orcid.org/0000-0001-8956-2293>; <sup>2</sup> <https://orcid.org/0000-0001-5634-0512>; <sup>3</sup> <https://orcid.org/0000-0002-2180-5583>; <sup>4</sup> <https://orcid.org/0000-0002-0084-9552>

<sup>5</sup> Кафедра кадастру територій, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: Yurii.P.Hubar@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-2538-0727>

<https://doi.org/10.23939/jgd2021.02.029>

## ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО МЕТОДУ ПОБУДОВИ ГРАДІЄНТА ТРИВИМІРНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ МАС НАДР ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ

Мета роботи – дослідити особливості реалізації алгоритму знаходження похідних просторової функції розподілу мас планети із залученням стоксових сталих високих порядків та на основі цього знайти її аналітичний вираз. За наведеною методикою виконати обчислення, за допомогою яких вивчити динамічні явища, що відбуваються всередині еліпсоїдальної планети. Запропонований метод передбачає визначення похідних функції розподілу мас сумою, коефіцієнти якої отримують із системи рівнянь, яка є некоректною. Для її розв'язування використано стійкий до похибок метод обчислення невідомих. Побудову реалізовано ітераційним способом, а за початкове наближення взято тривимірну функцію густини мас Землі, побудовану за стоксовими сталими до другого порядку включно, динамічним стисненням із одновимірним розподілом густини та визначено коефіцієнти розкладу похідних функції за змінними  $x, y, z$  до третього порядку включно. На їх підставі встановлено відповідну функцію густини, яку надалі взято як початкову. Процес повторюється до досягнення заданого порядку апроксимації. Для отримання стійкого результату використано метод підсумування Чезаро (метод середніх). За допомогою програм, що реалізують наведений алгоритм, виконано розрахунки із досягненням високого (дев'ятого) порядку отримання членів суми обчислень. Досліджено збіжність суми ряду та на цій основі зроблено висновок про доцільність використання узагальненого знаходження сум на основі методу Чезаро. Вибрано оптимальну кількість утриманих членів суми, що забезпечує збіжність як для функції розподілу мас, так і для її похідних. Виконано обчислення відхилень розподілу мас від середнього значення ("неоднорідностей") для екстремальних точок земного геоїда, які здебільшого показують сумарну компенсацію вздовж радіуса Землі. Для таких тривимірних розподілів виконано обчислення та побудовано картосхеми за врахованими значеннями відхилень тривимірних розподілів від середнього ("неоднорідностей") на різних глибинах, які відображають загальну структуру внутрішньої будови Землі. Наведені вектор-схеми горизонтальних компонент градієнта густини на характерних глибинах (2891 км – ядро – мантія, 700 км – середина мантії, а також верхня мантія – 200, 100 км) дають підстави зробити попередні висновки про глобальні переміщення мас. На межі "ядро–мантія" спостерігається замкнений контур, що є аналогією замкненого електричного кола. Для менших глибин вже відбувається диференціація векторних рухів, що дає змогу сподіватись, що ці векторграми можна використати для дослідження динамічних рухів всередині Землі. По суті вертикальна компонента (похідна за змінною  $z$ ) спрямована до центра мас та підтверджує основну властивість розподілів мас – зростання із наближенням до центра мас. Застосовано методику стійкого розв'язування некоректних лінійних систем, за допомогою якої побудовано вектор-грами градієнта функції розподілу мас. Характер таких схем дає інструмент для визначення можливих причин перерозподілу мас усередині планети та виявлення можливих чинників тектонічних процесів всередині Землі, тобто опосередковано підтверджується гравітаційна конвекція мас. Запропоновану методику можна використовувати для створення детальних моделей функцій густини та визначення характеристик (похідних) мас надр планети, а результати числових експериментів – для розв'язання задач тектоніки.

*Ключові слова:* некоректна задача; метод Фаєра – Чезаро; Земля; модель PREM; стоксові сталі.

### Вступ

Визначальною характеристикою структури внутрішньої будови Землі є функція розподілу мас її надр. Саме вона є вичерпним чинником для формування властивостей земної речовини та в

комплексі з фігурою планети утворює зовнішнє гравітаційне поле, якому притаманна просторова залежність (тривимірність). Вона не може бути наслідком дії реальних одновимірних моделей густини розподілу мас, використовуваних у гео-

фізиці. Адже створені із використанням даних сейсмології радіальні моделі розподілу надр планети передбачають використання тільки стоксових сталих нульового та другого порядків (маса, момент інерції) [Dziewonski & Anderson, 1981]. Сьогодні найчастіше використовують стандартну модель, PREM [Dziewonski & Anderson, 1981], яка загалом характеризує внутрішню будову планети, а тому може бути основою подальших побудов тривимірних моделей густини із використанням коефіцієнтів розкладу гравітаційного поля вищих порядків. [Церклевич та ін., 2012]. У такому формулюванні розв'язати задачу можливо тільки наближено та ітераційно. За нульове наближення значення, зазвичай, беруть тривимірну модель густини [Мещеряков, Фис, 1986], побудовану на основі однієї зі стандартних моделей, наприклад, PREM [Dziewonski & Anderson, 1981] та узгоджену зі стоксовими сталими до другого порядку включно та динамічним стисненням. Урахування коефіцієнтів розкладу потенціалу до визначеного порядку [Мещеряков, Фис, 1986] породжує ітераційну схему побудови таких моделей, що доволі детально відображають характер розподілу мас планети [Мещеряков, Фис, 1990].

Динаміка явищ, що відбуваються всередині Землі, передбачає і зміну розподілу мас як по радіусу, так і у широто-довготному простиланні, тобто градієнт зміни густини також є об'ємною функцією трьох координат. Дослідження в цьому напрямі практично не проводились та стосуються переважно зміни функції розподілу по радіусу. Можливість широтно-довготної змін лише дискутувалась. Тому, враховуючи ефективність наближення функції сумою відповідних многочленів [Мещеряков та ін. 1986; Мещеряков та ін. 1990], природно застосувати його не тільки до самої функції розподілу мас, але і до її похідних. У цій роботі зроблено спробу такої адаптації. Розглянутий метод також є наближенням, яке частково можна оцінити (використовуючи значення величин на поверхні Землі), що дає можливість аналізувати ітераційний процес. Побудовані за допомогою запропонованого методу похідні функції розподілу є інформативнішими та дають детальнішу картину розподілу мас планети, зокрема і можливих їх переміщень всередині Землі, а отримана модельна функція дає картину розподілу мас. Картосхеми для вертикальної похідної

підтверджують зростання функції розподілу мас зі збільшенням глибини в середині планети.

### Мета

Запропонувати та дослідити методику стійкої побудови похідних тривимірної функції розподілу мас планети разом з урахуванням стоксових сталих високих порядків; на її основі вивчити внутрішню будову Землі та можливі переміщення мас у середині планети.

### Методика роботи

#### Основні засади наближеного методу побудови градієнта та функції розподілу надр мас еліпсоїдальної планети.

Використати представлення за системами біортогональних систем для похідних функції розподілу мас надр планети запропоновано в роботі [Fys M., et al., 2020]. Суть цього методу полягає у поданні зображення кускових неперервних похідних функцій густини за допомогою ортогональних систем (пізніше біортогональних  $\{W_{mnk}\}, \{\omega_{mnk}\}$ ) многочленів трьох змінних в еліпсоїді  $\tau: \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 \right\}$ , а саме:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{1}{a_e} \sum_{t-m+n+k=0}^N a_{mnk}^i W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

де

$$a_{mnk}^s = \frac{\int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \omega_{mnk} d\tau}{\int_{\tau} \omega_{mnk} W_{mnk} d\tau}, \quad (2)$$

та є лінійною комбінацією певних величин (степеневих моментів функції розподілу мас надр планети):

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \int_{\tau} x_1^p x_2^q x_3^s \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau, \quad p+q+s=t, \quad (3)$$

де  $M$  – маса планети,  $a_e$  – екваторіальний радіус Землі – півосі еліпсоїда  $a_1, a_2, a_3$ .

Величини (3) (степеневі моменти похідних) визначають через степеневі моменти функції густини  $\delta$  за допомогою формули Остроградського:

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \left( -p \int_{\tau} x_1^{p-1} x_2^q x_3^s \delta d\tau + \iint_{\sigma} x_1^p x_2^q x_3^s \delta(x_1, x_2, x_3) \cos \alpha_i d\sigma \right), \quad (4)$$

де  $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$  – вектор нормалі до поверхні еліпсоїда, компоненти якого такі

$$\cos \alpha_i = \frac{x_i}{D(x_1, x_2)}, \quad i=1, 2, \quad \cos \alpha_3 = \frac{1}{D(x_1, x_2)},$$

$$x_3 = \pm a_3 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}} = f(x_1, x_2),$$

$$D(x_1, x_2) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}. \quad (5)$$

Подання поверхні еліпсоїда у формулах (5) можна розглядати і в іншому вигляді, наприклад, виразити  $x_1$  через  $x_2, x_3$ .

Отже, величини (4) визначаються через степеневі моменти функції густини  $\delta$ , порядок яких на одиницю менший, ніж у (3), та вирази [Fys, et al., 2020].

$$\begin{aligned} \sigma_{pqs} &= \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{\sigma} x_1^p x_2^q x_3^s \delta \cos \alpha_i d\sigma, = \\ &= \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{\sigma} x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_3^{s_1} \delta \frac{d\sigma}{D(x_2, x_3)}, \end{aligned} \quad (6)$$

Степеневі моменти визначають із системи рівнянь, яку отримують із виразу для сферичних функцій (Fys, et al., 2021):

$$C_{nk} + iS_{nk} = \frac{RR(n-k)! \left[\frac{n-k}{2}\right] (-1)^m \int x_3^{n-k-2m} (x_1^2 + x_2^2)^m (x_1 + ix_2) d\tau}{2^k \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{\tau}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!}} = \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) I^{pqs},$$

(7)

Система рівнянь, якщо  $n > 2$ , неоднозначна та може бути розв'язана із виконанням додаткових умов (наприклад, за умови найменших квадратів). Степеневі моменти густини до другого порядку включно визначають за даними спостережень, а тому їх можна використати для визначення значень  $I_{pqs}^i$  за формулою (4) вже до третього порядку включно. Однак виникає потреба у визначенні додаткових величин  $\sigma_{pqs}$ , що входять в перетворення, – стоксових сталих у такий спосіб:

$$\begin{cases} C_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left( C_{nk}^* + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right), \\ S_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left( S_{nk}^* + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right), \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{де } C_{nk}^* = -\int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau, \quad S_{nk}^* = -\int_{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau,$$

$U_{nk}^i = \int_0^{x_i} U_{nk} dx_i, \quad V_{nk}^i = \int_0^{x_i} V_{nk} dx$  – первісні кульових функцій (многочлени  $n+1$  порядку за змінними  $x_1, x_2, x_3$ ).

Сукупність рівнянь (8) доповнюємо тотожностями:

$$\sigma_{p+2,q,s} + \sigma_{h,q+2,s} + \sigma_{p,q,s+2} = \sigma_{pqs},$$

які в символічній формі можна подати так:

$$\left( \sigma_{p00} + \sigma_{0q0} + \sigma_{00s} \right)^{2t} = \sigma_{pqs}, \quad p, q, s = 0 \text{ або } 1 \quad (9)$$

де

$$\left( \sigma_{p00} \right)^i \left( \sigma_{0q0} \right)^j \left( \sigma_{00s} \right)^l = \sigma_{p+2i, q+2j, s+2l},$$

$$i + j + l = t.$$

Система рівнянь (8) розпадається на чотири групи із відповідною кількістю рівнянь та невідомими (табл. 1)

$$\begin{aligned} \text{I. } & \sigma_{00n}, \sigma_{20n-2}, \sigma_{02n-2}, \sigma_{40n-4}, \sigma_{22n-4}, \sigma_{04n-4}, \dots, \sigma_{n-T0T}, \dots, \sigma_{T,n-T,T}, \\ \text{II. } & \sigma_{10n-1}, \sigma_{30n-3}, \sigma_{12n-2}, \sigma_{50n-5}, \sigma_{32n-5}, \sigma_{14n-5}, \dots, \sigma_{n-T0T}, \dots, \sigma_{Tn-T,T}, \\ \text{III. } & \sigma_{01n-1}, \sigma_{21n-3}, \sigma_{03n-3}, \sigma_{41n-5}, \sigma_{23n-5}, \sigma_{05n-5}, \dots, \sigma_{n-T,T,T}, \dots, \sigma_{Tn-T,T}, \\ \text{IV. } & \sigma_{01N-1}, \sigma_{21N-3}, \sigma_{03N-3}, \sigma_{40N-}, \sigma_{22N-4}, \sigma_{04N-4}, \dots, \sigma_{N-T0T}, \dots, \sigma_{TN-T,T}, \\ & T = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (10)$$

Таблиця 1

**Формули кількості рівнянь та кількості невідомих кожної групи (10)**

Назва	Кількість рівнянь $r$	Кількість невідомих $t$
I	$3\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$	$\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)$
II,III,IV( $n$ – парне)	$3\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)$	$\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+3\right)$
IV( $n$ – непарне)	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$t_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

Відповідно до цього системи запишуться:

$$B_i = A_i X_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (11)$$

де  $B_i$  – матриці розмірності  $r \times n$ , елементи яких

є коефіцієнтами при степенях  $x, y, z$  відповідних кульових функцій.

Аналізуючи формули табл. 1, можна встановити кількість рівнянь та ранг кожної із систем, за допомогою яких визначається розв’язок.

Таблиця 2

**Кількість рівнянь та невідомих кожної групи (10) для різних порядків**

Порядок	$n$ група	К-ть р-нь	К-ть невідомих	Ранг системи	Порядок	$n$ група	К-ть р-нь	К-ть невідомих	Ранг системи
2	I	7	6	6	5	I	10	10	9
	II	3	3	3		II	10	10	9
	III	3	3	3		III	10	10	9
	IV	3	3	3		IV	7	6	6
3	I	7	6	6	6	I	13	15	10
	II	7	6	6		II	10	10	10
	III	7	6	6		III	10	10	10
	IV	1	1	1		IV	10	10	10
4	I	10	10	8	7	I	13	15	12
	II	7	6	6		II	13	15	11
	III	7	6	6		III	13	115	11
	IV	7	6	6		IV	10	10	10
8	I	16	21	11	8	III	13	15	12
	II	13	15	10		IV	13	15	10

Як видно з табл. 2, неоднозначність розв’язку виникає, тільки якщо  $n = 4$  (перша група), а це, безперечно, перевага запропонованого методу. Для цього ж випадку та порядків, вищих від четвертого, система (8) має безліч розв’язків. Загалом прийнято шукати такий розв’язок, який має властивість мінімального відхилення від нуля (в літературі відомий під назвою “псевдорозв’язок”). Такий розв’язок є узагальненням звичайного, бо збігається з ним у разі однозначності системи. Наведемо один із відомих алгоритмів знаходження узагальненого розв’язку системи рівнянь:

1. Зводимо систему до нормального вигляду

$$B_i^T B_i = B_i^T A_i X_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$A_i' = B_i^T B_i, \quad b_i = B_i^T A_i$$

$$A_i' X = b_i, \quad m = n, \quad (12)$$

$$\det(A_i') = 0 \quad (\det(A_i') \approx 0),$$

$$r = \text{rang}(A_i') \leq n$$

2. Розв’язок системи (12) визначається послідовністю матричних операцій [Сявавко, Рибицька, 2000]

$$s_1 = Sp(A'_i) = \sum_{i=1}^n a'_{ij}, \quad C_0 = E, \quad E - \text{одична матриця},$$

$$C_1 = C_0 A'_i + s_1 E, \quad s_2 = \frac{1}{2} Sp(C_1 A'_i),$$

...

$$C_{r-1} = C_{r-2} A'_i + s_{r-1} E, \quad s_{r-1} = \frac{1}{r-1} Sp(C_{r-2} A'_i),$$

$$s_r = \frac{1}{r} Sp(C_{r-1} A'_i), \quad X = \frac{1}{s_r} C_{r-1} b'_i \quad (13)$$

Вираз функції густини надр планети невідомий, тому можна визначити лише наближені значення  $\sigma_{pqs}$  (6). Крім того, у разі збільшення порядку апроксимації кількість невідомих може перевищувати кількість рівнянь, а тому отримані результати

необхідно трактувати з урахуванням допущених умов, за допомогою стоксових сталих вищих порядків ( $t > 2$ ) можливо лише наближено [Мещеряков, 1990; Мещеряков та ін. 1986].

Виділимо кроки виконання алгоритму.

Не маючи точного виразу функції розподілу, вибираємо її тривимірне наближення  $\delta_2$ , взяте із роботи (Fys, et al., 2020)

$$\delta_2(x_1, x_2, x_3) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^2 b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3) \quad (14)$$

де  $\delta^0(\rho)$  – одновимірна сферична модель розподілу мас (для Землі – це референтна модель PREM [Dziewonski & Anderson, 1981].

Коефіцієнти розкладу (12) визначаємо за формулами:

$$b_{000} = \delta_c \left( 1 - \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right) \quad b_{110} = 35\delta_c S_{21}, \quad b_{101} = 35\delta_c C_{21}, \quad b_{011} = 35\delta_c S_{21},$$

$$b_{200} = \frac{7}{2} \delta_c \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} + 2C_{22} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right],$$

$$b_{020} = \frac{7}{2} \delta_c \left[ 5 \left( \frac{-C_{20}}{2H} - 2C_{22} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \quad (15)$$

$$b_{002} = \frac{7}{2} \delta_c \left[ 5 \left( 1 - \frac{1}{2H} \right) C_{20} - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + 3 \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right]$$

Степеневі моменти густини другого порядку обчислюємо так (Мещеряков, 1991)

$$I_{200} = \frac{-C_{20}}{2H} + 2C_{22}, \quad I_{020} = \frac{-C_{20}}{2H} - 2C_{22},$$

$$I_{002} = C_{20} \left( 1 - \frac{1}{2H} \right), \quad I_{101} = C_{21},$$

$$I_{011} = S_{21}, \quad I_{110} = \frac{1}{2} S_{22}. \quad (16)$$

Для таких допущень система (8) за умови (9), якщо  $n = 1, 2$ , дає однозначно значення  $\sigma_{pqs}$ . Їх також можна обчислити для функції  $\delta_2$  безпосередньо за формулами:

$$\sigma_{pqs} = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{D_{x_2, x_3}^+} x_1^{p-1} x_2^q x_3^s \delta_2 dx_2 dx_3 + \iint_{D_{x_2, x_3}^-} x_1^{p-1} x_2^q x_3^s \delta_2 dx_2 dx_3 \quad (p > 0),$$

$$\sigma_{pqs} = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{D_{x_1, x_3}^+} x_1^p x_2^{q-1} x_3^s \delta_2 dx_2 dx_3 + \iint_{D_{x_1, x_3}^-} x_1^p x_2^q - 1 x_3^s \delta_2 dx_2 dx_3 \quad (q > 0), \quad (17)$$

$$\sigma_{pqs}^3 = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{D_{x_1, x_2}^+} x_1^p x_2^q x_3^{s-1} \delta_2 dx_2 dx_3 + \iint_{D_{x_1, x_2}^-} x_1^p x_2^q x_3^{s-1} \delta_2 dx_2 dx_3 \quad (s > 0),$$

Вираз  $\delta_2$  на поверхні еліпсоїда:

$$\delta_2 = b_{000} + b_{200} x_1^2 + b_{020} x_2^2 + b_{002} x_3^2 + 2(b_{110} x_1 x_2 + b_{101} x_1 x_3 + b_{011} x_2 x_3) + b_{100} x_1 + b_{010} x_2 + b_{001} x_3, \quad (18)$$

це дає змогу обчислити (17) безпосередньо (коефіцієнт  $b_{000}$  збігається зі значенням густини в центрі мас [Фис та ін., 2013]).

Тому безпосереднє обчислення значень поверхневих степеневих моментів через коефіцієнти

розкладу після підстановки (18) в один із виразів (17) дає:

$$\sigma_{200} = \frac{\delta_c (5b_{000} + (3b_{200} + b_{020} + b_{002}))}{5},$$

$$\sigma_{020} = \frac{\delta_c (5b_{000} + (b_{200} + 5b_{020} + b_{002}))}{5},$$

$$\sigma_{002} = \frac{\delta_c (5b_{000} + (b_{200} + b_{020} + 3b_{002}))}{5}.$$

Користуючись тотожністю (9), якщо  $t = 1$ , визначаємо  $\sigma_{000}$ , а саме:

$$\sigma_{000} = \sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002}$$

Степеневі моменти першого порядку визначаємо так:

$$\sigma_{100} = b_{100}V, \quad \sigma_{010} = b_{010}V, \quad \sigma_{001} = b_{001}V.$$

За допомогою стоксових сталих першого порядку встановлюємо значення  $\sigma_{pqs}$  ( $p + q + s = 3$ ):

$$\sigma_{120} = \sigma_{102} = \frac{b_{100}V}{10}, \quad \sigma_{210} = \sigma_{021} = \frac{b_{010}V}{10},$$

$$\sigma_{201} = \sigma_{021} = \frac{b_{001}V}{10}, \quad \sigma_{300} = \frac{b_{100}V}{5},$$

$$\sigma_{030} = \frac{b_{010}V}{5}, \quad \sigma_{003} = \frac{b_{100}V}{5}.$$

У разі розміщення початку системи координат у центрі мас із наведених вище співвідношень одержуємо, що  $\sigma_{pqs} = 0$ , ( $p + q + s = 3$ ). Відтак маємо:

$$\sigma_{100} = \sigma_{300} + \sigma_{120} + \sigma_{102} = \frac{2b_{100}V}{5},$$

$$\sigma_{010} = \sigma_{030} + \sigma_{210} + \sigma_{012} = \frac{2b_{010}V}{5},$$

$$\sigma_{001} = \sigma_{003} + \sigma_{201} + \sigma_{021} = \frac{2b_{001}V}{5}.$$

Непарні величин  $\sigma_{pqs}$  четвертого порядку ( $\mathbb{P}$ , або  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{S}$  – непарні) визначаються стоксовими

сталими  $C_{21}, S_{22}$ :

$$\sigma_{400} = V \left( \frac{b_{000}}{5} + \frac{3b_{200}}{35} + \frac{b_{020}}{35} + \frac{b_{002}}{35} \right),$$

$$\sigma_{004} = V \left( \frac{b_{000}}{5} + \frac{3b_{002}}{35} + \frac{b_{020}}{35} + \frac{b_{200}}{35} \right),$$

$$\sigma_{040} = V \left( \frac{b_{000}}{5} + \frac{3b_{020}}{35} + \frac{b_{200}}{35} + \frac{b_{002}}{35} \right),$$

$$\sigma_{220} = V \left( \frac{b_{000}}{5} + \frac{3b_{200}}{35} + \frac{3b_{020}}{35} + \frac{b_{002}}{35} \right),$$

$$\sigma_{202} = V \left( \frac{b_{000}}{5} + \frac{3b_{200}}{35} + \frac{b_{020}}{35} + \frac{3b_{002}}{35} \right),$$

$$\sigma_{022} = V \left( \frac{b_{000}}{5} + \frac{b_{200}}{35} + \frac{3b_{020}}{35} + \frac{3b_{002}}{35} \right)$$

з тотожності (9) та за допомогою цих співвідношень одержуємо

$$\sigma_{130} = V \frac{3b_{110}}{40}, \quad \sigma_{103} = V \frac{3b_{101}}{40}, \quad \sigma_{112} = \sigma_{121} = 0,$$

$$\sigma_{031} = V \frac{3b_{011}}{40}, \quad \sigma_{013} = \sigma_{013} = V \frac{3b_{011}}{40}, \quad \sigma_{121} = \sigma_{112} = 0.$$

За відомими значеннями  $\sigma_{pqs}$  та  $I_{pqs}$  за формулами (4) знаходимо  $I_{pqs}^i$ . Як і в роботі (Fys, et al., 2020), тепер визначаємо  $\frac{\partial \delta_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \delta_3}{\partial x_2}, \frac{\partial \delta_3}{\partial x_3}$ .

За допомогою похідних встановлюємо вигляд наближеного виразу функції розподілу мас  $\delta_4$ , який підставляємо як початковий.

3. Степеневі моменти густини  $\delta$  в цьому випадку обчислюємо за такою формулою:

$$I_{pqs}^* = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \int x_1^p x_2^q x_3^s \delta_N d\tau.$$

Таке наближення дає можливість спростити обчислення виразів (8) системи (7), яка набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} C_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left( C_{nk}^{**} + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right) \\ S_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left( S_{nk}^{**} + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right) \end{cases}, \quad (19)$$

де

$$C_{nk}^{**} = -\int \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau + \iint \delta_N U_{nk}^i d\sigma = \int \delta_N U_{nk} d\tau,$$

$$S_{nk}^{**} = -\int \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau + \iint \delta_N V_{nk}^i d\sigma = \int \delta_N V_{nk} d\tau.$$

Таке трактування обґрунтовує незначні відхилення від нуля величин  $\Delta \sigma_{pqs}$  та дає основу для застосування методики (13) розв'язування системи рівнянь (19). Крім того, за такого підходу істотно спрощується обчислення коефіцієнтів розкладу (1)  $a_{mn}^i$ , які не змінюються, коли  $m + n + k < N$ , а обчислюються, якщо  $m + n + k = N$ , за формулою

$$a_{mnk}^i = \sum_{p+q+s \leq t} d_{pqs}^i I_{pqs}^i = \sum_{p+q+s \leq t} d_{pqs}^i I_{pqs}^{i*} + \sum_{p+q+s=t} d_{pqs}^i \Delta \sigma_{pqs} = \frac{(2t+1)!!}{t!} \Delta \sigma_{pqs}.$$

Враховано, що

$$(a_{mnk}^i)^* = \sum_{p+q+s \leq t} d_{pqs}^i (I_{pqs}^i)^* = 0.$$

За вказаною методикою визначаємо  $\delta_6$ .

4. Ітераційний процес повторюємо до наперед встановленого порядку апроксимації  $N_k$ .

**Результати**

**Дослідження удосконалення методу та інтерпретація числового експерименту**

Для виконання обчислень використаємо інформацію про гравітаційне поле із роботи [Pavlis et al., 2008], динамічне стиснення, прийняте в астрономії [Яцкив, 1980], фігуру за рекомендованим Геодезичним союзом [Mogitz, 1979] та радіальним розподілом мас [Дзевонський] (або фіксованим значенням у центрі Землі [Фис, et al., 2018]. Утримуючи стоксові сталі, одержані до восьмого порядку включно, отримуємо модельні функції похідних за прямокутними координатами та функцію розподілу мас за ними до десятого порядку.

Виконання програми на основі описаного алгоритму дає підстави зробити деякі висновки.

Проаналізуємо результати обчислень. Метод передбачає деякі удосконалення наведеного в роботі [Fys, 2020] алгоритму та виправлення недоліків, виявлених під час його реалізації. Узагальнення стосуються насамперед побудови матриці зв'язків  $A_i$  з (17) та отримання наближеного розв'язку (17) незалежно від умов його існування. Порівняння результатів обчислень за різними способами дає подібні результати, тому застосування наведеного алгоритму обгрунтоване.

На основі наведеної методики побудовано тривимірну модель густини  $\delta_9$  із залученням стоксових сталих до восьмого порядку включно, яка зберігає всі основні властивості референтної моделі PREM: величини стрибків та глибину їх залягання, характер зміни густини за відносним радіусом. До того ж, на відміну від моделі  $\delta_2$ , відхилення густини  $\delta_9$  від усередненого значення є інформативнішими, тобто дають детальнішу картину розміщення мас. Разом із тим, збільшення порядку апроксимації супроводжується нестабільністю обчислень. Тому для отримання стійких результатів застосуємо узагальнений метод підсумування середніми (метод Чезаро [Korn G. A., Korn T. M., 2000]). Розглянемо його суть. Для суми

$$\delta_N = c_0 + c_1 + \dots + c_N = \sum_{i=0}^N c_i$$

визначаємо як границю послідовності

$$\delta_l = \sum_{i=0}^l \left(1 - \frac{i}{l+1}\right) c_i, s = \lim_{l \rightarrow \infty} \delta_l$$

На двох характерних точках (індійський мінімум – точка 2, біля Великобританії – точка 3) виконано обчислення аномалій функції густини (відхилень від середнього значення), які визначають так:

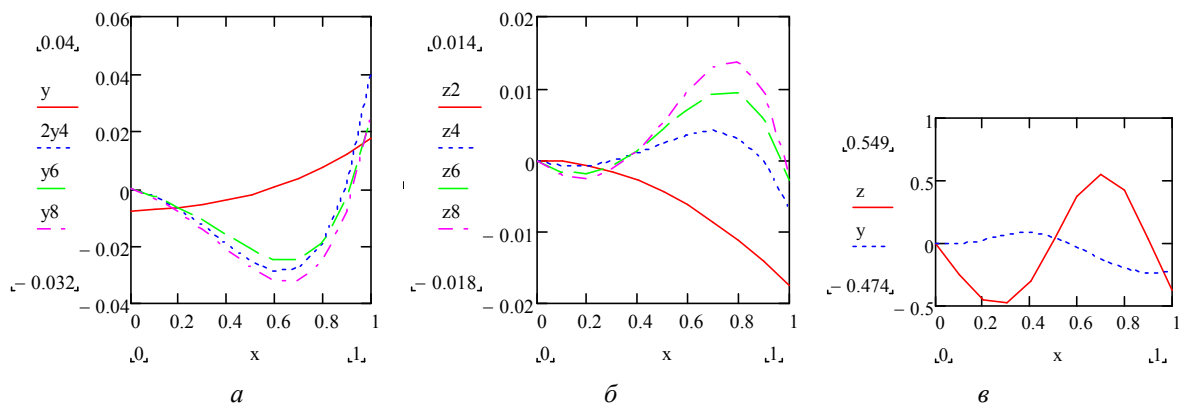
$$\Delta\delta_N = \delta_N(x, y, z) - \delta_N(\rho),$$

де  $\delta_N(\rho)$  – усереднене на “одиничній” сфері значення тривимірної функції розподілу мас. Для них наведено графіки для різних порядків утримання підсумування (рис. 1).

Таблиця 3

**Геодезичні координати основних характерних точок геоїда Землі (Мещеряков, 1991)**

Номер точки	Висоти геоїда	Широта, град	Довгота, град	Географічне розміщення
1	78	-3	145	Біля Нової Гвінеї
2	-110	5	79	В Індійському океані
3	70	50	-10	Біля Великобританії
4	30	30	-70	Біля берегів Багамів
5	56	-55	50	Біля Антарктиди
6	-56	20	-120	На сході Тихого океану

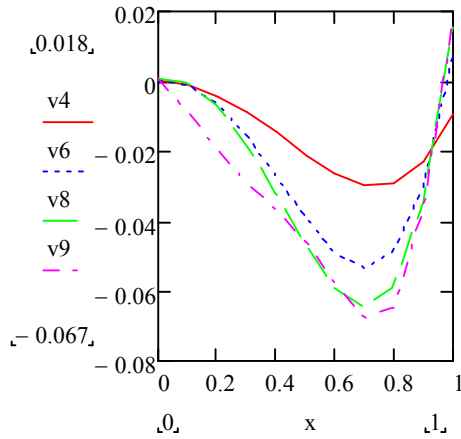


**Рис. 1.** Графіки залежності аномалій від порядку утримання суми для двох характерних напрямків

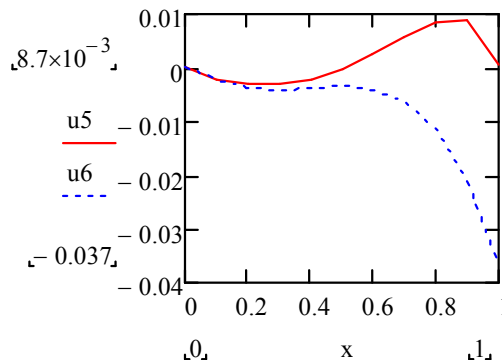
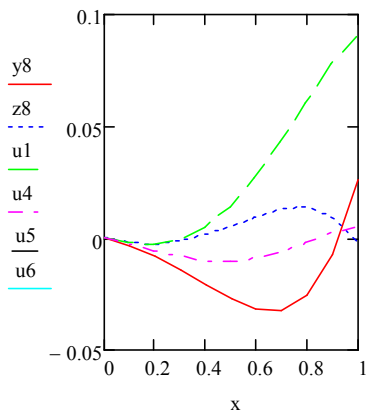
Як видно із рис. 1, простежується чітке уточнення зі зростанням порядку підсумування до восьми. А вже далі збільшення номера підсумування призводить до спотворених результатів, що відображено графіком (рис. 1, в). Це може бути наслідком того, що на функцію густини не накладено ніякі умови (створювались функції похід-

них). Тому в подальших дослідженнях обмежуватимось числом 8. Для підтвердження такого припущення побудуємо ще графіки залежностей для однієї із похідних.

Для характерних точок із табл. 3 будемо графіки розподілу аномалій вздовж радіуса та зобразимо їх на рис. 3.



**Рис. 2.** Графік залежності вздовж радіуса похідної  $\frac{\partial \delta_l}{\partial x_1}$  від порядку утримання суми для точки 1 (табл. 3)



**Рис. 3.** Графіки аномалій густини для порядку утримання суми числом 8 для характерних напрямків із табл. 3

Як видно з рис. 3, вздовж по радіусу кожної з точок від'ємні маси на одній глибині компенсуються додатними аномаліями на інших глибинах. Дещо не відповідає цій схемі графік функції для точки 4, на якому така закономірність не спостерігається.

Так, на різних глибинах спостерігається перерозподіл мас. Для цього побудовано карти, що відображають похідні функції густини (по суті – це градієнт) на різних шарових поверхнях. За характером поведінки можна зробити важливий висновок про спадання функції (рис. 4, а; 5, а; 6, а), густини зі збільшенням радіуса ( $\frac{\partial \delta_l}{\partial x_3}$ , а фактично

латів геофізики. Компоненти градієнта густини  $\frac{\partial \delta}{\partial x_1}, \frac{\partial \delta}{\partial x_2}$  характеризують горизонтальні перемі-

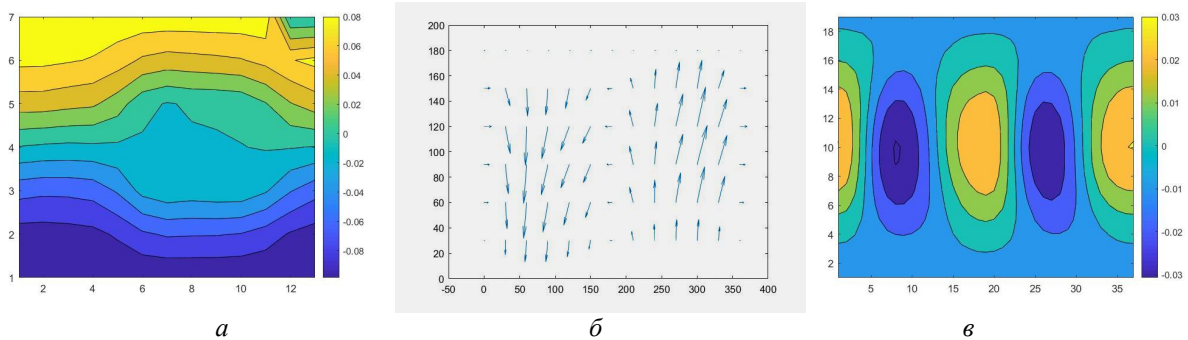
щення. Їх найкраще зобразити у вигляді векторграм, в яких відображаються напрямки горизонтальних переміщень, що наочно проілюстровано картою на рис. 4, б; 5, б; 6, б (глибина 5150 км, границя внутрішнє – зовнішнє ядро) та на рис. 3 (глибина 2891 км). Проте за картами простежується властивість переміщення мас у бік поверхні, причина якої – обертовий рух планети. Характерно, що такі скупчення спостерігаються по всьому радіусу Землі, натомість поблизу осі обертання – розрідження мас із глибиною. Це проілюстровано картою ізоденс на рис. 2. На гли-

$\frac{d\delta}{dr}$ ), що підтверджує один із основних посту-

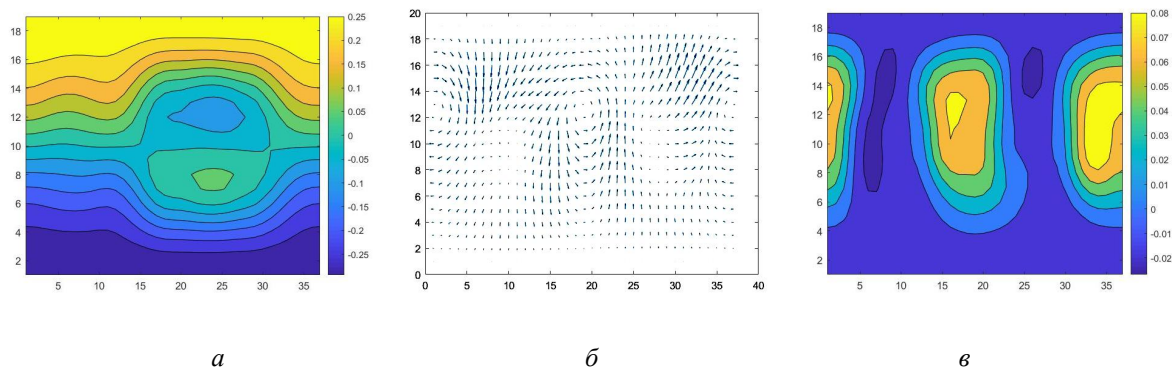


бині 5150 км (границя внутрішнє – зовнішнє ядро) та на рис. 3 (глибина 2891 км, границя ядро – мантія) переміщення здійснюються від північного до південного полюса та утворюють замкнений контур, що імітує електричне поле та може бути пов’язано з теорією магнетизму. Характерно, що у вищих оболонках таке явище відсутнє. Наприклад, на картосхемі глибини 700 км (рис. 5, б) векторна діаграма втрачає глобальність, на ній з’являються райони, пов’язані із ущільненням та розрідженням

мас. Зважаючи на це, можна стверджувати, що ця методика застосовна для дослідження внутрішньої будови Землі. Карти розподілу мас, наведені на рис. 4, в; 5, в; 6, в, відображають глобальний характер густини, а тому їх не можна повною мірою використовувати для дослідження Землі. Низька їх інформативність пояснюється все ж невисоким порядком використаних стоксових сталих та запропонованою методикою (дослідження похідних).



**Рис. 4.** Карта ізолій похідної за змінною  $x_3$  (а) аномалій густини земних надр на глибині 2891 км (в), векторне подання похідних  $x_2, x_3$  (б)



**Рис. 5.** Карта ізолій похідної за змінною  $x_3$  (а) аномалій густини земних надр на глибині 700 км (в) із векторним поданням похідних  $x_2, x_3$  (б)

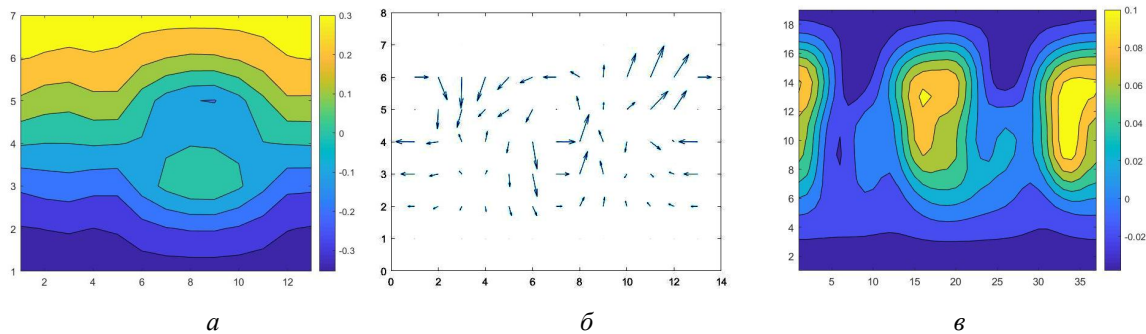
Аналогічно виконаємо обчислення та наведемо відповідні ілюстрації для глибини 200 км (рис. 6–7). Вибір такого значення зумовлений розміщенням об’єктів дослідження всередині мантії та їх можливим впливом на геодинамічні процеси Землі.

Відзначимо найістотніші особливості наведених результатів. Рис. 4–7 відображають картину розподілу аномалій похідних густини по осі  $Ox_3$  (у певному сенсі – вертикальної похідної). З рис. 4–7 зрозуміло, що градієнт аномалій густини спрямований до центра мас, адже для двох глибин (рис. 4–7) для  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  кут між ним та віссю

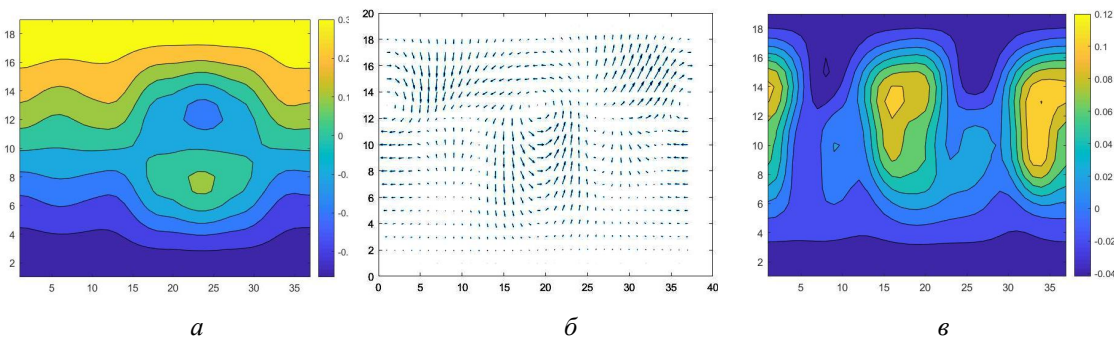
$Ox_3$  тупий, а для проміжку  $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$  гострий.

Цікава вузлова точка на рис. 2 з приблизними координатами  $\vartheta = 120^\circ, \lambda = 120^\circ$ , яку можна трактувати як точку стискання та розтягу в різні сторони. Цікаво, що вона потрапляє в область взаємодії аравійської та африканської тектонічних плит. Очевидно, що детальніша інтерпретація потребує інших способів комплексного подання інформації, наприклад, ілюстрування сумарної дії похідних за змінними  $x_1, x_2$ .

Спробу такого підходу наведено на рис. 4–7. Навіть перший його крок виявляє певні особливості, а саме: перерозподіл мас на межі “ядро – мантія” здійснюється від південного до північного полюса, що збігається із дією сили магнітного поля. Характерно, що в другому випадку картина руху зовсім інша, і її можна пов’язати із тектонічними рухами.



**Рис. 6.** Карта ізоліній похідної за змінною  $x_3$  (а) аномалій густини земних надр на глибині 200 км (в) із векторним поданням похідних  $x_2, x_3$  (б)



**Рис. 7.** Карта ізоліній похідної за змінною  $x_3$  (а) аномалій густини земних надр на глибині 100 км (в) із векторним поданням похідних  $x_2, x_3$  (б)

**Висновки**

1. Удосконалено метод наближеної побудови похідних функції розподілу мас Землі для високих порядків коефіцієнтів розкладу гравітаційного поля планети.
2. Отримано стійкий розв’язок рівнянь для знаходження коефіцієнтів розкладу в ряд похідних та самої функції із використанням методу Чезаро.
3. Вектор-схеми, побудовані на межі “ядро – мантія”, підтверджують гіпотезу про природу виникнення магнітного поля.
4. Для подальшої деталізації передбачено подальше удосконалення алгоритму з метою оптимізації використання оперативної пам’яті.

**Список літератури**

Мещеряков, Г. А., Фыс, М. М. Трехмерная и референсная плотностные модели Земли. *Геофизический журнал*, 1986. 8(4), 68–75.  
 Мещеряков, Г.А., & Фыс, М.М. Трехмерная плотностная модель Земли I. *Геофизический журнал*, 1990. 12(4), 50–57.  
 Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.

Сявавко М. & Рибицька О. Математичне моделювання за умов невизначеності. Українські технології, 2000. 320 с.  
 Церклевич, А. Л., Заяць, О. С., & Фис, М. М. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи. *Геодинаміка*. 2012. 1(12), 42–53. <https://doi.org/10.23939/jgd2012.01.042>  
 Фис М. М., Зазуляк П. М., Черняга П. Г. Значення та варіації густини у центрі мас еліпсоїдальних планет. *Кинематика и физика небесных тел*. 2013. 29(2), 62–68. <https://www.mao.kiev.ua/biblio/jscans/kfnt/2013-29/kfnt-2013-29-2-06.pdf>  
 Фис М. М., Бридун А. М., Юрків М. І., Согор А. Р. Визначення функції за її похідними, поданими комбінаціями многочленів Лежандра трьох змінних. *Молодий вчений*, 2018. 63(11). <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2018/11/91.pdf>  
 Яцків Я. С. Нутація в системі астрономічних констант. Препринт. АН УРСР, Інститут теоретичної фізики, 1980. 59 с.  
 Dzewonski, A., & Anderson, D. (1981). Preliminary reference Earth model. *Physics of the earth and planetary interiors*, 25(4), 297–356. DOI: 10.1016/0031-9201(81)90046-7.

- Fys, M., Yurkiv, M., Brydun, A., & Lozynskiy, V. (2016). One option of constructing three-dimensional distribution of the mass and its derivatives for a spherical planet earth. *Geodynamics*, 2(21), 36–44. <https://doi.org/10.23939/jgd2016.02.036>
- Fys, M., Brydun, A., & Yurkiv, M. (2018). Method for approximate construction of three-dimensional mass distribution function and gradient of an ellipsoidal planet based on external gravitational field parameters. *Geodynamics*, 2 (25), 27–36. <https://doi.org/10.23939/jgd2018.02.027>
- Fys M., Brydun A., Yurkiv M., Sohor & Holubinka U. (2020). The methodology of approximate construction of the three dimensional mass distribution function and its gradient for the ellipsoidal planet subsidies. *Geodynamics*, 2 (29), 21–32.
- Fys M. M., Brydun A. M & Yurkiv M. I. (2019). On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Mathematical modeling and computing*, 6(2), 251–257. <https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.251>
- Fys M. M., Brydun A. M. & Yurkiv M. I. (2021). On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *MMC*, 8(3), 359–367. <https://doi.org/10.23939/mmc2021.03.359>
- Korn G. A. & Korn T. M. (2000)/ *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover Publications.*
- Moritz, H. (1973). Ellipsoidal mass distributions. *Report No. 206, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.*
- Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C. et al. (2008). An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly. *Geophysical Research Abstracts*. 10, 2. (EGU2008–A–01891)

Mykhailo FYS<sup>1</sup>, Andrii BRYDUN<sup>2</sup>, Mariana YURKIV<sup>3</sup>, Andrii SOHOR<sup>4</sup>, Yurii HUBAR<sup>5</sup>

<sup>1-4</sup> Department of cartography and geospatial modeling of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine, e-mail: <sup>1</sup>Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua; <sup>2</sup>Andrii.M.Brydun@lpnu.ua; <sup>3</sup>Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua; <sup>4</sup>Andrii.R.Sohor@lpnu.ua, <sup>1</sup><https://orcid.org/0000-0001-8956-2293>, <sup>2</sup><https://orcid.org/0000-0001-5634-0512>,

<sup>3</sup><https://orcid.org/0000-0002-2180-5583>; <sup>4</sup><https://orcid.org/0000-0002-0084-9552>

<sup>5</sup> Department of land management of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine, e-mail: Yurii.P.Hubar@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-2538-0727>

#### THE GRADIENT CONSTRUCTION APPROACH ANALYSIS OF THE THREE-DIMENSIONAL MASS DISTRIBUTION FUNCTION OF THE ELLIPSOIDAL PLANET

To investigate the features of the algorithm implementation for finding the derivatives of the spatial distribution function of the planet's masses with the use of high-order Stokes constants and, on the basis of this, to find its analytical expression. According to the given methodology, to carry out calculations with the help of which to carry on the study of dynamic phenomena occurring inside an ellipsoidal planet. The proposed method involves the determination of the derivatives of the mass distribution function by the sum, the coefficients of which are obtained from the system of equations, which is incorrect. In order to solve it, an error-resistant method for calculating unknowns was used. The implementation of the construction is carried out in an iterative way, while for the initial approximation we take the three-dimensional function of the density of the Earth's masses, built according to Stokes constants up to the second order inclusive, by dynamic compression by the one-dimensional density distribution, and we determine the expansion coefficients of the derivatives of the function in the variables  $x, y, z$  to the third order inclusive. They are followed by the corresponding density function, which is then taken as the initial one. The process is repeated until the specified order of approximation is reached. To obtain a stable result, we use the Cesaro summation method (method of means). The calculations performed with the help of programs that implement the given algorithm, while the achieved high (ninth) order of obtaining the terms of the sum of calculations. The studies of the convergence of the sum of the series have been carried out, and on this basis, a conclusion has been made about the advisability of using the generalized finding of the sums based on the Cesaro method. The optimal number of contents of the sum terms has been chosen, provides convergence both for the mass distribution function and for its derivatives. Calculations of the deviations of mass distribution from the mean value (“inhomogeneities”) for extreme points of the earth's geoid, which basically show the total compensation along the radius of the Earth, have been performed. For such three-dimensional distributions, calculations were performed and schematic maps were constructed according to the taken into account values of deviations of three-dimensional distributions of the mean (“inhomogeneities”) at

different depths reflecting the general structure of the Earth's internal structure. The presented vector diagrams of the horizontal components of the density gradient at characteristic depths (2891 km – core-mantle, 700 km – middle of the mantle, also the upper mantle – 200, 100 km) allow us to draw preliminary conclusions about the global movement of masses. At the same time, a closed loop is observed on the “core-mantle” edge, which is an analogy of a closed electric circuit. For shallower depths, differentiation of vector motions is already taking place, which gives hope for attracting these vector-grams to the study of dynamic motions inside the Earth. In fact, the vertical component (derivative with respect to the  $z$  variable) is directed towards the center of mass and confirms the main property of mass distributions – growth when approaching the center of mass. The method of stable solution of incorrect linear systems is applied, by means of which the vector-gram of the gradient of the mass distribution function is constructed. The nature of such schemes provides a tool for possible causes of mass redistribution in the middle of the planet and to identify possible factors of tectonic processes in the middle of the Earth, i.e indirectly confirms the gravitational convection of masses. The proposed technique can be used to create detailed models of density functions and its characteristics (derivatives) of the planet's interior, and the results of numerical experiments – to solve tectonics problems.

*Key words:* incorrect problem; Fire – Cesaro method; Earth; PREM model; Stokes constants.

Надійшла 05.09.2021 р.