

**В. І. Гавриш, В. Ю. Майхер**

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМІНУ В ЕЛЕМЕНТАХ ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЇВ**

Розроблено математичну модель аналізу теплообміну між ізотропною двошаровою пластиною, яка нагрівається точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження шарів, і навколишнім середовищем. Для цього з використанням теорії узагальнених функцій коефіцієнт теплопровідності матеріалів шарів пластини зображено як єдине ціле для всієї системи. З огляду на це, замість двох рівнянь теплопровідності для кожного із шарів пластини та умов ідеального теплового контакту, між ними отримано одне рівняння теплопровідності в узагальнених похідних із сингулярними коефіцієнтами. Для розв'язування крайової задачі теплопровідності, що містить це рівняння та крайові умови на межових поверхнях пластини, використано інтегральне перетворення Фур'є і внаслідок отримано аналітичний розв'язок задачі в зображеннях. До цього розв'язку застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є, яке дало змогу отримати остаточний аналітичний розв'язок вихідної задачі. Отриманий аналітичний розв'язок подано у вигляді невластивого збіжного інтегралу. За методом Сімпсона отримано числові значення цього інтегралу з певною точністю для заданих значень товщини шарів, просторових координат, питомої потужності точкового джерела тепла, коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів пластини та коефіцієнта тепловіддачі з межових поверхонь пластини. Матеріалом першого шару пластини є мідь, а другого – алюміній. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу теплообміну між пластиною та навколишнім середовищем, зумовленим різними температурними режимами завдяки нагріванню пластини точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження шарів, розроблено обчислювальні програми. Із використанням цих програм наведено графіки, що відображають поведінку кривих, побудованих із використанням числових значень розподілу температури залежно від просторових координат. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність розробленої математичної моделі аналізу теплообміну між двошаровою пластиною з точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхнях спряження шарів і навколишнім середовищем, реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати такого роду неоднорідні середовища щодо їх термостійкості під час нагрівання. Як наслідок, стає можливим її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

**Ключові слова:** теплообмін; ізотропна двошарова пластина; теплопровідність; температурне поле; теплоізолювана поверхня; ідеальний тепловий контакт.

**Вступ**

Особливого значення для виробництва пристроїв сучасної техніки набувають композитні матеріали, серед яких важливе місце посідають кусково-однорідні структури (шаруваті структури, однорідні та шаруваті структури з чужорідними включеннями), які широко застосовують в цифрових технологіях, зокрема в сучасних смартфонах. Виробники таких пристроїв концентрують увагу на збільшенні швидкодії процесорів і тривалості роботи акумуляторів, створенні бездротових джерел зарядження, поліпшенні роботи моніторів, а також оснащенні їх різними функціями. Великі компанії впроваджують бездротове зарядження акумуляторів, відмовляються від кабелів і пропонують зарядження різними станціями. У перспективі можуть появиться безрамкові смартфони, завдяки чому вдасться збільшити розміри екрану та повноту подання інформації. У подальшому спостерігається тенденція перетворення гаджетів, які нині і так виконують функції фотокамери, платіжного пристрою і т.і., у джерело збирання медичної інформації. Проектування та розроблення таких пристроїв, окремі елементи та вузли яких є кусково-однорідної структури, що часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, полягає не тільки в розширенні можливостей і покращенні їхніх параметрів,

але й у забезпеченні їхньої стабільної роботи, високої надійності та теплової стійкості. Із ростом потужностей та інтеграції таких пристроїв ускладнюється проблема термостійкості до теплових навантажень їх конструкцій, які частково або цілком виходять із ладу внаслідок теплових перевантажень.

*Об'єкт дослідження* – теплообмін в шаруватих середовищах із локальним нагріванням.

*Предмет дослідження* – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплообміну та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для шаруватих середовищ.

*Мета роботи* – розроблення математичної моделі теплообміну для двошарової пластини, що нагрівається внутрішнім точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхні спряження шарів, яка дає змогу підвищити точність визначення температурного поля, що у подальшому вплине на ефективність методів проектування пристроїв цифрових технологій.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямку розроблення математичних моделей теплообміну;
- навести об'єкт дослідження та розробити його математичну модель;

- отримати аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності;
- розробити алгоритм та програмні засоби його числової реалізації для аналізу теплообміну між шаруватою пластинною та навколишнім середовищем.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – наведено спосіб лінеаризації нелінійного рівняння теплопровідності та крайових умов, що дало змогу в замкнутому вигляді отримати аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для шаруватого середовища з локальним нагріванням.

Практична значущість результатів дослідження – отримані аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для шаруватого середовища з локальним нагріванням дають змогу розробляти алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу теплообміну у окремих конструкційних елементах та вузлах цифрових пристроїв з метою прогнозування їхніх режимів роботи, ідентифікування невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників [1], [9], [10], [12], [13], [15].

У роботі [14] досліджено теплообмін у шаруватій пластині зі складниками різної прозорості, з'єднаними тонким проміжним шаром за теплового опромінення з боку частково прозорого шару. За допомогою ефективного коефіцієнта відбивання на поверхні контакту отримано наближені співвідношення для визначення поля випромінювання в основному частково прозорому шарі.

Виконано зовнішній асимптотичний розклад розв'язку нестационарної задачі теплопровідності для шаруватої анізотропної пластини з крайовими умовами другого роду на лицьових поверхнях. Проаналізовано отримані двовимірні диференціальні рівняння та досліджено асимптотичні властивості розв'язків задачі. Отримано оцінки точності, з якою розподіл температури поза межовим шаром пластини вважають кусково-лінійною або кусково-квадратичною функцією за товщиною [8]. У працях [2], [3], [4] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних та шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми. У роботах [6], [11] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися моделі, які б враховували кусково-однорідну структуру конструкцій, які функціонують у режимі інтенсивних температурних збурень, зумовлених локально зосередженими джерелами тепла. Це приводить до розроблен-

ня математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у елементах складних електронних і електромеханічних систем, які геометрично описують шаруватими середовищами. Результати досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування наведених систем щодо їх термостійкості.

## Результати досліджень та їх обговорення

**1. Математична модель.** Розглянемо ізотропну відносно теплофізичних параметрів двошарову пластинну товщиною  $2\delta$  з теплоізолюваними лицьовими поверхнями  $|z| = \delta$ , яка складається із двох різнорідних шарів, що відрізняються геометричними (шириною) та теплофізичними (коефіцієнтом теплопровідності) параметрами, віднесена до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$ . Початок її, де зосереджено точкове джерело тепла з потужністю  $q_0 = const$ , вибрано на поверхні спряження шарів  $K_0 = \{(x, 0, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ , на якій існує ідеальний тепловий контакт  $t_1(x, y) = t_2(x, y)$ ,  $\lambda_1 \frac{\partial t_1(x, y)}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(x, y)}{\partial y}$  для  $y = 0$  (1, 2 – для першого та другого шарів пластини відповідно). На межових поверхнях  $K_1 = \{(x, -y_1, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$  та  $K_2 = \{(x, y_2, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$  пластини задано умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем згідно зі законом Ньютона (рис. 1).

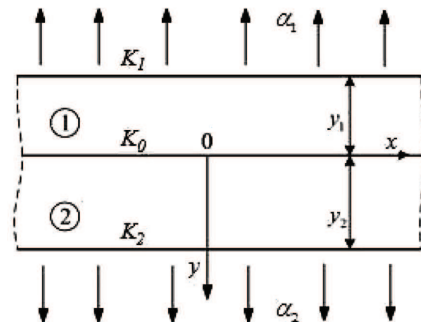


Рис. 1. Переріз ізотропної пластини з тепловіддачею площинною  $z=0$

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури  $t(x, y)$  за просторовими координатами, який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [6], [11]

$$\lambda(y) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} [\lambda(y) \frac{\partial t}{\partial y}] = -q_0 \delta(x, y) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = t_c, \quad \lambda_1 \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-y_1} = \alpha_1 (t - t_c), \quad \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = -\alpha_2 (t - t_c), \quad (2)$$

де:  $\lambda(y)$  – коефіцієнт теплопровідності неоднорідної пластини,

$$\lambda(y) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) S_+(y), \quad (3)$$

$\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – коефіцієнти теплопровідності матеріалів 1-го та 2-го шарів пластини відповідно;  $t_c$  – температура навколишнього середовища;  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь  $K_1$  і  $K_2$  відповідно;  $S_+(\zeta)$  – асиметрична одинична функція [7], визначають з такого виразу

$$S_+(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0, & \zeta \leq 0; \end{cases}$$

$\delta(\zeta) = \frac{dS(\zeta)}{d\zeta}$  – дельта-функція Дірака;  $S(\zeta)$  – симетрична

на одинична функція, визначають з такого виразу

$$S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Введемо таку функцію

$$T(x, y) = \lambda(y)\theta(x, y) \quad (4)$$

і продиференціюємо її за змінними  $x$  та  $y$  з урахуванням виразу для коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(y)$  (3). Внаслідок цього отримаємо

$$\lambda(y) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} - (\lambda_2 - \lambda_1) \theta \Big|_{y=0} \delta_+(y); \quad \lambda(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5)$$

де:  $\theta(x, y) = t(x, y) - t_c$  – збиткова температура;

$\delta_+(\zeta) = \frac{dS_+(\zeta)}{d\zeta}$  – асиметрична дельта-функція Дірака [7].

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), одержимо диференціальне рівняння з частковими похідними із сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T - (\lambda_2 - \lambda_1) \theta \Big|_{y=0} \delta_+(y) = -q_0 \delta(x, y), \quad (6)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Отже, шукане температурне поле в наведеній системі цілком визначається рівнянням (6) із крайовими умовами (2).

**2. Аналітичний розв'язок.** Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (6) і крайових умов (2) з урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} - \xi^2 \bar{T} = (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\theta} \Big|_{y=0} \delta_+(y) - \frac{q_0}{\sqrt{2\pi}} \delta(y) \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$\frac{d\bar{T}}{dy} \Big|_{y=-y_1} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \bar{T} \Big|_{y=-y_1}, \quad \frac{d\bar{T}}{dy} \Big|_{y=y_2} = -\frac{\alpha_2}{\lambda_2} \bar{T} \Big|_{y=y_2}, \quad (8)$$

де:  $\bar{T}(y)$  – трансформанта функції  $T(x, y)$ , визначають за формулою  $\bar{T}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} T(x, y) d\xi$ ;  $\xi$  – параметр інтегрального перетворення Фур'є,  $i^2 = -1$ .

Загальний розв'язок рівняння (7) знайдемо за допомогою методу варіації сталих у такому вигляді

$$\bar{T}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} + (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\theta} \Big|_{y=0} ch\xi y S_+(y) - \frac{q_0}{\xi \sqrt{2\pi}} sh\xi y S(y), \quad (9)$$

де  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування.

Величину  $\bar{\theta} \Big|_{y=0}$  визначаємо з виразу (9) у такому вигляді

$$\bar{\theta} \Big|_{y=0} = \frac{c_1 + c_2}{\lambda_1}.$$

Використавши крайові умови (8) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задачі (7), (8), а саме:

$$\bar{T}(y) = \frac{q_0}{\xi \sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{D} (\bar{T}_1(y) + \bar{T}_2(y) \bar{T}_3(y)) - sh\xi y S(y) \right], \quad (10)$$

$$\bar{T}_1(y) = ch\xi(y + y_1) + \frac{\alpha_1}{\lambda_1 \xi} sh\xi(y + y_1);$$

$$\bar{T}_2(y) = (K_\lambda - 1) \left( ch\xi y_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1 \xi} sh\xi y_1 \right) ch\xi y S_+(y);$$

$$\bar{T}_3(y) = ch\xi y_2 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 \xi} sh\xi y_2;$$

$$\bar{T}_4(y) = ch\xi(y + y_1) + (K_\lambda - 1) ch\xi y_1 ch\xi y S_+(y);$$

$$D = (K_\lambda - 1) \left( ch\xi y_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1 \xi} sh\xi y_1 \right) \left( sh\xi y_2 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 \xi} ch\xi y_2 \right) + D_1;$$

$$D_1 = \left( 1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda_1 \lambda_2 \xi^2} \right) sh\xi(y_1 + y_2) + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right) ch\xi(y_1 + y_2);$$

$$D_2 = sh\xi(y_1 + y_2) + (K_\lambda - 1) sh\xi y_2 ch\xi y_1,$$

де:  $K_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$  – коефіцієнт, який характеризує відносну теплопровідність пластини.

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (10), одержимо розв'язок задачі (1), (2) у такому вигляді

$$T(x, y) = \frac{q_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x}{\xi} \left[ \frac{1}{D} (\bar{T}_1(y) + \bar{T}_2(y) \bar{T}_3(y)) - sh\xi y S(y) \right] d\xi. \quad (11)$$

Отже, шукане температурне поле у двошаровій пластині, зумовлене зосередженням на поверхнях спряження шарів пластини точковим джерелом тепла, виражено формулою (11), з якої отримуємо значення температури в довільній точці наведеної конструкції.

У частковому випадку для крайових умов другого роду

$$t \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = t_c, \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-y_1} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = 0 \quad (12)$$

розв'язок задачі (1), (12) визначимо у вигляді співвідношення

$$T(x, y) = \frac{q_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x}{\xi} \left[ \frac{ch\xi y_2}{D_2} \bar{T}_4(y) - sh\xi y S(y) \right] d\xi. \quad (13)$$

**3. Нелінійна математична модель.** Розглянемо випадок, коли двошарова пластина є термочутливою (теплофізичні параметри залежать від температури). Рівняння теплопровідності і крайові умови запишемо у вигляді [6], [11]

$$\lambda(t, y) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} [\lambda(t, y) \frac{\partial t}{\partial y}] = -q_0 \delta(x, y), \quad (14)$$

$$t(x, y) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-y_1} = \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = 0. \quad (15)$$

Введемо лінеаризуючу функцію

$$\vartheta(x, y) = \int_0^{t(x, y)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(y) \int_0^{t(x, y)} [(\lambda_2(\zeta) - \lambda_1(\zeta))] d\zeta, \quad (16)$$

продиференціювавши яку за змінними  $x$  та  $y$ , отримаємо:

$$\lambda(t, y) \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial x} + \left\{ [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} \right\} \Big|_{y=0} \quad (17)$$

$$S_-(y), \quad \lambda(t, y) \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y}.$$

Із урахуванням виразів (17) вихідне рівняння (14) прийме такий вигляд:

$$\Delta \vartheta + S_-(y) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ (\lambda_2(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1})) \frac{\partial t}{\partial x} \right]_{y=0} \right\} = -q_0 \delta(x, y). \quad (18)$$

Крайові умови з урахуванням співвідношення (16) запишемо так:

$$\vartheta(x, y) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-y_1} = \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = 0. \quad (19)$$

Лінеаризована функція (16) дала змогу звести нелінійне рівняння теплопровідності (14) до частково лінеаризованого рівняння (18) із розривними коефіцієнтами та повністю лінеаризованими крайовими умовами (19).

**4. Аналітично-числовий розв'язок.** Апроксимуємо функцію  $t(x, 0)$  виразом

$$t(x, 0) = t_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) S_-(x - x_j), \quad (20)$$

де:  $x_j \in ]-x_*; x_*[$ ;  $x_*[$ ;  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1}$ ;  $n$  – кількість розбиттів інтервалу  $]-x_*; x_*[$ ;  $t_j (j = \overline{1, n})$  – невідомі апроксимуючі значення температури;  $x_*$  – значення координати  $x$ , в якій температура практично дорівнює нулеві (визначають із відповідної лінійної крайової задачі) (рис. 2).

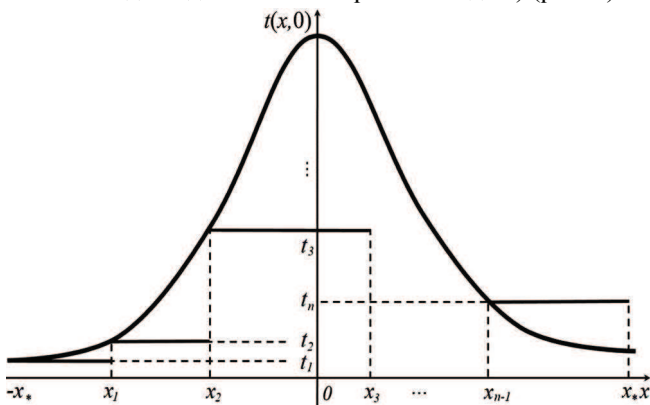


Рис. 2. Апроксимація функції  $t(x, 0)$

Підставивши вираз (20) у співвідношення (18), отримаємо лінійне диференціальне рівняння в часткових похідних відносно лінеаризуючої функції  $\vartheta(x, y)$

$$\Delta \vartheta = -S_-(y) \sum_{j=1}^{n-1} \Delta \lambda(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j) \delta_-(x - x_j) - q_0 \delta(x, y), \quad (21)$$

$$\Delta \lambda(t_{j+1}) = \lambda_2(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1}).$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (21) та крайових умов (19), отримаємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ i \xi S_-(y) \sum_{j=1}^{n-1} \Delta \lambda(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j) e^{i \xi x_j} - q_0 \delta(y) \right\} \quad (22)$$

та крайові умови

$$\frac{d \bar{\vartheta}(y)}{dy} \Big|_{y=-y_1} = \frac{d \bar{\vartheta}(y)}{dy} \Big|_{y=y_2} = 0 \quad (23)$$

де  $\bar{\vartheta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \xi x} \vartheta(x, y) dx$  – трансформанта функції  $\vartheta(x, y)$ .

Розв'язавши задачу (22) і (23), а також після цього застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до її розв'язку, отримуємо вираз для функції

$$\vartheta(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \left\{ \left[ \frac{ch \xi (y + y_1)}{sh \xi (y_1 + y_2)} sh \xi y_2 - (ch \xi y - 1) S(y) \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^{n-1} \sin \xi (x - x_j) (t_{j+1} - t_j) \left[ (\lambda_2(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1})) \right] - \right. \\ \left. - q_0 \cos \xi x \left( \frac{ch \xi (y + y_1)}{sh \xi (y_1 + y_2)} ch \xi y_2 - sh \xi y S(y) \right) \right\} d \xi. \quad (24)$$

Підставивши співвідношення температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів для кожного зі шарів пластини у вирази (16), (24), після деяких перетворень отримаємо систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих апроксимуючих значень температури  $t_j (j = \overline{1, n})$ .  $t \alpha \pm h, t \alpha -, t \alpha + \alpha = 1, p$ . Шукане температурне поле для наведеної структури визначаємо за допомогою отриманого нелінійного рівняння з використанням співвідношень (16), (24), після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури.

**5. Частковий приклад залежності коефіцієнта теплопровідності від температури.** Для розв'язування багатьох практичних задач використовують таку залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [6], [11]:

$$\lambda_s = \lambda_s^0 (1 - k_s t), \quad (25)$$

де  $\lambda_s^0, k_s$  – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів пластини ( $s=1, 2$ ). Із виразів (16), (24) отримуємо формули для визначення температури  $t(x, y)$  в областях

першого  $\Omega_1 = \{(x, y) : |x| < \infty, -y_1 \leq y < 0\}$  –

$$t(x, y) = \frac{1}{k_1} \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{k_1}{\lambda_1^0} \vartheta(x, y)} \right) \quad (26)$$

та другого  $\Omega_2 = \{(x, y) : |x| < \infty, 0 \leq y \leq y_2\}$  –

$$t(x, y) = \frac{1}{k_2} \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{k_2}{\lambda_2^0} (\vartheta(x, y) + \vartheta_1)} \right) \quad (27)$$

шарів пластини, де

$$\vartheta_1 = \left\{ t \left[ \lambda_2^0 \left( 1 - \frac{k_2}{2} t \right) - \lambda_1^0 \left( 1 - \frac{k_1}{2} t \right) \right] \right\} \Big|_{y=0}.$$

Значення температури  $t(x, 0)$  визначаємо за формулою (26). Формули (26), (27) повністю описують температурне поле в термочутливій двошаровій пластині.

Виконано числовий аналіз температури  $\theta(x, y)$  у двошаровій пластині для таких вихідних даних: матеріали пластини – мідь ( $\lambda_1 = 395$  Вт/(м·град) за температури  $t = 20^\circ\text{C}$ ) для першого шару та алюміній ( $\lambda_2 = 207$  Вт/(м·град) за температури  $t = 27^\circ\text{C}$ ) для другого [5];  $y_1 = y_2 = 1$  м;  $q_0 = 200$  Вт.

У випадку нелінійної моделі для наведених матеріалів в інтервалі температур  $[27^\circ\text{C}; 927^\circ\text{C}]$  співвідношення залежності коефіцієнта теплопровідності від температури мають вигляд

$$\lambda_1(t) = 381,62 \frac{\text{W}}{\text{Km}} \left( 1 - 0,00021 \frac{t}{\text{K}} \right),$$

$$\lambda_2(t) = 211,25 \frac{\text{W}}{\text{Km}} \left( 1 - 0,00076 \frac{t}{\text{K}} \right),$$

що є частковим випадком співвідношення (25). Числові обчислення виконано з точністю  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

**Обговорення результатів дослідження.** Проілюстровано (рис. 3,а) зміну температури  $\theta(x,y)$  залежно від просторової координати  $y$  для  $x=-2$  та заданих значень коефіцієнта тепловіддачі. Із поведінки кривих видно, що температура, як функція координати  $y$ , монотонно зростає у першому шарі пластини і досягає максимального значення в точці  $(0; 0)$ , в якій зосереджено точкове джерело тепла, а в другому шарі пластини вона монотонно спадає. Найменші значення у цьому випадку температура досягає на межових поверхнях  $K_1, K_2$  пластини. Як видно із графіків, коефіцієнти тепловіддачі значно впливають на розподіл температури, причому вона є вищою у першому шарі, оскільки матеріалом цього шару є мідь і коефіцієнт теплопровідності є більшим від коефіцієнта теплопровідності для другого шару, матеріалом якого є алюміній.

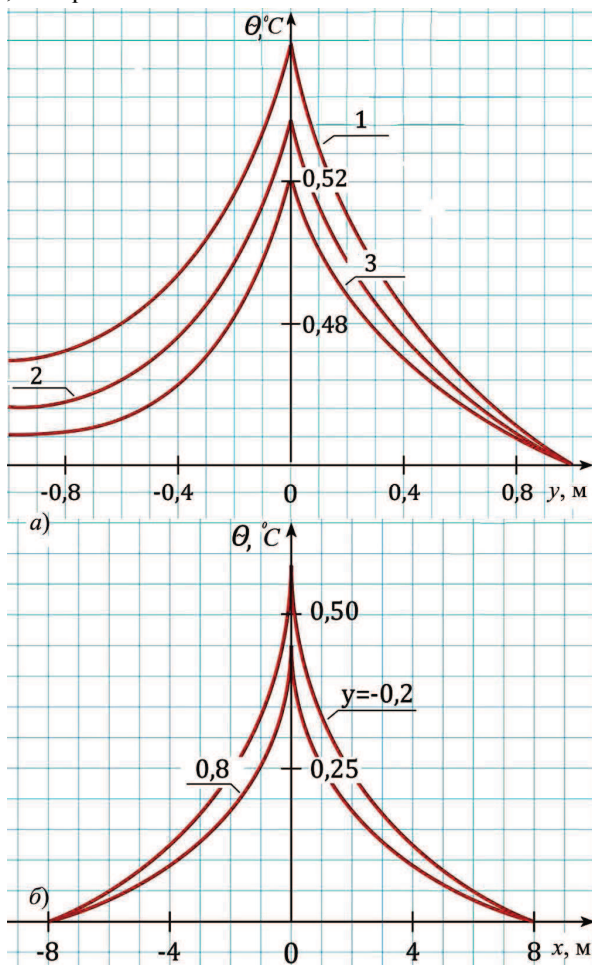


Рис. 3. Залежність температури  $\theta(x,y)$  від  $(\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град}))$ : а) координати  $y$  для  $x=0$  та заданих значень коефіцієнта тепловіддачі: крива 1 –  $\alpha_1 = \alpha_2 = 17,64$ ; крива 2 –  $\alpha_1 = \alpha_2 = 15,74$ ; крива 3 –  $\alpha_1 = \alpha_2 = 13,59$ ; б) координати  $x$  для  $\alpha_1 = \alpha_2 = 16,92$  та заданих значень координати  $y$

На рис. 3,б зображено зміну температури  $\theta(x,y)$  залежно від просторової координати  $x$  та заданих значень просторової координати  $y$ . Із поведінки кривих видно, що температура, як функція координати  $x$ , є достатньо гладкою та монотонною функцією і досягає максимального значення в точці  $(0; 0)$ . У разі збільшення за абсолютною величиною значень просторової координати  $x$  температура знижується, що свідчить про адекватність математичної моделі реальному фізичному процесу.

На рис. 4,а зображено зміну температури  $t(x,y)$  залежно від просторової координати  $x$  для значень координати  $y=0$  та  $y=0,5$ . Із поведінки кривих видно, що температура як функція координати  $x$  є достатньо гладкою та монотонною функцією і досягає максимальні значення в точках  $(0; 0)$ ,  $(0; 0,5)$ .

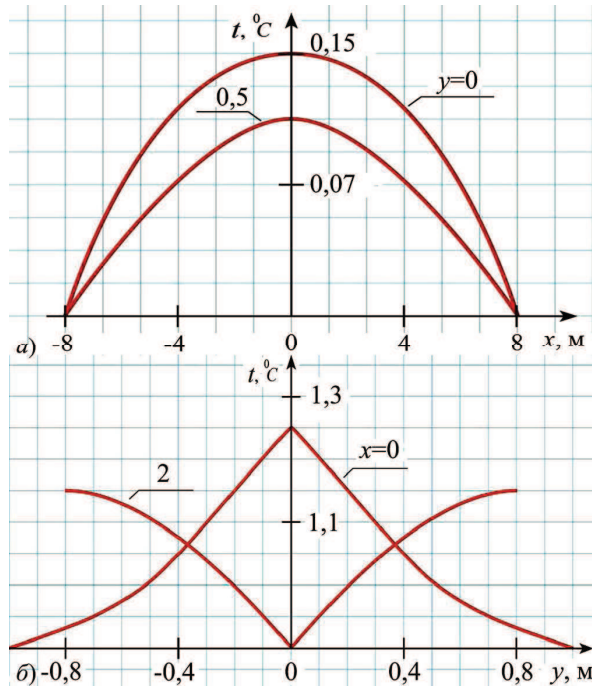


Рис. 4. Залежність температури  $t(x,y)$  від: а) координати  $x$  для заданих значень координати  $y$ ; б) координати  $y$  для заданих значень координати  $x$

Проілюстровано (рис. 4,б) зміну температури  $t(x,y)$  залежно від просторової координати  $y$  для значень координати  $x=0$  та  $x=2$ . Із поведінки кривих видно, що температура як функція координати  $y$  при  $x=0$  монотонно зростає у першому шарі пластини і досягає максимального значення в точці  $(0;0)$ , в якій зосереджено точкове джерело тепла, а в другому шарі пластини вона монотонно спадає. Найменші значення у цьому випадку температура досягає на межових поверхнях  $K_1, K_2$  пластини. На відміну від попереднього випадку (див. рис. 3,б) функція температури при  $x=2$  приймає мінімальне значення в точці  $(2; 0)$  і монотонно зростає, досягнувши найбільших значень на межових поверхнях пластини.

## Висновки

Із використанням узагальнених функцій та інтегрального перетворення Фур'є для двошарової пластини з точковим джерелом тепла та тепловіддачею побудовано аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності, диференціальне рівняння якої містить розривні та сингулярні коефіцієнти. Цей розв'язок подано у вигляді невластного збіжного інтегралу. Із його використанням розроблено алгоритм і розрахункову програму для визначення температурного поля в довільній точці двошарової пластини з точковим джерелом тепла, зосередженим на поверхні спряження шарів. На цій основі отримано числові значення температурного поля, із використанням яких побудовано графіки, де зображено криві, які відображають поведінку температури залежно від просторових координат та значень коефіцієнта теп-

ловіддачі з межових поверхонь пластини. Це дає змогу аналізувати теплообмін у неоднорідних шаруватих середовищах щодо їх термостійкості під час нагрівання та захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

У частковому випадку, для крайових умов другого роду числовий аналіз свідчить, що результати, отримані для лінійної моделі за формулою (13) і для нелінійної за формулами (26), (27) відрізняються на 7 %.

## References

- [1] Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *Journal of Engineering Mathematics*, 61(2–4), 371–384. <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>
- [2] Havrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modelling of temperature regimes in piecewise-homogeneous structures*. Lviv: Publishing house of Lviv Polytechnic National University, 176 p.
- [3] Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio electronics, computer science, management*, 3(46), 7–15. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>
- [4] Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanka, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Scientific Bulletin of the National Chemical University*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>
- [5] Kikoin, I. K. (Ed.). (1976). *Tablitsy fizicheskikh velichin*. Moscow: Atomizdat, 1008 p. [In Russian].
- [6] Koliano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termoprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Scientific thought, 280 p. <https://doi.org/10.1192/bjp.161.2.280b>
- [7] Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Science, 720 p. [In Russian].
- [8] Nemirovskii, Iu. V., & Iankovskii, A. P. (2007). Asimptoticheskiy analiz zadachi nestatsionarnoi teploprovodnosti sloistykh anizotropnykh neodnorodnykh plastin pri granichnykh usloviakh pervogo i tretogo roda na litcevykh poverkhnostiakh. *Mathematical methods and physical and mechanical fields*, 50(2), 160–175. [In Russian].
- [9] Noda, N. (1991). Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397. <https://doi.org/10.1115/1.3119511>
- [10] Otao, Y., Tanigawa, O., & Ishimaru, O. (2000). Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *Journal of Thermal Stresses*, 23, 257–271. <https://doi.org/10.1080/014957300280434>
- [11] Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termoprugost tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Science, 368 p. [In Russian].
- [12] Tanigawa, Y., & Otao, Y. (2002). Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation. *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu*, 2, 133–134. [https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0\\_133](https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0_133)
- [13] Tanigawa, Y., Akai, T., & Kawamura, R. (1996). Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Stresses*, 19(1), 77–102. <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>
- [14] Turii, O. (2008). Neliniina kontaktno-kraiova zadacha termomekhaniky dlia oprominiuvanoi dvosharovoii plastyny, ziednanoi promizhkovym sharom. *Fiziko-matematychne modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii*, 8, 118–132. [In Ukrainian].
- [15] Yangian, Xu., & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. *2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng., Vol. 2–2*, (pp. 433–436). <https://doi.org/10.1109/ICICTA.2009.842>

**V. I. Havrysh, W. Yu. Mayher**

*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## MATHEMATICAL MODEL OF HEAT EXCHANGE IN ELEMENTS OF DIGITAL DEVICES

A mathematical model of heat exchange analysis between an isotropic two-layer plate heated by a point heat source concentrated on the conjugation surfaces of layers and the environment has been developed. To do this, using the theory of generalized functions, the coefficient of thermal conductivity of the materials of the plate layers is shown as a whole for the wholesystem. Given this, instead of two equations of thermal conductivity for each of the plate layers and the conditions of ideal thermal contact, one equation of thermal conductivity in generalized derivatives with singular coefficients is obtained between them. To solve the boundary value problem of thermal conductivity containing this equation and boundary conditions on the boundary surfaces of the plate, the integral Fourier transform was used and as a result an analytical solution of the problem in images was obtained. An inverse integral Fourier transform was applied to this solution, which made it possible to obtain the final analytical solution of the original problem. The obtained analytical solution is presented in the form of an improper convergent integral. According to Simpson's method, numerical values of this integral are obtained with a certain accuracy for given values of layer thickness, spatial coordinates, specific power of a point heat source, thermal conductivity of structural materials of the plate and heat transfer coefficient from the boundary surfaces of the plate. The material of the first layer of the plate is copper, and the second is aluminum. Computational programs have been developed to determine the numerical values of temperature in the given structure, as well as to analyze the heat exchange between the plate and the environment due to different temperature regimes due to heating the plate by a point heat source concentrated on the conjugation surfaces. Using these programs, graphs are shown that show the behavior of curves constructed using numerical values of the temperature distribution depending on the spatial coordinates. The obtained numerical values of temperature indicate the correspondence of the developed mathematical model of heat exchange analysis between a two-layer plate with a point heat source focused on the conjugation surfaces of the layers and the environment, the real physical process.

**Keywords:** heat exchange; isotropic two-layer plate; thermal conductivity; temperature field; heat-insulated surface; perfect thermal contact.

---

**Інформація про авторів:**

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. **Email:** gavryshvasyl@gmail.com;  
<https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

**Майхер Вікторія Юріївна**, канд. техн. наук, ст. викл., кафедра програмного забезпечення. **Email:** viktorii.y.maikher@lpnu.ua;  
<http://orcid.org/0000-0003-0786-6950>

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І., Майхер В. Ю. Математична модель теплообміну в елементах цифрових пристроїв. Український журнал інформаційних технологій. 2021, т. 3, № 1. С. 15–21.

**Citation APA:** Navrysh, V. I., & Mayher, W. Yu. (2021). Mathematical model of heat exchange in elements of digital devices. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 3(1), 15–21. <https://doi.org/10.23939/ujit2021.03.015>