

**К. М. Березька², О. М. Березький^{1,2}**¹ Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна² Західноукраїнський національний університет, м. Тернопіль, Україна

СИНТЕЗ ЗОБРАЖЕНЬ-ОРНАМЕНТІВ

Розроблено математичну модель синтезу зображень-орнаментів і програмно реалізовано редактор зображень-орнаментів, які базуються на теорії симетрії. У роботі показано фундаментальну роль симетрії. Проаналізовано, що методи теорії симетрії використовують в фізиці, хімії, біології та в техніці. З'ясовано, що симетрія базується на перетворенні та збереженні. Встановлено, що симетрична система базується на сукупності інваріантів, побудованих згідно з певних правил. Показано, що симетрія бордюрів і симетрія сітчастих орнаментів використовують в орнаментах. Синтез зображень-орнаментів розглянуто на прикладі української народної вишивки. Проаналізовано внесок закордонних і вітчизняних вчених у розвиток теорії симетрії та синтезу зображень. Показано, що українська народна вишивка є цінне надбання культурної і матеріальної спадку народу, важливе джерело вивчення його історії. Проаналізовано, що існує понад 100 видів різноманітних технічних прийомів вишивки. Показано роль відомих митців України у популяризації та організації музеїв української народної вишивки.

Досліджено, що вишивка будується з окремих мотивів або з орнаментів. Орнаменти складаються з підорнаментів. Підорнамент – це узор, що складається з ритмічно впорядкованих однакових елементів (побудований на одній групі перетворення). Підорнаменти діляться на рапорти. Рапортом називається мінімальна за площею область, якою можна покрити підорнамент, використовуючи тільки переноси. Рапорт, водночас, ділиться на ще менші частинки: мотив або елементарний рисунок. Досліджено, що в вишивальних орнаментах є 7 груп смуги і 12 – площини.

Розроблено математичні моделі синтезу зображень-орнаментів для груп смуги та груп площини. Математичні моделі наведені для ідеальних орнаментів. У разі зміщень осей чи центрів симетрії, необхідно підкоректувати коефіцієнти зміщень матриць перетворень. Наведено зразки вишиваних орнаментів відповідних груп площини та смуги. Розроблено редактор зображень-орнаментів, який дає змогу синтезувати складні орнаментні зображення на підставі аналітичних формул елементарного рисунка, підорнаменту та орнаменту. Наведено приклади реальних і синтезованих зразків української народної вишивки.

Ключові слова: синтез; зображення; симетрія; групи симетрії на смугі та площині; українська народна вишивка; орнамент; редактор зображень-орнаментів.

Вступ

Поняття симетрії носить фундаментальний характер. Методи теорії симетрії використовуються в природничих науках: фізиці, хімії, біології та в техніці [11], [13], [14]. Метод симетрії має також філософське значення, оскільки носить загальний характер і використовують в різних областях людського буття. Поняття симетрії базується на двох положеннях: перетворенні та збереженні. Процедура перетворення передбачає зміну постійної частини – інваріанти. Інваріанта зберігається при перетвореннях. Отже, симетрична система базується на сукупності інваріантів, побудованих згідно з певних правил. Тому, *симетрія* – це закон побудови структурних об'єктів. Симетрія базується на понятті відносної рівності предметів. Два об'єкти будуть рівними по відношенню до певної ознаки, якщо вони мають цю ознаку. Але в природі немає абсолютної рівності предметів в просторі або в часі. Тому необхідно вказувати міру рівності.

Друге поняття теорії симетрії – це поняття геометричної рівності. Система побудована геометрично закономірно, якщо її можна розділити на рівні частини відносно певної ознаки. Геометрична впорядкованість повинна бути однаковою для всієї симетричної системи. Симетрія є дуже важливим фактором краси форми об'єкта. Різні закони побудови структурних частин об'єктів

викликають в людини гармонію сприйняття. Тіло людини, тварин мають площину симетрії. Технічна система – автомобіль має симетрію відносно площини. Симетрія бордюрів (симетрія на смугі) використовують для декорування переходів, метро. Симетрія сітчастих орнаментів (симетрія на площині) використовують в орнаментах. Сітчасті орнаменти використовуються при виробництві шпалер, керамічних підлог, облицювання стін керамікою та декоративним каменем, цегляних стін, декоративним живописом. Також закони побудови сітчастих орнаментів використовуються при упаковці однакових предметів, штампівці великої кількості однакових предметів з металу та пластмаси.

Симетрія поширена не тільки в архітектурі, але й у живій природі, як не дивно. Симетрія проявляється в розміщенні листочків на пагонах деяких рослин, самих листочках, квітах (соняшники), плодах (шишки), сніжинках, кристалах, живих організмах: людях, тваринах, рибках, птахам, комахам і т. д. Вона допомагає живим організмам краще пристосуватися до навколишнього середовища як захист від нападу. Отже, симетрія виступає як закони побудови цілісних систем і метод дослідження структурних закономірностей. В основному симетрію розуміють як поняття, що відноситься до матеріальних об'єктів. Проте, симетрія в широкому змісті виступає як симетрія різних понять, теорій, які відображають структуру матеріального світу.

Ідеї симетрії ще появилися в стародавніх філософів і математиків, які говорили про гармонію світу. Згідно з законами симетрії, створювали свої шедеври стародавні художники, архітектори. Природні об'єкти утворюють цілісні системи і мають структурну організацію. Кожні матеріальні об'єкти – "елементарні" частинки, атоми, молекули, кристали, структури біологічних полімерів мають свою організацію, свої підструктури.

Макроструктури об'єктів – планети та зоряні системи, галактики, метagalактики мають композиційний характер. Біологічні системи також мають композиційний характер, починаючи від атомно-молекулярних і завершуючи організмами, сукупностями організмів. Соціальні системи мають свою складну організацію. Симетрія може вживатися у значенні краси, гармонії природи, яка впадає в око, або у значенні строгого, а не розпливчатого, геометричного поняття. В геометрії вивчаються такі види симетрії: центральна, осьова, дзеркальна, поворотна, переносна.

Важливу роль симетрія відіграє в мистецтві. Кожний художній твір – художня література, наука, музика, живопис, архітектура – має складну художню структуру, яка складається з різних підструктур.

Об'єкт дослідження – створення симетричних зображень.

Предмет дослідження – синтез зображень симетричної структури на смузі та площині.

Мета роботи – аналіз структурної композиції орнаментів на прикладі української народної вишивки, розроблення моделей синтезу орнаментів на смузі та площині для ефективного зберігання наявних і синтезу нових орнаментів.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- 1) аналіз орнаментів на прикладі української народної вишивки та виділення їх особливостей;
- 2) структурний аналіз орнаменту;
- 3) розроблення математичних моделей синтезу груп симетрії на смузі та площині;
- 4) синтез нових зразків орнаментів – української народної вишивки.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – вперше розроблено математичні моделі орнаментів на підставі використання груп симетрії на смузі та площині, що дало змогу ефективно зберігати та синтезувати зображення-орнаменти.

Практична значущість результатів дослідження – розроблення редактора зображень-орнаментів, який можна використати не тільки для синтезу нових зразків української народної вишивки, а й для синтезу орнаментів в легкій промисловості.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Симетрія як наука почалася з появою поняття групи. Потім розроблялося вчення про симетрію кристалів – кристалографічні групи [2]. Після цього теоретико-групові методи розповсюдились на фізику та інші природничі науки. Спочатку (до XIX-го століття) симетрія не була об'єктом дослідження вчених, а вважалася як щось само собою прозоре, загальновідоме, що не підлягає вивченню. З XIX століття принцип симетрії набув істотного значення, особливо у фізиці й математиці. Цими питаннями, зокрема, займалися такі видатні науковці, як Вейль Г., Вернадський В. І., Федоров Є. С., Шубни-

ков А. В., Копчик В. А., Шафрановський І. І., Урманцев Ю. А., Фейнман Р., Нікітін А. Г. і ін. Хочеться відзначити внесок у вивчення симетрії члена-кореспондента НАН України А. Г. Нікітіна [1]. Велику увагу він приділяв дослідженням супер- та парасуперсиметрій рівнянь математичної фізики, систем рівнянь дифузії. Він довів, що суперсиметрія притаманна досить широкому класу рівнянь, які описують реальні фізичні процеси, що "суперсиметрія (яка, на жаль, мабуть, не є універсальною симетрією фізичного світу) реалізується у досить поширеному класі реальних фізичних систем". Закони симетрії використав Ю. Г. Стоян при розробленні методології комп'ютерного моделювання задач геометричного проектування [12]. Він розробив ряд інформаційних систем для розв'язання задач розміщення геометричних об'єктів.

Результати дослідження та їх обговорення

1. Аналіз мотивів української народної вишивки. Українська народна вишивка – це найулюбленіший і найрозповсюджений вид декоративно-ужиткового мистецтва, цінне надбання культурного і матеріальної спадку народу, важливе джерело вивчення його історії. У вишивці відображені особливості тривалих культуротворчих процесів різних історичних періодів, передані світоглядні уявлення та естетичні вподобання нашого народу.

Перші згадки про вишивку трапляються в археологічних знахідках з скіфських поховань [6]. На скарбах скіфів були розміщені люди, одяг яких був прикрашений вишивкою, яка була утворена з різних геометричних фігур (трикутників, кругів, ламаних, спіралей) і рослинного орнаменту.

Дослідники стверджують, що в Україні відомо понад 100 видів різноманітних технічних прийомів вишивки [8]. Серед них: низинка, хрестик, виколювання, вирізування, верхоплут, лічильна гладь, ланцюжок (тамбурний шов), плетінка (козлик), мережка, обметування, мотане, кафасор, поверхниця, набирування, курячий брід, ретязь, штапівка, стебнівка і ін. Деякі техніки вишивки зараз є призабуті і вимагають відтворення.

До нашого часу збереглися зразки української народної вишивки тільки з кінця XVIII – початку XIX ст. Це відбулося завдяки тому, що вишивкою як мистецтвом стали цікавитися прогресивні діячі культури, художники. Вишивку почали збирати в музеях і приватних колекціях, розвивати в приватних та земських артілях, школах майстрів. До відомих музеїв XIX ст. відносяться Музей художньої промисловості (1874) та Етнографічний музей при науковому товаристві ім. Шевченка (1895) у м. Львові. Ініціаторами відкриття музеїв були І. Франко, В. Шухевич, М. Зубрицький, Б. Заклинський, Л. Гарматій та ін. До музеїв Львова привозили місцеві колекції і експонати з центральних районів України. Великий внесок в організацію колекцій зробили Леся Українка, М. Біляшівський, О. Сластіон [4], [6].

В 1876 році [6] вийшла друком книга О. Пчілки "Український народний орнамент", яка вважається початком вивчення української вишивки. Авторка проаналізувала вишивки районів волинського Полісся. Автором [4] проаналізовано техніки виконання, типові орнаментальні мотиви, колірну гаму для етнографічних районів території України (таблиця). Виділено такі типи моти-

вів: геометричні; рослинні; рослинно-геометричні; зооморфні. Вишивки різних областей відрізняються тільки локальними відмінностями: техніками вишивки, мотивами чи улюбленими кольорами, водночас як закони формування вишивки – однакові.

Орнаментальні мотиви українських вишивок сягають своїм корінням у місцеву флору та фауну, в історичну традицію. У давнину основні орнаментальні мотиви

відображали елементи символіки різних стародавніх культів. Найпоширенішими геометричними мотивами у вишивці є ромб, трикутники, розетка, хрестоподібні, зіркоподібні фігури та ін. Найпоширенішими рослинними мотивами є квіти (троянди, лілії), листки, пуп'янки, плоди (виноград, черешня), дерева (дуб, калина) та ін. Серед зооморфних мотивів вишивок найчастіше трапляються птахи, тварини та ін.

Табл. 1. Локальні відмінності вишивок етнографічних регіонів

Етнографічні території	Техніки виконання	Типові орнаментальні мотиви	Колірна гама
Середнє Подніпров'я	Низь, хрестик, гладь	Рослинні: барвінок, хмелик, гілки, "ламане дерево", чернігівська берізка, грона винограду, ягід Геометричні: скісний та прямий хрест, квадрат, ромб, трикутник, зірки	Голубий, сірий, зелений, білий, пастельний
Полісся	Заволікання, гладь, занизування, застелювання	Рослинний: хміль, шашечки, ключики, терен, виноград Геометричний: ромб, ламані лінії, восьмикутні зірки, розетки Зооморфний: птахи	Червоний, чорний
Поділля	Низь, настил, хрестик, мережка, гладь	Геометричний: розетка, меандрові завитки, ромби з виступами, гачки Рослинний: "солов'їні вічка", "зерновий вивід", "довбанка", калина, вази	Червоний і чорний, житній
Буковина	Бісер, виколювання, стебнівка, гладь, мережка	Зооморфний: багатонігі птахи, зозульки, голуби, павуки Рослинний: дерева, галузки, квіти, колоски Геометричний: ромб, розетка, людські постаті	Багатоколірність у вишивці
Карпати і Прикарпаття	Хрестик, стебнівка, бісер, низь, стеклярус, металічні лелітки	Геометричний: ромби, зиг-заги, прямокутники, багатопроменева розетка, "скринькові", меандр Рослинний: квітки, галузки, "сливові", "черешневі", "соснові", "в очка"	Червоний, синій, жовтий, чорний, зелений

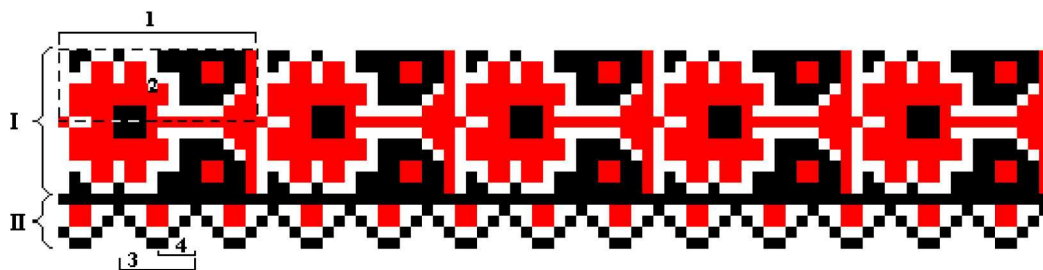


Рис. 1. Орнамент і його складові

Останнім часом українські вишиванки та вишиті речі в нашій країні і за її межами стають популярнішими за будь-який модний бренд. Вишитий одяг вибирають українські та іноземні знаменитості, прогресивна інтелігенція, будинки моди. Приємно, що вишивку популяризує також відомий модний американський журнал Vogue. Українська вишивка є чудовим зразком симетрії. Вона упродовж століть зазнала чималих змін. Вони стосувалися мотивів орнаменту і колористики, матеріалів та технік вишивки, що допомагає захоплювати і привертати увагу своєю унікальністю та впізнаваністю.

Але зміни не торкнулися законів вишивки, законів симетрії. Закони вишивки були відомі раніше, ніж математичне поняття групи. Симетрія полягала у відображенні від прямої, перенесенні орнаменту, повторі абрисів основного мотиву та ін.

Завдяки людському фактору симетрична точність у кожному виробі дещо видозмінюється. Однак, симетрія від цього не потерпає, а доповнюється прагненням свободи й відхиленням від норми. Свобода спостерігається в різноманітній колірній гамі.

2. Структура мотивів української народної вишивки. Вишивка будується з окремих мотивів або з орнаментів. Орнаменти складаються з підорнаментів [4], [5]. Підорнамент – це узор, що складається з ритмічно впорядкованих однакових елементів (побудований на одній групі перетворення) [10]. Підорнаменти діляться

на рапорти [10]. Рапортом називається мінімальна за площею область, якою можна покрити підорнамент, використовуючи тільки переноси. Рапорт, водночас, ділиться на ще менші частинки, такі як: мотив або елементарний рисунок.

На рис. 1 показано орнамент, що складається з двох підорнаментів (позначення I і II). Рапорти позначені цифрами 1 і 3, елементарні рис. 2 і 3 для підорнаментів I і II відповідно.

За критерій поділу вишивальних орнаментів візьмемо їх структурну композицію. Наведемо означення групи. Всяка сукупність, всяка множина перетворень G утворює групу, якщо виконуються наступні умови:

- 1) тотожне перетворення I належить множині G ;
- 2) якщо перетворення S належить множині G , то і S^{-1} також належить множині G ;
- 3) якщо перетворення S і T належать G , то і ST належить G .

Видатний вчений кристалограф Є. С. Федоров [4] на початку ХХ ст. дослідив періодичні орнаменти на площині і на смугі. Вченим було відкрито, що узори поділяються на скінчену кількість типів. Отже, між узорами всіх галузей мистецтва, природознавства існують фундаментальні співвідношення. Для площини все багатство періодичних узорів вклалося в 17 груп, для смуги – в 7. Досліджено [4], [5], що в вишивальних орнаментах трапляються 7 груп смуги і 12 – площини.

Групи смуги мають свої позначення і типи симетрії:

- p_1 – паралельний перенос;
- pg – ковзна симетрія;
- $p1m$ – дві осьові симетрії;
- p_2 – дві центральні симетрії;
- pmg – одна осьова і одна центральна симетрія;
- pm – один паралельний перенос і одна осьова симетрія;
- pmm – три осьові симетрії.

Групи площини мають свої позначення і типи симетрії:

- p_1 – два паралельних переноси;
- p_2 – три центральні симетрії;
- pm – дві осьові симетрії і паралельний перенос;
- pg – дві ковзні симетрії з паралельними осями;
- cm – осьова і ковзна симетрія з паралельними осями;
- pmm – симетрія відносно чотирьох сторін прямокутника;
- pmg – одна осьова і дві центральні симетрії;
- pgg – дві ковзні симетрії з перпендикулярними осями;
- cmm – дві осьові симетрії з перпендикулярними осями і одна центральна;
- $p4$ – центральна симетрія і поворотом на 90° ;
- $p4m$ – симетрія відносно трьох сторін прямокутного рівнобедреного трикутника;
- $p4g$ – осьова симетрія і поворотом на 90° .

Табл. 2. Групи смуги і їх породжувальні перетворення

Назва групи	Породжувальні перетворення в матричному вигляді		
	1-е	2-е	3-е
p_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$		
pg	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$		
$p1m$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
p_2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
pmg	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
pm	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
pmm	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Математична модель побудови груп симетрії.

Математичну модель синтезу нового зображення в матричному вигляді можна подати так:

$$I_m^c = I_m \cdot T,$$

де: I_m^c – синтезоване зображення; I_m – початкове зображення; T – породжувальне перетворення, яке в за-

гальному випадку, може складатися з композиції перетворень.

Породжувальні перетворення побудови груп представимо у вигляді матриць перетворень. x', y' – ширина і довжина рапорту. У загальному випадку матриця перетворень порядку 3×3 матиме вигляд $\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$ [4], [8],

[9], де a, b, c і d здійснюють зсув, поворот; m і n виконують зміщення, а p і q – одержання проекцій. Елемент s проводить повну зміну масштабу. При $s < 1$ відбувається збільшення, а при $s > 1$ зменшення масштабу.

Табл. 3. Групи площини і їх породжувальні перетворення

Назва групи	Породжувальні перетворення в матричному вигляді			
	1-е	2-е	3-е	4-е
p_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y' & 1 \end{bmatrix}$		
p_2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
pm	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
pg	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x' & \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}x' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' & y' & 1 \end{bmatrix}$		
cm	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' & y' & 1 \end{bmatrix}$		
pmm	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$
pmg	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2x' & y' & 1 \end{bmatrix}$	
pgg	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x' & y' & 1 \end{bmatrix}$		
cmm	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ y' & y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & y' & 1 \end{bmatrix}$	
$p4$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & y' & 1 \end{bmatrix}$	
$p4m$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$p4g$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ x' & -x' & 1 \end{bmatrix}$		



Рис. 2. Приклади вишивок орнаментальних груп на смужці: а) p_1 , б) pg , в) p_1m , г) p_2 , д) pmg , е) pm , є) pmm

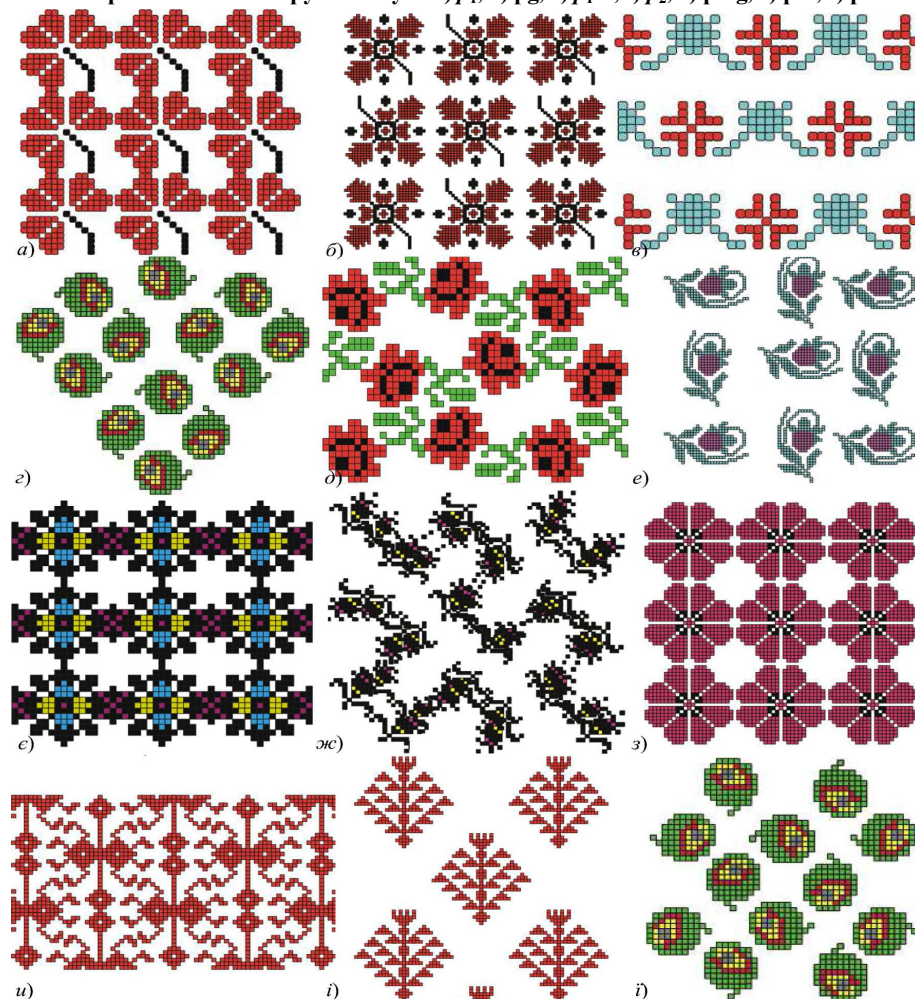


Рис. 3. Приклади вишивок орнаментальних груп на площині: а) p_1 , б) p_2 , в) pm , г) p_4 , д) pgg , е) pg , є) pmm , ж) pmg , з) $p_4 m$, и) cm , й) $p_4 g$

Породжувальні перетворення для груп смуги наведені в табл. 2. Зауважимо, що моделі наведені для ідеальних орнаментів, коли осі симетрії співпадають з OX та OY , центри симетрії з $-(0, 0)$ чи $(x', 0)$. У разі зміщення осей чи центрів симетрії в матрицях перетворень появляється елемент n .

Зразки вишиваних орнаментів відповідних груп смуги наведені на рис. 2. Вишивані орнаменти взято з джерел [6], [7]. Породжувальні перетворення для груп площини наведені в табл. 3. Моделі наведені для ідеальних орнаментів. У разі зміщення осей чи центрів симетрії, необхідно підкоректувати коефіцієнти m та n матриць перетворень.

Обговорення результатів дослідження. Зразки орнаментів вишивки відповідних груп площини наведені на рис. 3. Орнаменти створені за допомогою редактора зображень-орнаментів, який дає змогу синтезувати складні орнаментальні зображення на підставі аналітичних формул елементарного рисунка, підорнаменту та орнаменту [3], [4]. Головне вікно розробленого редактора зображень-орнаментів наведене на рис. 4. На рис. 5 наведене діалогове вікно "Малюнок", в якому створюється початкове зображення (на підставі формул [3]), на рис. 6 – синтезоване зображення групи pm .

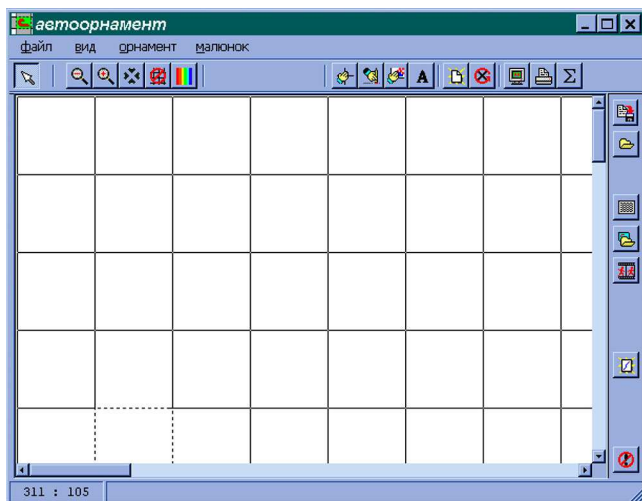


Рис. 4. Головне вікно редактора зображень-орнаментів

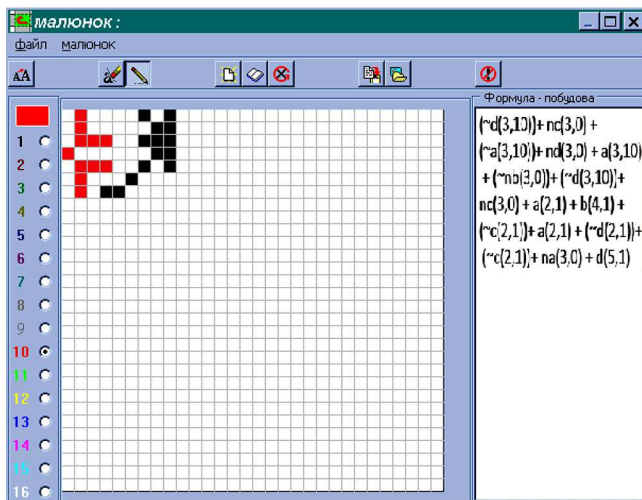


Рис. 5. Діалогове вікно "Малюнок"

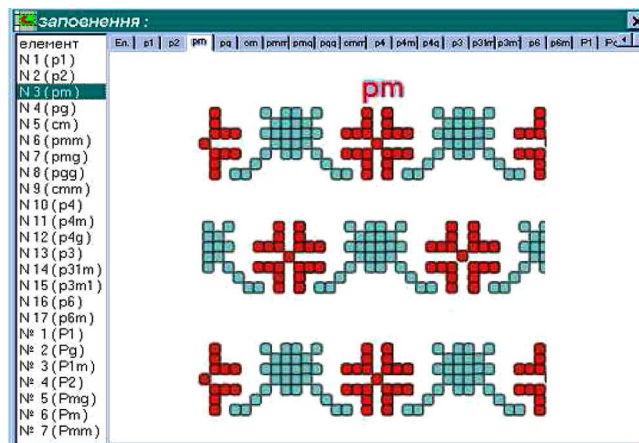


Рис. 6. Діалогове вікно "Вибір заповнення"

Висновки

1. Проведено аналіз симетрії, показано її фундаментальні властивості, які досліджені на прикладі зображень-орнаментів.
2. Проаналізовано орнаменти на прикладі української народної вишивки регіонів України, виділено особливості кожного регіону, що дало можливість синтезувати нові орнаменти. у формуванні феномену української народної вишивки.
3. Проведено структурний аналіз орнаменту, виділено його складові, на підставі чого програмно реалізовано редактор зображень-орнаментів.
4. Розроблено математичні моделі синтезу груп симетрії на смугі та площині, які використані для синтезу орнаментів української народної вишивки.
5. Розроблені математичні моделі і спроектований редактор зображень-орнаментів дають змогу ефективно зберігати наявні та синтезувати нові орнаменти. Редактор зображень-орнаментів може бути використаний для синтезу симетричних зображень в техніці, архітектурі тощо.

Подяка. Автори статті висловлюють щирю подяку член-кореспонденту НАНУ, професору Грицику Володимирі Володимировичу за оригінальну ідею застосування симетрії в українській народній вишивці. Світла пам'ять, дорогому учителю!

References

- [1] Boiko, V. M., Vanicieva, O. O., Zhali, O. Yu., & Popovych, R. O. (2020). Iz symetriiiev v zhytti ta matematytsi. *Visnyk NAN Ukrainy*, 12, 87–92. [In Ukrainian].
- [2] Fedorov, E. S. (1949). *Simmetriya i struktura kristallov: Osnovnye raboty*. Moscow: Izd-vo Akad. nauk SSSR. [In Russian].
- [3] Hrytsky, V. V., Berezka, K. M., & Berezsky, O. M. (2002). Metod opysu ta syntezu zobrazhen-ornamentiv. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 7, 64–71. [In Ukrainian].
- [4] Hrytsky, V. V., Berezka, K. M., & Berezsky, O. M. (2005). *Modeliuvannia ta syntez skladnykh zobrazhen symetrychnoi struktury*. Lviv: UAD – DNDIII. [In Ukrainian].
- [5] Hrytsky, V. V., Berezka, K. M., & Berezsky, O. M. (2004). Modeling and synthethis of complex symmetrical images. *International journal of pattern recognition and artificial intelligence*, 18(2), 175–195.
- [6] Kara-Vasyliieva, T. (1993). *Ukrainska vyshyvka: Albom*. Kyiv: Mystetstvo. [In Ukrainian].
- [7] Kupchynska, L. (2021). *Mahitia ukrainskoi vyshyvky*. Retrieved from: <http://www.lsl.lviv.ua/index.php/uk/virtualna-galereya/magiya-ukrayinskoyi-vyshyvky/>

- [8] Pavlidis, T. (1986). *Algoritmy mashinnoj grafiki i obrabotki izobrazhenij*. Moscow: Radio i svyaz. [In Russian].
- [9] Rodzhers, D., & Adams, Dzh. (1980). *Matematicheskie osnovy mashinnoj grafiki*. Moscow: Mashinostroenie. [In Russian].
- [10] Rudinskaya, A. I. (1994). *Ornament: Iskustvo matematika i hudozhnika*. Dnepropetrovsk: Izdatelstvo DGU. [In Russian].
- [11] Shubnikov, A. V., & Kopcik, V. A. (2004). *Simmetriya v nauke i iskusstve*. Moscow-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy. [In Russian].
- [12] Stoyan Yu. G., Panasenko A. A. *Periodicheskoe razmeshhenie geometricheskikh obektov*. (1978). Kyiv: Naukova dumka. [In Russian].
- [13] Urmancev, Yu. A. (1974). *Simmetriya prirody i priroda simmetrii*. Moscow: Mysl. [In Russian].
- [14] Vejl, G. (1968). *Simmetriya*. Moscow: Nauka. [In Russian].

K. M. Berezka², O. M. Berezsky^{1,2}

¹ Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

² West Ukrainian National University, Ternopil, Ukraine

SYNTHESIS OF IMAGES-ORNAMENTS

The article developed the mathematical model for the synthesis of ornamental images and implemented the software editor of ornamental images, based on symmetry theory. The paper shows the fundamental role of symmetry. It is analyzed that the symmetry theory methods are used in physics, chemistry, biology, and engineering. It was found that symmetry is based on transformation and storage. In addition, the symmetrical system is based on a set of invariants that are built according to certain rules. It is shown that the symmetry of borders and the symmetry of mesh ornaments are used in ornaments. The synthesis of ornamental images is considered on the example of Ukrainian folk embroidery. The contribution of foreign and domestic scientists to the development of the symmetry theory and synthesis of images is analyzed. It is indicated that Ukrainian folk embroidery is the valuable property of the cultural and material heritage of people and an important source of research. It is analyzed that there are more than 100 types of different embroidery techniques. The role of famous Ukrainian artists in the popularization and organization of Ukrainian folk embroidery museums is presented. It is investigated that embroidery is built from separate motives or from ornaments. Ornaments consist of sub-ornaments. A sub-ornament is a pattern consisting of rhythmically ordered identical elements (built on one group transformation). Subornaments are divided into reports. The report is called the minimum for the area of the area that can cover the sub-ornament, using only transfers. The report, in turn, is divided into even smaller particles: motive or elementary picture. It is found that in embroidery ornaments there are 7 groups of stripe and 12 - plan. Mathematical models of images-ornaments synthesis for groups of a strip and plan groups are developed. Mathematical models are given for ideal ornaments. If offsets of axes or centers of symmetries, it is necessary to adjust the coefficients of transformation matrices displacement. Samples of embroidered ornaments of the corresponding plane and stripe groups are provided. Editor of image-ornaments has been developed, which allows the synthesis of complex ornamental images based on analytical formulas of elementary picture, sub-ornament, and ornament. Examples of real and synthesized samples of Ukrainian folk embroidery are provided. The scientific novelty of the work lies in the development of mathematical models of ornaments on the basis of symmetry groups on the strip and the plane. The practical value of the work lies in the development of an image editor-ornaments.

Keywords: synthesis; image; symmetry; symmetry groups on the strip and plane; Ukrainian folk embroidery; ornament; editor of images-ornaments.

Інформація про авторів:

Березька Катерина Миколаївна, канд. техн. наук, доцент, кафедра прикладної математики. Email: km.berezka@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-9632-4004>; ResearcherID: [H-4879-2017](https://orcid.org/0000-0001-9931-4154)

Березький Олег Миколайович, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії, кафедра автоматизованих систем управління. Email: olber62@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0001-9931-4154>; ResearcherID: [I-7196-2017](https://orcid.org/0000-0001-9931-4154)

Цитування за ДСТУ: Березька К. М., Березький О. М. Синтез зображень-орнаментів. Український журнал інформаційних технологій. 2021, т. 3, № 1. С. 56–62.

Citation APA: Berezka, K. M., & Berezsky, O. M. (2021). Synthesis of images-ornaments. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 3(1), 56–62. <https://doi.org/10.23939/ujit2021.03.056>