

**Ю. І. Грицюк, Р. Б. Тушиницький**

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

## ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТАБЛИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ З ВИКОРИСТАННЯМ МНОГОЧЛЕНА ТЕЙЛОРА

Розроблено методологію локальної інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня в довільно розташованих вузлах інтерполяції, що дає можливість обчислювати їх проміжні значення між вузлами інтерполяції. Проведений аналіз останніх досліджень та публікацій у сфері інтерполяції табличних функцій показав, що основна їх частина – строга теорія інтерполяції, тобто уточнення фундаментальних її математичних положень. Розглянуто деякі особливості інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня, а саме: наведено алгоритм розв'язання та математичне формулювання задачі інтерполяції; наведено її формалізований запис, а також матричний запис процедур інтерполяції для певних значень аргумента. Наведено скалярний алгоритм розв'язання задачі інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора 2-го, 3-го і 4-го степенів, простота й наочність якого є однією з його переваг, але алгоритм незручний для програмної реалізації. Наведено математичне формулювання задачі інтерполяції табличних функцій у термінах матричної алгебри, яке зводиться до виконання таких дій: за відомими з таблиці значеннями вузлових точок потрібно обчислити матрицю Тейлора  $n$ -го степеня; за вказаними у таблиці значеннями функції потрібно сформулювати вектор-стовпець вузлів інтерполяції; розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь, коренем якої є числові коефіцієнти многочлена Тейлора  $n$ -го степеня.

Розроблено метод розрахунку коефіцієнтів інтерполянт, заданих многочленом Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної, сутність якого зводиться до добутку матриці, оберненої до матриці Тейлора, яку визначають за вузловими точками табличної функції, на вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції. На конкретних прикладах для табличних функцій від однієї незалежної змінної продемонстровано особливості розрахунку коефіцієнтів інтерполянт 2-го, 3-го і 4-го степенів, а також для кожної з них за допомогою матричного методу обчислено інтерпольовані значення функції у заданих точках. Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

**Ключові слова:** матрична алгебра; обчислювальна математика; метод Гауса; коефіцієнти інтерполянти; вузлові точки; вузли інтерполяції; алгоритм розв'язання задачі; математичне формулювання задачі.

### Вступ / Introduction

У математичному формулюванні багатьох задач з інженерії ПЗ присутні табличні функції, для яких відомими є їхні числові значення при деяких заданих значеннях аргумента (їх називають вузлами інтерполяції) [20], [21], [26]. Для обчислення значень таких функцій за потрібних значень аргументів [2], [19], [58], відмінних від табличних, для можливості виконання подальших аналітичних перетворень над рівняннями, що входять в інженерну задачу та містять такі функції [45], [46], [51], а також для можливості виконання програмних розрахунків [21], [26], [33], [60] необхідно вміти подавати кожну табличну функцію деяким аналітичним виразом [18], [35], [36], [37], [39], [41], [47].

Існує також близьке до інтерполяції завдання, яке полягає в апроксимації будь-якої складної функції іншою, більш простою функцією [2], [5], [10], [31], [39]. Йдеться про те, якщо деяка функція дуже складна для виконання продуктивних обчислень, то можна спробувати обчислити її значення у декількох точках, а вже за ними побудувати відповідну інтерполянту [3], [6], [21], [32], [60]. Зрозуміло, використання спрощеної функції не дає змоги отримати аналогічні точні результати, які давала б початкова функція. Але в деяких класах завдань досягнутий виграв у простоті та швидкості обчислень може значно переважити одержувану похибку в результатах [7], [58], [63].

Завдання визначення для табличної функції її аналітичного виразу (формули), що точно задовольняє таб-

личні дані, вирішують методами обчислювальної математики [21], [26], [33], який має назву теорія інтерполяції (від латинського префікса "*inter*", що означає "*поміж*", та латинського слова "*polus*", що означає "*полюс*"). Тут інтерполяція – спосіб знаходження проміжних значень величин за наявним дискретним набором відомих значень [20], [36], [58], [60]. Термін "інтерполяція" вперше вжив Джон Валліс у своєму трактаті "Арифметика нескінченних" (1656).

Існує багато різних способів інтерполяції табличних функцій [41], [51]. Вибір найпридатнішого алгоритму [31], [39], [63] залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його використання, наскільки гладкою є крива інтерполянти, яку кількість наборів даних (значень аргументів і відповідних значень функції) вона вимагає і т.д.

Якщо функція належить до класу алгебричних многочленів, то інтерполювання (англ. *Interpolation*) називають параболічним [2], [31], [32], [39]. Параболічна інтерполяція є найзручнішою, позаяк отримані многочлени 2-го степеня прості за формою і не мають особливих точок зміни похідних, можуть набувати довільних значень, а також їх легко обчислювати, диференціювати та інтегрувати [18], [33], [41], [45], [63]. Однак, якщо функція має дещо складніший характер, то тут доцільніше використовувати інші класи інтерполюючих функцій, наприклад степеневі многочлени. В цьому дослідженні для інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної використовуємо многочлен Тейлора  $n$ -го степеня [18], [57].

*Об'єкт дослідження* – інтерполяція табличних функцій від однієї незалежної змінної.

*Предмет дослідження* – алгоритми і метод інтерполяції табличних функцій многочленом Тейлора  $n$ -го степеня з огляду на його високу точність, необхідну стійкість та збіжність, а також належну ефективність використання комп'ютерних ресурсів.

*Мета роботи* – розробити методологію локальної інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної многочленом Тейлора  $n$ -го степеня, що дасть можливість обчислювати їх проміжні значення між довільно розташованими вузлами інтерполяції.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- з'ясуємо загальні положення інтерполяції табличних функцій многочленом Тейлора  $n$ -го степеня в довільно розташованих вузлах інтерполяції.
- наведемо алгоритм розв'язання, математичне формулювання та формалізацію задачі інтерполяції табличних функцій;
- розглянемо особливості матричного запису процедур інтерполяції табличних функцій;
- наведемо результати інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної многочленом Тейлора  $n$ -го степеня.

*Аналіз останніх досліджень та публікацій.* За останні пару десятиліть багато сучасних підходів до інтерполяції табличних функцій були розроблені та розвинені різними дослідниками з різних країн. Вони вдосконалювали як відомі класичні методи та знаходили нові підходи для підвищення точності інтерполяції. Проаналізуємо деякі з них.

Особливості застосування різних методів інтерполяції табличних функцій розглянуто в багатьох роботах як вітчизняних дослідників, так і з-за кордону. Серед вітчизняних дослідників класичним методам інтерполяції приділяли увагу Богач І. В. та Крилик Л. В. [32], [33], Бойко Л. Т. [3], Волонтир Л. О. [60], Колесницький О. К. [31], Мамчук В. І. [39], [41], Ярошенко О. І. [63], Цегелик Г. Г. [58], Фільц Р. В. та Коцюба М. В. [18], [19], [20], [21] тощо, водночас як нові методи інтерполяції розробляли Богач І. В. [36], [37], Войт Б. Л. і Романюк, О. Н. [47], Кветний Р. Н. [35], [36], [37], Москалець О. Ф. та Шутко В. М. [43], Некрасов О. Н. [45], Пагіря М. М. [46] та ін.). Серед закордонних науковців варто звернути увагу на роботи А. С. Faul, G. Goodsell і M. J. D. Powell [17], B. Hashemi та L. N. Trefethen [25], Bruno Després і Maxime Herda [4], Fan Zhang, Jinjiang Li, Peiqiang Liu та Hui Fan [16], Giampietro Allasia та Cesare Bracco [22], Jared L. Aurentz, Anthony P. Austin, Michele Benzi та Vassilis Kalantzis [29], Martin Berzins [40], Min Hu та Jieqing Tan [42], Muhammad Sarfraz та Hussain Malik Zawwar [28], [52], T. N. T. Goodman та D. S. Meek [23], Nail A. Gumerov і Ramani Duraiswami [44], Qi Duan, Yunfeng Zhang та E. H. Twizell [12], [13], [14], [15], Qiyuan Pang, Kenneth L. Ho і Haizhao Yang [50], Sergey Dolgov, Daniel Kressner і Christoph Strössner [53], Sheehan Olver і Yuan Xu [54], Yang Jing і Han Xu-li [62] тощо.

Існує багато різних способів інтерполяції табличних функцій [2], [3], [31], [32], [33], [39], [41], [58], [60], [63]. Однак, вибір найпридатнішого алгоритму залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його використання, наскільки гладкою є крива інтерполянти, яку кількість наборів даних (значень вузлів інтерполяції) вона вимагає і т.д.

У роботі [16] автори навели новий метод визначення значень параметрів (вузлів) для точок з таблиці даних, призначених для створення кривої та поверхні. З'ясовано, що з чотирма сусідніми точками з таблиці даних криву квадратичного полінома можна визначити однозначно, якщо ці точки утворюють опуклий багатокутник. Коли ці точки розміщені дещо інакше, то для інтерполяції за чотирма точками використовують кубічну поліноміальну криву з одним ступенем свободи, щоб інтерполянта мала кращу форму. Ступінь свободи було визначено шляхом мінімізації кубічного коефіцієнта кривої відповідного полінома. Переваги нового методу полягають в тому, що, по-перше, обчислені вузли мають точність квадратичного полінома, тобто якщо точки з таблиці даних взяті з кривої квадратичного полінома, і вузли використовують для його побудови, то він відтворює вихідну квадратичну криву. По-друге, новий метод є афінним інваріантом, що надзвичайно важливо, оскільки більшість методів параметризації не мають цієї властивості. По-третє, він обчислює вузли за допомогою локального методу. Проведені авторами експерименти показують, що криві, побудовані з використанням вузлів, обчислених за допомогою нового методу, мають кращу точність інтерполяції, ніж наявні методи.

В роботі [4] автори пропонують ітераційний алгоритм для обчислення сум квадратів від поліномів, що апроксимують дані в заданих точках табличної функції. Метод заснований на визначенні опуклого функціоналу  $G$ , що виникає внаслідок дуалізації квадратичної регре-

сії над факторами Холеського розкладу суми квадратів. Щоб обґрунтувати таку конструкцію, для області функціоналу  $G$  детально проаналізовано його межу та поведінку на нескінченності. Виявлено, коли дані інтерполюють позитивним одновимірним поліномом, то в контексті подання суми квадратів Лукача, функціонал  $G$  є коерцитивним і строго опуклим, що дає єдину критичну точку та відповідний розклад у суму квадратів. Для багатовимірних поліномів, які допускають розклад в суму квадратів і з точністю до малого збурення розміру  $\varepsilon$ , функціонал  $G^\varepsilon$  завжди коерцитивний, тому його мінімум дає наближений розклад у суму квадратів. Для мінімізації функціоналу  $G$  автори пропонують різні алгоритми необмеженого спуску функціоналом. Числові приклади наведено для одновимірних і двовимірних поліномів.

У роботі [29] автори наводять узагальнені матричні функції GMF (англ. *Generalized Matrix Functions*), поширюють концепцію матричної функції на прямокутні матриці шляхом їх розкладу за сингулярним значенням. Наведено декілька застосувань, пов'язаних із орієнтованими графами, гамільтоновими динамічними системами та задачами оптимізації з обмеженнями низького рангу, які вимагають виконання дії функції GMF великої розрідженої матриці на вектор. Авторами наводяться новий метод застосування функції GMF до векторів на підставі інтерполяції многочленом Чебишева. Метод не містить матриць і не вимагає ортогоналізації та мінімального додаткового сховища даних. Порівняння з наявними підходами, заснованими на бідіагоналізації Ланцоша, демонструють конкурентоспроможність авторського підходу. Також вони стверджують, що їхній метод надзвичайно стійкий, узагальнюючи доведення зворотної стійкості алгоритму Кленшоу на випадок матриці.

В роботі [6] обговорено основи моделювання з більшою увагою до використання рядів Тейлора [57]. Встановлено, що ряд Тейлора є одним із основних стовпів багатьох чисельних методів, що показано в таких розділах [5], [7], [8]. З'ясовано, що будь-яку неперервну функцію можна розкласти в ряд Тейлора. Якщо потрібно оцінити функцію в точці, розміщеній не так далеко від відомої точки, то таку функцію можна спрощено апроксимувати і навіть лінеаризувати в цій точці [10]. Красу та застосовність серії рядів Тейлора автори досліджують в декількох наступних розділах. У цьому ж розділі побудовано ряд Тейлора та обговорено його властивості.

В роботі [9] розглянуто степеневі ряди є корисними інструментами, які можна використовувати для розширення інших функцій, розв'язування рівнянь, забезпечення процедури оцінювання інтервалів збіжності, використання як пробних функцій і їх застосування в усіх галузях техніки. До таких рядів входять ряди Тейлора [57], які надзвичайно важливі для числових наближень. Наведено короткий опис степеневих рядів із кількома застосуваннями. Водночас, у роботі [31] автори пробують довести, що голоморфні функції можуть бути локально подані рядами Тейлора.

В роботі [56] автор вказав на те, що метод квадратичної інтерполяції, який був рекомендований в довідковій літературі для мінімізації функції від однієї змінної, в деяких випадках може бути дуже ненадійним. Зокрема, якщо функція, яку потрібно мінімізувати, сама по собі не є квадратичною, то метод може не спрацюва-

ти, незалежно від того, наскільки близько до мінімального значення взято нульове наближення.

В роботі [11] авторами досліджено задачу визначення оптимальних інцидентів для триангуляції заданої множини вершин стосовно модельної задачі інтерполяції опуклої квадратичної поверхні кусково-лінійними функціями. Отримано точний вираз для визначення максимальної похибки, а критерієм оптимальності стала мінімізація максимальної похибки. Показано, що оптимальні інциденти можна вивести з асоційованої триангуляції Делоне і, як наслідок, обчислити  $O(\log N)$  складності тривалість розрахунку для  $N$  вершин.

Робота [53] стосується апроксимації функції від трьох змінних, визначеної в області тензорного добутку, за допомогою оцінок функції. Поєднання тензоризованої інтерполяції многочленом Чебишева з розкладом Такера низького мультилінійного рангу дає наближення функції, яке можна дуже ефективно як обчислювати, так і зберігати. Наявний алгоритм Chebfun3 [25] використовує подібний формат, але побудова наближення многочленом Чебишева відбувається опосередковано через так звану декомпозицію зрізу Такера. Як наслідок, алгоритм Chebfun3 іноді без потреби використовує багато оцінок функцій і не повною мірою користується потенціалом декомпозиції Такера, щоб іноді різко зменшити витрати на обчислення. Авторами пропонують новий алгоритм Chebfun3F, який використовує одновимірні волокна замість двовимірних зрізів для побудови розкладу Такера. Алгоритм Chebfun3F зменшує витрати часу на наближення многочленом Чебишева з точки зору кількості оцінок функцій для майже всіх розглянутих функцій, як правило, на 75 %, а іноді й на понад 98 %.

У роботі [44] автори розглядають ітераційний алгоритм попереднього підпростору Крилова, поданий Фоллом, Гудселлом і Пауелом [17] для обчислення коефіцієнтів інтерполянти радіальної базисної функції за  $N$  точками з таблиці даних. Було продемонстровано, що ця попередньо обумовлена ітерація Крилова є надзвичайно стійкою до розподілу точок, а ітераційна процедура є швидко збіжною. Однак ітераційний метод має декілька кроків, під час яких витрати часу на їх обчислення та використана пам'ять масштабуються  $O(N^2)$  складністю, як і у попередніх обчисленнях, які реалізують за допомогою передобумовлювача, а також в матрично-векторному добутку, що бере участь у кожному кроці ітерації. Авторами ефективно пришвидшують ітераційний метод для досягнення загальної складності алгоритму  $O(\log N)$ . Матрично-векторний добуток можна пришвидшити за допомогою швидкого мультипольного методу. Передкондиціонер вимагає початкового обчислення набору точок, найближчих до кожної точки. Авторами розробили  $O(\log N)$  складності алгоритм і для виконання цього кроку. Результати розрахунку наведено для мультиквадратичної інтерполяції в просторі  $\mathbb{R}^2$  і бігармонійної інтерполяції в просторі  $\mathbb{R}^3$ . Також наведено новий алгоритм FMM (англ. *Finite Mixture Model*) для оцінювання сум квадратів, що містять багатоквадратичні функції в просторі  $\mathbb{R}^2$ . Нагадаємо, що алгоритм FMM, наведений Рохліним-молодшим і Грінгардом, вважається одним із десяти найкращих алгоритмів 20-го століття. Він знижує складність множення матриці на вектор з використанням певного типу щіль-

ної матриці, яка може виникнути з багатьох фізичних системах.

У роботі [50] автори наводять "незалежну від ядра" інтерполяційну декомпозицію типу "метелик" IDBF (англ. *Interpolative Decomposition Butterfly Factorization*) як наближення з розрідженими даними для матриць, які задовольняють додаткову властивість низького рангу. IDBF можна побудувати  $O(\log N)$  складності операції для  $N \times N$  матриці за допомогою ієрархічних інтерполяційних розкладів ID (англ. *Interpolative Decompositions*), якщо записи матриці можна відібрати окремо, і кожна вибірка займає  $O(N)$  складні операції. Отриманий розклад на множники є добутком  $O(\log N)$  складності розріджених матриць, кожна з яких має  $O(N)$  ненульові записи. Отже, його можна швидко застосувати до вектора  $O(\log N)$  складності операції. Водночас, IDBF – загальна структура для майже оптимального швидкого множення матриці на вектор (matvec), яка корисна в широкому діапазоні програм, наприклад, перетворення спеціальних функцій, інтегральні оператори Фур'є [27] та обчислення високочастотних хвиль. Численні результати наведено для демонстрації ефективності факторизації метелика та алгоритмів його побудови.

В роботі [1] автор спробував навести деякі особливості багатовимірної поліноміальної інтерполяції Ерміта. Він акцентує увагу на алгебраїчних міркуваннях, комбінаторних і геометричних особливостях рівномірної та нерівномірної двомірної інтерполяції та на деяких проблемах вищої розмірності. Автор також досліджує деякі диференціальні особливості вирішення даної проблеми.

В роботі [34] автори наводять інтерполяцію табличних даних поліномами Лагранжа та Ерміта, тригонометричними поліномами, поліномами Чебишева та узагальненими поліномами, пристосованими до системи координат Чебишева. Виведено та уточнено формули Лагранжа та Ньютона для знаходження інтерполяційних поліномів. З'ясовано, що модулі системи комп'ютерної алгебри Mathematica призначені для визначення інтерполяційних поліномів. Сформульовано та доведено фундаментальні теореми про інтерполяцію з оцінками меж похибок. Застосування теорем з'ясовано на відповідних прикладах.

У роботі [62] автори застосували рівномірний В-сплайн для побудови надійних моделей стосовно задач інтерполяції інтервальних даних. Порівняно з надійними моделями традиційного поліноміального сплайна, В-сплайн-моделі, запропоновані в роботі, мають багато переваг, які дають можливість розв'язати очевидну задачу скінченної опуклої оптимізації завдяки більш лаконічним формулюванням і дещо спрощеному обчислювальному процесу. Запропоновано метод створення характерних вершин полігону на підставі заданих інтервальних даних для підвищення ступеня свободи моделей. Робастні оптимізаційні моделі, які часто використовують для однорідних квадратичних і кубічних В-сплайнів, детально сформульовано як задачі скінченної опуклої оптимізації, які можна застосувати до наявних алгоритмів оптимізації та програмного забезпечення.

В роботі [48] автори навели велику кількість схем інтерполяції, які оцінювали з точки зору їх відносної точності. Така кількість схем виникає при розгляді комбінацій інтерполяційних форм (кусково-кубічних полі-

номів, кусково-раціональних квадратичних і кубічних поліномів і кусково-квадратичних поліномів Бернштейна), похідних оцінок (Акіма, Хаймана, арифметичні, геометричні та гармонічні середні та Фріча–Бутланда), і модифікація цих оцінок, необхідна для забезпечення монотонності та/або опуклості на виразі інтерполянти. Використані методи збереження форми кривої зберігають в інтерполянти монотонність і/або опуклість, яка міститься в дискретних даних.

Різні схеми інтерполяції спочатку порівнювали шляхом оцінювання їхньої здатності інтерполювати рівномірно розподілені дані, отримані з трьох тестових форм (гауса, косинуса та трикутника) з двома роздільними здатностями. В роботі [48] наведено деталі косинусних тестів, водночас як інші тести наведено в супровідному технічному звіті. З'ясовано, що з монотонних інтерполянт найбільш точними є: кубічна інтерполяція Ерміта з похідною оцінкою Хаймана, модифікована для отримання монотонності, яку було запропоновано де Буром і Шварцем; друга версія раціонального кубічного сплайна, запропонована Дельбурго та Грегорі, з похідною оцінкою Хаймана, модифікована для отримання монотонності; кусково-квадратичні поліноми Бернштейна, запропоновані Макалістором і Рулье з похідною оцінкою Хаймана, також модифікована для отримання монотонності. З'ясовано, що накладання строгої монотонності на дискретні екстремуми вносить значні помилки монотонності. Точніші результати інтерполяції отримують, якщо ця вимога пом'якшена в екстремумах. Кубічну інтерполяцію Ерміта покращено шляхом послаблення строгого обмеження монотонності до обмеження, запропонованого Хайманом на екстремуми. Аналогічно точність інтерполяції раціональними та кусково-квадратичними поліномами Бернштейна можна покращити, вимагаючи тільки дотримання опуклості/увігнутості, а не отримання монотонності [55].

Деякі з більш точних методів інтерполяції внесені в напівлагранжевий метод транспортування та перевірені шляхом визначення точності рішення для одновимірної адвекції тестових фігур в однорідному полі швидкості. Встановлено [48], що напівлагранжевий метод із використанням монотонних інтерполянт забезпечує монотонні рішення. Водночас, напівлагранжевий метод із використанням інтерполянт, які підтримують опуклі/увігнуті обмеження, дає рішення, які по суті не є коливальними. Монотонні форми з часом пом'якшують рішення, більше для вузьких, ніж для широких структур. Найкращими монотонними формами є кубічна інтерполяція Ерміта з оцінками похідної Акіми або Хаймана, модифікованими для отримання монотонності з  $C^0$  безперервністю. Відповідна монотонність з  $C^1$  безперервності форми мають неприйнятні фазові помилки з використанням інтерполяції Ерміта. Раціональну кубічну інтерполяцію з оцінкою похідної Хаймана, модифіковану для отримання монотонності, порівнюють з  $C^0$  безперервністю форми Ерміта, яка була описана вище [55]. Монотонність з  $C^1$  раціональністю форми не має фазової похибки, яку можна побачити в  $C^1$  інтерполяцією Ерміта. По суті неосциляційні форми згасають набагато менше, ніж монотонні форми. Рішення, які використовували раціональні кубічні інтерполянти з оцінкою похідної Хаймана, модифіковану для задоволення обмеження опуклості/увігнутості, були найбільш за-

довільними зі схем інтерполяції, де вимагають збереження форми.

В роботі [40] автор спробував вирішити багато реальних проблем, які можна успішно моделювати диференціальними рівняннями в частинних похідних. Багато чисельних розв'язків цих задач використовують трикутні та чотиригранні сітки для точного моделювання складних геометричних фігур. Такі проблеми часто містять сплески та розриви, і важливо розробити методи інтерполяції, які можуть наближено вирішувати такі особливості геометричних фігур. Розроблені інтерполянти потрібні для простого оброблення даних, наприклад, для візуалізації та відновлення значень розв'язку в довільних точках числової області. У роботі описано квадратичну інтерполяцію на підставі трикутника, який "обмежений даними", тому не створює жодних значень за межами діапазону наявних точок з таблиці даних. Метод порівнюють зі стандартною квадратичною інтерполяцією й поширюють на випадок квадратичних тетраедричних елементів.

У роботі [59] для збереження форми конічних і періодичних даних автори пропонують клас раціональних кубічних тригонометричних фрактальних інтерполяційних функцій RCTFIFs (англ. *Rational Cubic Trigonometric Fractal Interpolation Functions*), які є узагальненою фрактальною версією класичного раціонального кубічного тригонометричного поліноміального сплайна, форма яких і є кубічними тригонометричними поліномами з чотирма параметрами форми в кожному підінтервалі [55]. Ними проведено аналіз конвергенції запропонованого RCTFIFs, які слідують обмеженій природі набору даних, коли вони знаходяться зверху над прямою лінією або обмежені верхньою та нижньою межами. Також виведено достатні умови для збереження додатності та монотонності даних інтерполяції.

В роботі [54] автори вивчали ортогональні поліноми на квадратних кривих, розташованих на площині. До них належать ортогональні поліноми на еліпсах, параболах, гіперболах і двох прямих. Для побудови інтеграла відносно відповідної вагової функції, визначеної на будь-якій квадратичній кривій, явний базис ортогональних поліномів будують в термінах двох його сімейств для однієї змінної. У кожному випадку автори також досліджували збіжність ортогональних розкладів Фур'є [27]. За результатами дослідження для вирішення проблеми було обговорено можливість застосування розширення Фур'є, інтерполяцію функцій з сингулярностями або близькими до них і розв'язок рівняння Шредінгера з недиференційованими або майже недиференційованими потенціалами.

Отже, проведений аналіз останніх досліджень та публікацій у сфері інтерполяції табличних функцій показав, що багатьма авторами розроблено потужний математичний апарат, який можна використовувати для розв'язання широкого кола задач як наукового, так і парикладного характеру. Але основна частина досліджень – строга теорія інтерполяції, тобто уточнення фундаментальних її математичних положень. Проте, якщо локальна інтерполяція практично немає застережень, то глобальна інтерполяція не позбавлена значних недоліків, пов'язаних не через нагромадження похибок обчислення за великої кількості вузлів інтерполяції, а через форму кривої між вузлами інтерполяції, яка зазвичай має недостовірний характер.

## Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

Потреба наближення функції виникає тоді, коли для неї, будучи заданою дискретними значеннями аргумента у вигляді таблиці, необхідно знайти відповідні значення функції в проміжних точках. Накладаючи вимогу, щоб наближена функція у вузлах співпадала з табличними значеннями, одержуємо задачу інтерполяції. Розглянемо деякі постановки задач інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня [57].

**Задача 1.** Для функції  $V = V[x]$ , заданої табл. 1, потрібно вивести аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора для однієї незалежної змінної з числовими коефіцієнтами. За отриманим виразом інтерполянти потрібно обчислити її значення для такого діапазону зміни аргумента  $x = 2(1)20$ .

**Табл. 1.** Значення табличної функції від однієї незалежної змінної / The value of the tabular function from one independent variable

№ вузла	1	2	3
$x, \text{мм}^2$	4,2	10,3	17,1
$V, \text{Вт}$	8,3	17,6	12,4

**Задача 2.** Для функції  $V = V[x]$ , заданої табл. 2, потрібно вивести аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора для однієї незалежної змінної з числовими коефіцієнтами. За отриманим виразом інтерполянти потрібно обчислити її значення для такого діапазону зміни аргумента  $x = 10(1)22$ .

**Табл. 2.** Значення табличної функції від однієї незалежної змінної / The value of the tabular function from one independent variable

№ вузла	1	2	3	4
$x, \text{шт}$	11	14	17	20
$V, \text{байт}$	244	3 126	16 808	59 050
$V, \text{од.}$	7,93	11,61	14,04	15,85

В табл. 2 значення табличної функції наведено як у байтах, так і в логарифмічних одиницях за двійковою основі. Всі подальші розрахунки потрібно виконати в од., а потім перевести в шт.

**Задача 3.** Для функції  $V = V[x]$ , заданої табл. 3, потрібно вивести аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора для однієї незалежної змінної з числовими коефіцієнтами. За отриманим виразом інтерполянти потрібно обчислити її значення для такого діапазону зміни аргумента  $x = 10(1)25$ .

**Табл. 3.** Значення табличної функції від однієї незалежної змінної / The value of the tabular function from one independent variable

№ вузла	1	2	3	4	5
$x, \text{шт}$	11	14	17	20	23
$V, \text{байт}$	149808	3126	94756	4905	161052
$V, \text{од.}$	17,19	11,61	16,53	12,26	17,30

В табл. 3 значення табличної функції наведено як у байтах, так і в логарифмічних одиницях за двійковою основі. Всі подальші розрахунки потрібно виконати в од., а потім перевести в шт.

**1. Алгоритм розв'язання задачі інтерполяції табличних функцій.** Загалом табличну функцію  $V = V''[x]$

від однієї незалежної змінної подамо аналітично інтерполянтю у вигляді многочлена Тейлора  $n$ -го степеня:

$$V = V^n[x] = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + c_n \frac{x^n}{n!}, \quad (1)$$

де:  $x$  – незалежна змінна;  $\bar{C} = [c_j, j = \overline{0, n}]$  – коефіцієнти інтерполянти;  $n$  – степінь многочлена Тейлора.

Розглянемо алгоритм розв'язання задач інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора спочатку на конкретних прикладах.

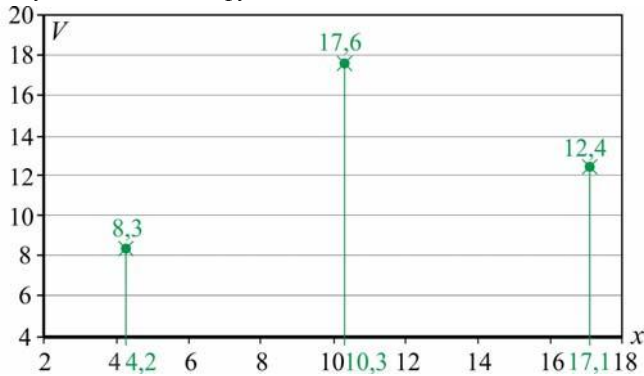
**1.1.** В системі координат  $OxV$  нанесемо точки (див. рис. 1), значення яких наведено в табл. 1. Оскільки в цій таблиці присутні три вузлові точки, то вираз інтерполянти матиме три коефіцієнти. Такій кількості коефіцієнтів многочлен Тейлора для однієї незалежної змінної відповідає 2-му степеню, тобто  $n = 2$ . Отже, для табличної функції вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами матиме такий вигляд:

$$V^2[x] = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!}. \quad (2)$$

Застосувавши вираз (2) послідовно до кожного вузла табличної функції, отримаємо таку лінійну систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{x_1}{1!} + c_2 \frac{x_1^2}{2!} = v_1; \\ c_0 + c_1 \frac{x_2}{1!} + c_2 \frac{x_2^2}{2!} = v_2; \\ c_0 + c_1 \frac{x_3}{1!} + c_2 \frac{x_3^2}{2!} = v_3; \end{cases} \quad (3)$$

де:  $\bar{X} = [x_p, p = \overline{1, 3}]$  – значення вузлових точок;  $\bar{V} = [v_p, p = \overline{1, 3}]$  – вузлові значення функції, відомі з табл. 1.



**Рис. 1.** Графічне подання вузлів табличної функції від однієї незалежної змінної (див. табл. 1) / Graphic representation of nodes of the tabular function from one independent variable (see Table 1)

З урахуванням значень вузлових точок (див. табл. 1), лінійна система рівнянь (3) набуде такого скалярного вигляду:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{4,2}{1!} + c_2 \frac{4,2^2}{2!} = 8,3; \\ c_0 + c_1 \frac{10,3}{1!} + c_2 \frac{10,3^2}{2!} = 17,6; \\ c_0 + c_1 \frac{17,1}{1!} + c_2 \frac{17,1^2}{2!} = 12,4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 4,2 + c_2 8,82 = 8,3; \\ c_0 + c_1 10,3 + c_2 53,045 = 17,6; \\ c_0 + c_1 17,1 + c_2 146,205 = 12,4. \end{cases} \quad (4)$$

Отримана система (4) є лінійною системою алгебричних рівнянь з трьома невідомими  $\bar{C} = [c_j, j = \overline{0, 2}]$ . Роз-

в'язавши її (наприклад, методом Гауса), матимемо такі корені системи рівнянь:

$$c_0 = -5,780; c_1 = 4,0978; c_2 = -0,35493. \quad (5)$$

Підставивши у вираз інтерполянти (2) з буквеними коефіцієнтами їх числові значення з (5), отримаємо аналітичний вираз інтерполянти з числовими коефіцієнтами, а саме:

$$V^2[x] = -5,780 + 4,0978 \frac{x}{1!} - 0,35493 \frac{x^2}{2!}, \quad (6)$$

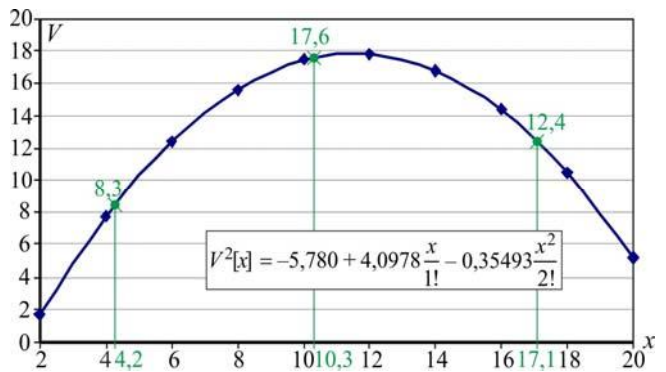
який є результатом розв'язання поставленої задачі, тобто вираз (6) є інтерполянтю функції, заданої табл. 1.

Інтерполянта (6) дає змогу обчислити значення функції за певних значень аргумента  $x$  з діапазону  $4,2 \leq x \leq 17,1$ , тобто, вона є придатною для інтерполяції функції, заданої табл. 1. Її також можна використовувати для деякого невеликого діапазону значень  $x < 4,2$  та для  $x > 17,1$ , тобто, для екстраполяції табличної функції. Однак, тут потрібно бути обережним, бо інколи значне відхилення від вузлових точок може призвести до хибних результатів екстраполяції.

Якщо за виразом (6) обчислити значення функції  $V = V^2[x]$  для декількох значень аргумента  $x$  з діапазону  $2 \leq x \leq 20$ , наприклад, з кроком  $\Delta x = 2$ , то отримаємо табл. 4. Її відповідає графік інтерпольованих значень функції, який зображено на рис. 2.

**Табл. 4.** Значення табличної функції, обчислені за інтерполянтю (6) / Table function values calculated by interpolant (6)

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x, \text{ мм}^2$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$V, \text{ Вт}$	1,71	7,77	12,42	15,64	17,45	17,84	16,81	14,35	10,48	5,19



**Рис. 2.** Графічне подання інтерпольованих значень функції многочленом Тейлора 2-го степеня (див. табл. 4) / Graphic representation of interpolated function values by Taylor polynomial of the 2nd degree (see Table 4)

**1.2.** В системі координат  $OxV$  нанесемо точки (див. рис. 3), значення яких наведено в табл. 2. Оскільки в цій таблиці присутні чотири вузлові точки, то вираз інтерполянти матиме чотири коефіцієнти. Такій кількості коефіцієнтів многочлен Тейлора для однієї незалежної змінної відповідає 3-му степеню, тобто  $n = 3$ . Отже, для табличної функції вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами матиме такий вигляд:

$$V^3[x] = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!}. \quad (7)$$

Застосувавши вираз (7) послідовно до кожного вузла табличної функції, отримаємо таку лінійну систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{x_1}{1!} + c_2 \frac{x_1^2}{2!} + c_3 \frac{x_1^3}{3!} = v_1; \\ c_0 + c_1 \frac{x_2}{1!} + c_2 \frac{x_2^2}{2!} + c_3 \frac{x_2^3}{3!} = v_2; \\ c_0 + c_1 \frac{x_3}{1!} + c_2 \frac{x_3^2}{2!} + c_3 \frac{x_3^3}{3!} = v_3; \\ c_0 + c_1 \frac{x_4}{1!} + c_2 \frac{x_4^2}{2!} + c_3 \frac{x_4^3}{3!} = v_4, \end{cases} \quad (8)$$

де:  $\bar{X}=[x_p, p=\overline{1,4}]$  – значення вузлових точок;  $\bar{V}=[v_p, p=\overline{1,4}]$  – вузлові значення функції, відомі з табл. 2.

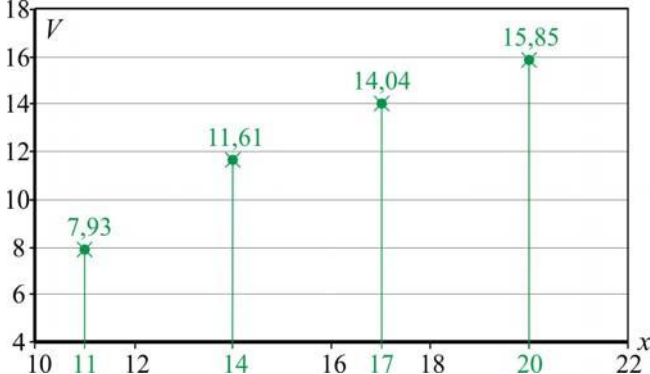


Рис. 3. Графічне подання вузлів табличної функції від однієї незалежної змінної (див. табл. 2) / Graphic representation of nodes of the tabular function from one independent variable (see Table 2)

З урахуванням значень вузлових точок (див. табл. 2), лінійна система рівнянь (8) набуде такого скалярного вигляду:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{11}{1!} + c_2 \frac{11^2}{2!} + c_3 \frac{11^3}{3!} = 7,93; \\ c_0 + c_1 \frac{14}{1!} + c_2 \frac{14^2}{2!} + c_3 \frac{14^3}{3!} = 11,61; \\ c_0 + c_1 \frac{17}{1!} + c_2 \frac{17^2}{2!} + c_3 \frac{17^3}{3!} = 14,04; \\ c_0 + c_1 \frac{20}{1!} + c_2 \frac{20^2}{2!} + c_3 \frac{20^3}{3!} = 15,85; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + c_1 11 + c_2 60,5 + c_3 221,83 = 7,93; \\ c_0 + c_1 14 + c_2 98,0 + c_3 457,33 = 11,61; \\ c_0 + c_1 17 + c_2 144,5 + c_3 818,83 = 14,04; \\ c_0 + c_1 20 + c_2 200,0 + c_3 1333,33 = 15,85. \end{cases} \quad (9)$$

Отримана система (9) є лінійною системою алгебричних рівнянь з чотирма невідомими  $\bar{C}=[c_j, j=\overline{0,3}]$ . Розв'язавши її (наприклад, методом Гауса), матимемо такі корені системи рівнянь:

Табл. 5. Значення табличної функції, обчислені за інтерполятою (10) / Table function values calculated by interpolant (10)

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13
x, шт	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
V, од.	6,32	7,93	9,34	10,55	11,61	12,53	13,33	14,04	14,68	15,27	15,85	16,43	17,03	17,69
V, байт	80	244	646	1504	3126	5901	10281	16808	26210	39627	59050	88161	134054	211033

1.3. В системі координат  $OxV$  нанесемо точки (див. рис. 5), значення яких наведено в табл. 3. Оскільки в цій таблиці присутні п'ять вузлових точок, то вираз інтерполянти матиме п'ять коефіцієнтів. Такій кількості коефіцієнтів многочлен Тейлора для однієї незалежної змінної відповідає 4-му степеню, тобто  $n = 4$ . Отже, для табличної функції вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами матиме такий вигляд:

$$V^3[x] = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!} + c_4 \frac{x^4}{4!}. \quad (11)$$

$$c_0 = -26,439; c_1 = 5,2144; c_2 = -0,4656; c_3 = 0,0233.$$

Підставивши у вираз інтерполянти (7) з буквеними коефіцієнтами їх числові значення, отримаємо аналітичний вираз інтерполянти з числовими коефіцієнтами, а саме:

$$V^3[x] = -26,439 + 5,2144 \frac{x}{1!} - 0,4656 \frac{x^2}{2!} + 0,02333 \frac{x^3}{3!}, \quad (10)$$

який і є результатом розв'язання поставленої задачі, тобто вираз (10) є інтерполянтою функції, заданої табл. 2.

Інтерполянта (10) дає змогу обчислити значення функції за певних значень аргумента  $x$  з діапазону  $11 \leq x \leq 20$ , тобто, вона є придатною для інтерполяції функції, заданої табл. 2. Її також можна використовувати для деякого невеликого діапазону значень  $x < 11$  та для  $x > 20$ , тобто, для екстраполяції табличної функції. Якщо за виразом (10) обчислити значення функції  $V = V^3[x]$  для декількох значень незалежної змінної, наприклад, з діапазону  $10 \leq x \leq 23$  з кроком  $\Delta x = 1$ , то отримаємо табл. 5. Їй відповідає графік інтерпольованих значень функції, який зображено на рис. 4.

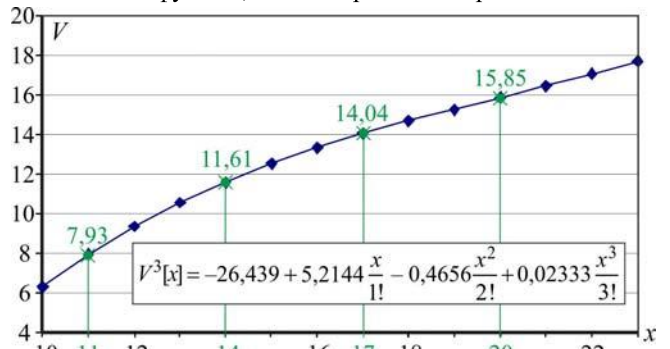


Рис. 4. Графічне подання інтерпольованих значень функції многочленом Тейлора 3-го степеня (див. табл. 5) / Graphic representation of the interpolated values of the function by the Taylor polynomial of the 3rd degree (see Table 5)

Також звернемо увагу на те, що розрахунки було виконано для вузлів табличної функції з розмірністю в логарифмічних одиницях за двійкової основи, тому далі потрібно повернутися до розмірності в байтах. Тобто, кожне значення (в од.), будучи степенем за основи 2, потрібно обчислити, внаслідок чого отримані значення, як не дивно, будуть повністю співпадати з початковими у вузлових точках.

Застосувавши вираз (11) послідовно до кожного вузла табличної функції, отримаємо таку лінійну систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{x_1}{1!} + c_2 \frac{x_1^2}{2!} + c_3 \frac{x_1^3}{3!} + c_4 \frac{x_1^4}{4!} = v_1; \\ c_0 + c_1 \frac{x_2}{1!} + c_2 \frac{x_2^2}{2!} + c_3 \frac{x_2^3}{3!} + c_4 \frac{x_2^4}{4!} = v_2; \\ c_0 + c_1 \frac{x_3}{1!} + c_2 \frac{x_3^2}{2!} + c_3 \frac{x_3^3}{3!} + c_4 \frac{x_3^4}{4!} = v_3; \\ c_0 + c_1 \frac{x_4}{1!} + c_2 \frac{x_4^2}{2!} + c_3 \frac{x_4^3}{3!} + c_4 \frac{x_4^4}{4!} = v_4; \\ c_0 + c_1 \frac{x_5}{1!} + c_2 \frac{x_5^2}{2!} + c_3 \frac{x_5^3}{3!} + c_4 \frac{x_5^4}{4!} = v_5, \end{cases} \quad (12)$$

де:  $\bar{X}=[x_p, p=\bar{1}, \bar{5}]$  – значення вузлових точок;  $\bar{V}=[v_p, p=\bar{1}, \bar{5}]$  – вузлові значення функції, відомі з табл. 4.

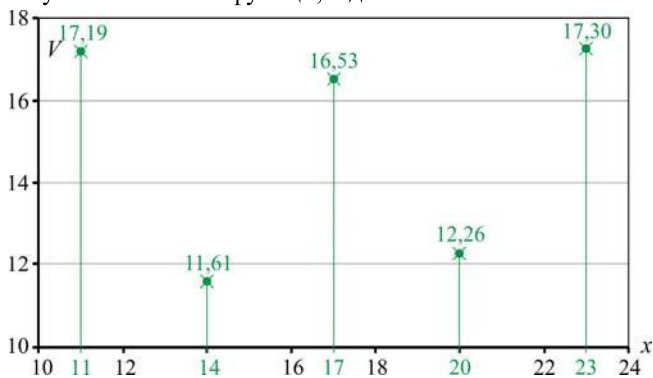


Рис. 5. Графічне подання вузлів табличної функції від однієї незалежної змінної (див. табл. 3) / Graphic representation of nodes of the tabular function from one independent variable (see Table 3)

З урахуванням значень вузлових точок (див. табл. 3), лінійна система рівнянь (12) набуде такого скалярного вигляду:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{11}{1!} + c_2 \frac{11^2}{2!} + c_3 \frac{11^3}{3!} + c_4 \frac{11^4}{4!} = 17,19; \\ c_0 + c_1 \frac{14}{1!} + c_2 \frac{14^2}{2!} + c_3 \frac{14^3}{3!} + c_4 \frac{14^4}{4!} = 11,61; \\ c_0 + c_1 \frac{17}{1!} + c_2 \frac{17^2}{2!} + c_3 \frac{17^3}{3!} + c_4 \frac{17^4}{4!} = 16,53; \\ c_0 + c_1 \frac{20}{1!} + c_2 \frac{20^2}{2!} + c_3 \frac{20^3}{3!} + c_4 \frac{20^4}{4!} = 12,26; \\ c_0 + c_1 \frac{23}{1!} + c_2 \frac{23^2}{2!} + c_3 \frac{23^3}{3!} + c_4 \frac{23^4}{4!} = 17,30; \end{cases} \quad (13)$$

яка після виконання дій над числами матиме вигляд:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 11 + c_2 60,5 + c_3 221,8 + c_4 610,0 = 17,19; \\ c_0 + c_1 14 + c_2 98,0 + c_3 457,3 + c_4 1600,7 = 11,61; \\ c_0 + c_1 17 + c_2 144,5 + c_3 818,8 + c_4 3480,0 = 16,53; \\ c_0 + c_1 20 + c_2 200,0 + c_3 1333,3 + c_4 6666,7 = 12,26; \\ c_0 + c_1 23 + c_2 264,8 + c_3 2027,8 + c_4 11660,0 = 17,30. \end{cases} \quad (14)$$

Отримана система (14) є лінійною системою алгебричних рівнянь з чотирма невідомими  $\bar{C}=[c_j, j=\bar{0}, \bar{4}]$ . Розв'язавши її (наприклад, методом Гауса), матимемо такі корені системи рівнянь:

$$c_0 = 1474,78; c_1 = -365,85; c_2 = 67,150; c_3 = -8,0396; c_4 = 0,47162.$$

Підставивши у вираз інтерполянти (11) з буквеними коефіцієнтами їх числові значення, отримаємо аналі-

Табл. 6. Значення табличної функції, обчислені за інтерполянтою (15) / Table function values calculated by interpolant (15)

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x$ , шт	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$V$ , од.	17,19	11,38	10,23	11,61	13,84	15,73	16,53	16,00	14,35	12,26	10,89	11,87	17,30
$V$ , байт	149808	2659	1202	3126	14688	54204	94756	65618	20874	4905	1898	3742	161052

Отже, для розв'язання задачі інтерполяції табличних функцій з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня потрібно виконати такі дії:

- записати вираз інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора з буквеними коефіцієнтами, степінь якого відповідає кількості вузлів табличної функції, а саме  $n+1 = P$ ;
- застосувати вираз інтерполянти послідовно до кожного вузла табличної функції, внаслідок чого отримаємо систему рівнянь, яка після виконання дій над числами стане лінійною системою алгебричних рівнянь;
- розв'язати систему рівнянь (наприклад, методом Гауса), внаслідок чого отримаємо корені системи, які водночас будуть числовими коефіцієнтами інтерполянти;

тичний вираз інтерполянти з числовими коефіцієнтами, а саме:

$$V^4[x] = 1474,78 - 365,85 \frac{x}{1!} + 67,150 \frac{x^2}{2!} - 8,0396 \frac{x^3}{3!} + 0,47162 \frac{x^4}{4!}, \quad (15)$$

який є результатом розв'язання поставленої задачі, тобто вираз (15) є інтерполянтою функції, заданої табл. 3.

Інтерполянта (15) дає змогу обчислити значення функції за певних значень аргумента  $x$  з діапазону  $11 \leq x \leq 23$ , тобто, вона є придатною для інтерполяції функції, заданої табл. 3. Її також можна використовувати для деякого невеликого діапазону значень  $x < 11$  та для  $x > 23$ , тобто, для екстраполяції табличної функції. Оскільки обчислення виконували для вузлів табличної функції з розмірністю в логарифмічних одиницях за двійкової основи, тому далі потрібно повернутися до розмірності в байтах. Тобто, кожне значення (в од.), будучи степенем за основи 2, потрібно обчислити, а отриманий результат заокруглити до найближчого цілого.

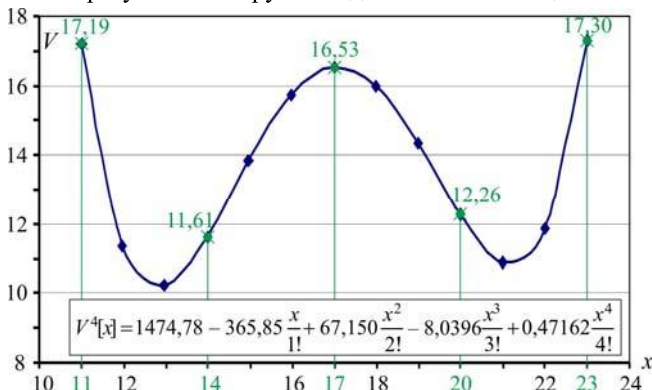


Рис. 6. Графічне подання інтерпольованих значень функції многочленом Тейлора 4-го степеня (див. табл. 6) / Graphic representation of the interpolated values of the function by the Taylor polynomial of the 4th degree (see Table 6)

Якщо за виразом (15) обчислити значення функції  $V = V^4[x]$  для декількох значень аргумента  $x$  з діапазону  $10 \leq x \leq 23$ , наприклад, з кроком  $\Delta x = 1$ , то отримаємо табл. 6. Їй відповідає графік інтерпольованих значень функції, який зображено на рис. 6.

- підставити у вираз інтерполянти з буквеними коефіцієнтами їх числові значення, внаслідок чого отримаємо аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора  $n$ -го степеня з числовими коефіцієнтами, який є результатом розв'язання поставленої задачі.

**2. Математичне формулювання задачі інтерполяції табличних функцій.** Наведений вище алгоритм розв'язання задачі інтерполяції табличних функцій з використанням многочлена Тейлора хоча є простим і наочним, однак він незручний для його програмної реалізації. Для виконання розрахунків математичне формулювання задачі інтерполяції табличних функцій доцільно подати у матричному записі. Тому спочатку сформу-



люємо викладений вище алгоритм у термінах матричної алгебри. Для розуміння сутності викладеного матеріалу зупинимось на конкретному виразі інтерполянти, наприклад, заданого многочленом Тейлора 3-го степеня як з буквеними (7), так і числовими коефіцієнтами (10).

**2.1.** Утворимо з коефіцієнтів многочлена Тейлора 3-го степеня (див. вираз (7)), такий вектор-рядок:

$$\bar{C} = |c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3| = [c_j, j = \overline{0,3}] \quad (16)$$

та назвемо його рядком коефіцієнтів многочлена Тейлора для однієї незалежної змінної, тобто рядком коефіцієнтів многочлена Тейлора. Транспонувавши його, отримуємо такий вектор-стовпець:

$$\bar{C}^T = |c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3|^T = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = [c_j^T, j = \overline{0,3}], \quad (17)$$

який назвемо стовпцем коефіцієнтів многочлена Тейлора для однієї незалежної змінної, тобто стовпцем коефіцієнтів многочлена Тейлора.

Утворимо з множників при коефіцієнтах  $\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0,3}]$  у многочлені (7) вектор-рядок:

$$\bar{T}^3[x] = \left| \frac{x^0}{0!} \ \frac{x^1}{1!} \ \frac{x^2}{2!} \ \frac{x^3}{3!} \right| = \left| 1 \ \frac{x}{1!} \ \frac{x^2}{2!} \ \frac{x^3}{3!} \right| = [t_j[x], j = \overline{0,3}] \quad (18)$$

та назвемо його рядком Тейлора 3-го степеня для однієї незалежної змінної, тобто рядком Тейлора.

З урахуванням виразів (17) та (18) і правила множення матриць (тобто, множення рядка на стовпець), запишемо многочлен (7) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} V^3[x] &= \bar{T}^3[x] \times \bar{C}^T = \left| 1 \ \frac{x}{1!} \ \frac{x^2}{2!} \ \frac{x^3}{3!} \right| \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \\ &= c_0 1 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + c_3 \frac{x^3}{3!} = \sum_{j=0}^3 t_j[x] \cdot c_j^T. \end{aligned} \quad (19)$$

Утворимо з елементів вектора-рядка Тейлора, заданого виразом (18), обчислених відповідно за значеннями 4-ох вузлових точок  $\bar{X} = [x_p, p = \overline{1,4}]$  (див. табл. 2), такі матриці у буквену та числову записках:

$$\begin{aligned} \bar{T}^3[\bar{X}] &= [\bar{T}_p^3[x_p], p = \overline{1,4}] = \left[ t_{p,j}[x_p] = \frac{x_p^j}{j!}, j = \overline{0,3}; p = \overline{1,4} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_1^0}{0!} & \frac{x_1^1}{1!} & \frac{x_1^2}{2!} & \frac{x_1^3}{3!} \\ \frac{x_2^0}{0!} & \frac{x_2^1}{1!} & \frac{x_2^2}{2!} & \frac{x_2^3}{3!} \\ \frac{x_3^0}{0!} & \frac{x_3^1}{1!} & \frac{x_3^2}{2!} & \frac{x_3^3}{3!} \\ \frac{x_4^0}{0!} & \frac{x_4^1}{1!} & \frac{x_4^2}{2!} & \frac{x_4^3}{3!} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11^2 & 11^3 \\ 1 & 14 & 14^2 & 14^3 \\ 1 & 17 & 17^2 & 17^3 \\ 1 & 20 & 20^2 & 20^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 11 & 60,5 & 221,83 \\ 1 & 14 & 98,0 & 457,33 \\ 1 & 17 & 144,5 & 818,83 \\ 1 & 20 & 200,0 & 1333,33 \end{pmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

та назвемо їх матрицею Тейлора.

Об'єднаємо вузлові значення  $v_1, \dots, v_4$  функції, заданої табл. 2, у вектор-рядок:

$$\bar{V} = |v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4| = [v_p, p = \overline{1,4}], \quad (21)$$

який назвемо рядком вузлів табличної функції, тобто вузловим рядком. Транспонувавши його, отримуємо вузловий вектор-стовпець у буквену та числову записках (див. табл. 2):

$$\bar{V}^T = |v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4|^T = [v_p^T, p = \overline{1,4}] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7,93 \\ 11,61 \\ 14,04 \\ 15,85 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

який назвемо вузловим стовпцем значень табличної функції, тобто вузловим вектором-стовпцем.

Використовуючи правило множення матриць (тобто, множення квадратної матриці на стовпець), переконаємось в тому, що лінійна система алгебричних рівнянь (9) рівноцінна такому матричному рівнянню:

$$\begin{aligned} \bar{T}^3[\bar{X}] \times \bar{C}^T &= \bar{V}^T \Rightarrow [\bar{T}_p^3[x_p] \times \bar{C}^T = v_p^T, p = \overline{1,4}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \sum_{j=0}^3 t_{p,j}[x_p] \cdot c_j^T = v_p^T, p = \overline{1,4} \right], \quad (23) \end{aligned}$$

або – в розгорнутому буквену і числову записках:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 11 & 60,5 & 221,83 \\ 1 & 14 & 98,0 & 457,33 \\ 1 & 17 & 144,5 & 818,83 \\ 1 & 20 & 200,0 & 1333,33 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,93 \\ 11,61 \\ 14,04 \\ 15,85 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Отже, для розрахунку коефіцієнтів інтерполянти табличної функції (див. табл. 1), потрібно виконати такі дії:

- за значеннями вузлових точок обчислити матрицю Тейлора 3-го степеня для однієї незалежної змінної (20);
- за значеннями вузлів табличної функції сформувані вектор-стовпець вузлів інтерполяції (22);
- розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь (24).

Результатом розв'язання системи (24) є її корені, що водночас є числовими коефіцієнтами многочлена Тейлора 3-го степеня:

$$\bar{C}^T = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26,439 \\ 5,2144 \\ -0,4656 \\ 0,02333 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

**2.2.** Нехай задано значення вузлової точки  $x' = 15$ . Потрібно обчислити інтерпольоване значення функції у заданій точці.

За виразом (18) утворимо такий вектор-рядок Тейлора 3-го степеня для однієї незалежної змінної:

$$\bar{T}^3[x'] = \left| 1 \ \frac{15}{1!} \ \frac{15^2}{2!} \ \frac{15^3}{3!} \right| = |1 \ 15,0 \ 112,5 \ 562,5|.$$

З урахуванням значень коефіцієнтів многочлена Тейлора 3-го степеня (25) за виразом (19) обчислимо інтерпольоване значення функції у заданій точці:

$$V^3[x'] = \bar{T}^3[x'] \times \bar{C}^T = |1 \ 15,0 \ 112,5 \ 562,5| \times \begin{pmatrix} -26,439 \\ 5,2144 \\ -0,4656 \\ 0,02333 \end{pmatrix} = 12,5270.$$

**2.3.** Нехай задано діапазон зміни вузлових точок  $10 \leq x' \leq 20$ . Потрібно обчислити інтерпольовані значення функції у заданому діапазоні зміни аргумента  $x$  з кроком  $\Delta x' = 2$ .

Для заданого діапазону зміни вузлових точок  $\bar{X}' = [x'_i, i = \overline{1,6}]$  за виразом (20) утворимо таку матрицю Тейлора 3-го степеня для однієї незалежної змінної:

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}; \bar{T}^3[\bar{X}'] = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10^2 & 10^3 \\ 1 & 12 & 12^2 & 12^3 \\ 1 & 14 & 14^2 & 14^3 \\ 1 & 16 & 16^2 & 16^3 \\ 1 & 18 & 18^2 & 18^3 \\ 1 & 20 & 20^2 & 20^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 50 & 166,7 \\ 1 & 12 & 72 & 288,0 \\ 1 & 14 & 98 & 457,3 \\ 1 & 16 & 128 & 682,7 \\ 1 & 18 & 162 & 972,0 \\ 1 & 20 & 200 & 1333,3 \end{pmatrix}.$$

За матричним виразом (24) обчислимо інтерпольовані значення функції у заданому діапазоні зміни аргумента  $x$ , отримаємо

$$\bar{T}^3[\bar{X}] \times \bar{C}^T = \bar{V} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & 50 & 166,7 \\ 1 & 12 & 72 & 288,0 \\ 1 & 14 & 98 & 457,3 \\ 1 & 16 & 128 & 682,7 \\ 1 & 18 & 162 & 972,0 \\ 1 & 20 & 200 & 1333,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -26,439 \\ 5,2144 \\ -0,4656 \\ 0,02333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,316 \\ 9,336 \\ 11,610 \\ 13,328 \\ 14,678 \\ 15,850 \end{pmatrix}$$

Достовірність отриманих результатів підтверджується тим, що в заданому діапазоні для точок  $x' = 14$  та  $x' = 20$  обчислені інтерпольовані значення функції повністю збігаються з вузлами інтерполяції (див. (22)), а саме  $v_2 = 11,61$  та  $v_4 = 15,85$  відповідно.

Отже, наведено математичне формулювання задачі інтерполяції табличних функцій у матричному вигляді, що значно спрощує як їх подання (компактність запису), розуміння сутності, так і метод розрахунку.

**3. Формалізація задачі інтерполяції табличних функцій.** Узагальнимо викладені вище положення на табличну функцію, задану її значеннями у  $P$  вузлах інтерполяції (де  $P$  – ціле додатне число,  $P \geq 2$  вузлів), тобто на функцію, задану табл. 7.

**Табл. 7.** Загальний вигляд табличної функції від однієї незалежної змінної / General view of the tabular function of one independent variable

№ вузла	1	2	...	$p$	...	$P$
$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	...	$x_P$
$V$	$v_1$	$v_2$	...	$v_p$	...	$v_P$

**3.1.** Інтерполянту для цієї табличної функції будемо шукати у вигляді многочлена Тейлора (1). Вважаючи, що  $n+1 = p$ , то в цьому випадку кількість його коефіцієнтів, як видно з виразу (1), співпадає з кількістю вузлів табличної функції. Запишемо многочлен Тейлора  $n$ -го степеня в такому вигляді:

$$V^n[x] = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + c_n \frac{x^n}{n!}. \quad (26)$$

Застосувавши вираз (26) послідовно до кожного вузла табличної функції (табл. 7), отримаємо таку лінійну систему алгебричних рівнянь з  $P$  невідомими:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{x_1}{1!} + \dots + c_n \frac{x_1^n}{n!} = v_1; \\ c_0 + c_1 \frac{x_2}{1!} + \dots + c_n \frac{x_2^n}{n!} = v_2; \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots; \\ c_0 + c_1 \frac{x_P}{1!} + \dots + c_n \frac{x_P^n}{n!} = v_P; \end{cases} \quad (27)$$

в якій значення вузлових точок  $\bar{X} = [x_p, p = \overline{1, P}]$  і вузловий вектор-стовпець значень функції  $\bar{V}^T = [v_p^T, p = \overline{1, P}]$  є відомими числами з табл. 7. Розв'язавши цю систему рівнянь (наприклад, методом Гауса), отримаємо її корені, які водночас є числовими значеннями коефіцієнтів  $\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0, n}]$  інтерполянти (26). Підставивши цей розв'язок у вираз (26) інтерполянти з буквеними коефіцієнтами, отримуємо для табличної функції від однієї незалежної змінної аналітичний вираз інтерполянти з числовими коефіцієнтами.

**3.2.** Сформулюємо наведену вище послідовність дій у термінах матричної алгебри. Утворимо вектор-стовпець коефіцієнтів многочлена Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної (26), тобто стовпець коефіцієнтів многочлена Тейлора:

$$\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0, n}] \Rightarrow |c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n|^T = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Утворимо з множників при коефіцієнтах  $\bar{C}^T = [c_j^T, j = \overline{0, n}]$  у многочлені (26) вектор-рядок Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної, тобто такий вектор-рядок Тейлора:

$$\bar{T}^n[x] = [t_j[x] = \frac{x^j}{j!}, j = \overline{0, n}] \Rightarrow |1 \ \frac{x}{1!} \ \frac{x^2}{2!} \ \dots \ \frac{x^n}{n!}|. \quad (29)$$

З урахуванням виразів (28) та (29) і правила множення матриць (тобто, множення рядка на стовпець), запишемо многочлен (26) у такому вигляді:

$$V^n[x] = \bar{T}^n[x] \times \bar{C}^T = |1 \ \frac{x}{1!} \ \frac{x^2}{2!} \ \dots \ \frac{x^n}{n!}| \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = c_0 + c_1 \frac{x}{1!} + c_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + c_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{j=0}^n t_j[x] \cdot c_j^T. \quad (30)$$

Утворимо з елементів вектора-рядка Тейлора, заданого виразом (29), обчислених відповідно за значеннями вузлових точок  $\bar{X} = [x_p, p = \overline{1, P}]$  (див. табл. 7), таку матрицю Тейлора  $n$ -го степеня в буквенному записі:

$$\bar{T}^n[\bar{X}] = [\bar{T}_{p,j}^n[x_p], p = \overline{1, P}] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_P & x_P^2 & \dots & x_P^n \end{pmatrix} = [t_{p,j}[x_p], j = \overline{0, n}; p = \overline{1, P}] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_P & x_P^2 & \dots & x_P^n \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Об'єднаємо значення  $v_1, \dots, v_P$  функції, заданої табл. 7, у вектор-стовпець вузлів інтерполяції, тобто вузловий вектор-стовпець:

$$\bar{V}^T = [v_p^T, p = \overline{1, P}] \Rightarrow |v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_P|^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_P \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Використовуючи правило множення матриць (тобто, множення квадратної матриці на стовпець), переконаємось в тому, що лінійна система алгебричних рівнянь (27) рівноцінна такому матричному рівнянню:

$$\bar{T}^n[\bar{X}] \times \bar{C}^T = \bar{V}^T \Rightarrow [\bar{T}_{p,j}^n[x_p] \times c_j^T = v_p^T, p = \overline{1, P}] \Rightarrow \left[ \sum_{j=0}^n t_{p,j}[x_p] \cdot c_j^T = v_p^T, p = \overline{1, P} \right], \quad (33)$$

або – в розгорнутому буквенному записі:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_P & x_P^2 & \dots & x_P^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_P \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Для розрахунку коефіцієнтів інтерполянти табличної функції (див. табл. 7), потрібно виконати такі дії:

- за значеннями вузлових точок обчислити матрицю Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної (33);
- за значеннями вузлів табличної функції сформулювати вектор-стовпець вузлів інтерполяції (32);

- розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь (34).

Результатом розв'язання системи (34) є її корені, що водночас є числовими коефіцієнтами многочлена Тейлора (28), які необхідно підставити у вираз (30), внаслідок чого отримаємо аналітичний вираз інтерполянти у вигляді многочлена Тейлора  $n$ -го степеня, поданої у матричному записі.

Отже, наведено формалізований опис задачі інтерполяції табличних функцій, заданих многочленом Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної як у скалярному, так і в матричному вигляді. З'ясовано, що формалізація задачі інтерполяції табличних функцій в матричному вигляді, порівняно зі скалярним, значно спрощує як їх подання (компактність запису), розуміння сутності, так і метод розрахунку.

**4. Матричний запис процедур інтерполяції табличних функцій.** У практиці інженерних розрахунків часто потрібно мати вирази для реалізації процедур інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної у матричному записі, які безпосередньо містили б інформацію про табличну функцію. Спробуємо їх вивести.

**4.1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти для однієї незалежної змінної.** Помноживши ліву і праву частини рівняння (33) зліва на матрицю, обернену до матриці Тейлора, отримаємо:

$$\bar{T}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{T}[\bar{X}] \times \bar{C}^T = \bar{T}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{V}^T. \quad (35)$$

Оскільки добуток  $\bar{T}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{T}[\bar{X}] = \bar{E}$ , тобто є одиничною матрицею, то, з урахуванням виразу (35), отримаємо

$$\bar{C}^T = \bar{T}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{V}^T, \quad (36)$$

де  $\bar{X} = [x_p, p = \bar{1}, \bar{P}]$  – значення вузлових точок табличної функції.

Отже, коефіцієнти інтерполянти для однієї незалежної змінної можна отримати не тільки шляхом розв'язання лінійної системи рівнянь (27), наприклад, методом Гауса, чи рівноцінного їй матричного рівняння (33), але й шляхом послідовного виконання таких дій:

- обчислення матриці Тейлора (31), яку визначено за значеннями вузлових точок табличної функції;
- формування вузлового вектора-стовпця значень табличної функції (32);
- обчислення матриці, оберненої до матриці Тейлора;
- множення оберненої матриці Тейлора на вектор-стовпець вузлів інтерполяції (36).

**4.2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці.** Підставивши (36) у вираз (30), отримаємо вираз для обчислення інтерпольованого значення функції від однієї незалежної змінної в матричному записі:

$$V = V^n[x'] = \bar{T}^n[x'] \times \bar{T}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{V}^T, \quad (37)$$

або в розгорнутому буквену записі:

$$V^n[x'] = \begin{vmatrix} 1 & x' & x'^2 & \dots & x'^n \\ 1 & ! & 2! & \dots & n! \\ 1 & x'_1 & x'_1^2 & \dots & x'_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_m & x'_m^2 & \dots & x'_m^n \\ 1 & ! & 2! & \dots & n! \end{vmatrix}^{-1} \times \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_p \end{vmatrix}. \quad (38)$$

З матричного виразу (37) видно, що інтерпольоване значення функції за довільного значення незалежної змінної визначають добутком трьох матриць:

- рядка Тейлора, обчисленого за прийнятим значенням незалежної змінної;
- матриці, оберненої до матриці Тейлора, яку визначено за значеннями вузлових точок табличної функції;
- вузлового вектора-стовпця, який містить значення вузлів інтерполяції.

**4.3. Обчислення інтерпольованих значень функції у заданому діапазоні зміни аргумента  $x$ .** Зазвичай, діапазон зміни аргумента задають його початковим ( $x_n$ ) і кінцевим ( $x_k$ ) значеннями, а також кроком ( $\Delta x$ ) набуття проміжних значень. Кількість вузлових точок визначають за такою формулою:

$$m = \frac{x_k - x_n}{\Delta x}, \quad (39)$$

а значення самих аргументів визначають за такою формулою:

$$\bar{X}' = [x'_i = x_{\text{поч}} + i \cdot \Delta x, i = \overline{0, m}]. \quad (40)$$

Отже, для обчислення інтерпольованих значень функції у заданому діапазоні зміни аргумента  $x$  за аналогією з виразом (37) отримаємо

$$V[\bar{X}'] = \bar{T}[\bar{X}'] \times \bar{T}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{V}^T, \quad (41)$$

або в розгорнутому буквену записі:

$$V[\bar{X}'] = \begin{vmatrix} 1 & x'_0 & x'^2_0 & \dots & x'^n_0 \\ 1 & ! & 2! & \dots & n! \\ 1 & x'_1 & x'^2_1 & \dots & x'^n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_m & x'^2_m & \dots & x'^n_m \\ 1 & ! & 2! & \dots & n! \end{vmatrix}^{-1} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x^2_1 & \dots & x^n_1 \\ 1 & ! & 2! & \dots & n! \\ 1 & x_2 & x^2_2 & \dots & x^n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_p & x^2_p & \dots & x^n_p \\ 1 & ! & 2! & \dots & n! \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_p \end{vmatrix}. \quad (42)$$

З матричного виразу (42) видно, що інтерпольовані значення функції у заданому діапазоні зміни аргумента  $x$  визначають добутком трьох матриць:

- матриці Тейлора, обчисленої за заданим діапазоном значень незалежної змінної;
- матриці, оберненої до матриці Тейлора, яку визначено за значеннями вузлових точок табличної функції;
- вузлового вектора-стовпця, який містить значення вузлів інтерполяції.

**5. Розв'язання задач інтерполяції табличних функцій в розрахунковому середовищі.** Продемонструємо викладене вище на конкретних прикладах. Розрахунки виконаємо в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

**5.1.** Виконаємо відповідні розрахунки за даними, наведеними в табл. 1. Результати розрахунку коефіцієнтів інтерполянти 2-го степеня, а також обчислене інтерпольоване значення функції у заданій точці ( $x' = 13$ ) наведено у вікні 1.

**5.2.** Виконаємо відповідні розрахунки за даними, наведеними в табл. 2. Результати розрахунку коефіцієнтів інтерполянти 3-го степеня, а також обчислене інтерпольоване значення функції у заданій точці ( $x' = 15$ ) наведено у вікні 2.

**5.3.** Виконаємо відповідні розрахунки за даними, наведеними в табл. 3. Результати розрахунку коефіцієнтів інтерполянти 4-го степеня, а також обчислене інтерпольоване значення функції у заданій точці ( $x' = 15$ ) наведено у вікні 3.

**Вікно 1.** Результати інтерполяції табличної функції многочленом Тейлора 2-го степеня (див. табл. 1) / Results of interpolation of the tabular function by Taylor polynomial of the 2nd degree (see Table 1)

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти 2-го степеня / Calculation of interpolant coefficients of the 2nd degree

$\bar{X}$	$\bar{T}[\bar{X}]$			$\bar{C}^T$	$\bar{V}^T$
	1	$x$	$x^2/2!$		
4,2	1	4,2	8,82	$c_0$	8,3
10,3	1	10,3	53,045	$c_1$	17,6
17,1	1	17,1	146,205	$c_2$	12,4
	$\bar{T}[\bar{X}]^{-1}$			$\bar{C}^T$	Перевірка
	2,238	-1,731	0,493	-5,780	8,30
	-0,348	0,514	-0,165	4,0978	17,60
	0,025	-0,048	0,023	-0,35493	12,40

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці / Calculation of the interpolated value of the function at a given point

$x'$	$\bar{T}^2[x']$			$\bar{T}[\bar{X}]^{-1}$	$\bar{V}^T$	$V^2[x']$
	1	$x$	$x^2/2!$			
13	1	13,0	84,5	2,238	-1,73	0,50
				-0,35	0,514	-0,165
				0,025	-0,048	0,023
	$\bar{T}^2[x'] \times \bar{T}[\bar{X}]^{-1}$			$\bar{V}^T$	=	$V^2[x']$
	-0,1407	0,870	0,2709	8,3	=	17,500
				17,6		
				12,4		

**Вікно 2.** Результати інтерполяції табличної функції многочленом Тейлора 3-го степеня (див. табл. 2) / The results of interpolation of the tabular function with a Taylor polynomial of the 3rd degree (see Table 2)

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти 3-го степеня / Calculation of interpolant coefficients of the 3rd degree

$\bar{X}$	$\bar{T}[\bar{X}]$				$\bar{C}^T$	$\bar{V}^T$
	1	$x$	$x^2/2!$	$x^3/3!$		
11	1	11	60,5	221,83	$c_0$	7,93
14	1	14	98,0	457,33	$c_1$	11,61
17	1	17	144,5	818,83	$c_2$	14,04
20	1	20	200	1333,33	$c_3$	15,85
	$\bar{T}[\bar{X}]^{-1}$				$\bar{C}^T$	$\bar{T}[\bar{X}] \times \bar{C}^T$
	29,383	-69,259	57,0	-16,160	-26,439	7,930
	-5,296	13,833	-12,111	3,574	5,2144	11,610
	0,630	-1,778	1,667	-0,519	-0,4656	14,040
	-0,037	0,111	-0,111	0,037	0,02333	15,850

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці / Calculation of the interpolated value of the function at a given point

$x'$	$\bar{T}^3[x']$				$\bar{T}[\bar{X}]^{-1}$	$\bar{V}^T$	$V^3[x']$	од. байт
	1	$x$	$x^2/2!$	$x^3/3!$				
15	1	15,0	112,5	562,5	29,383	-69,26	57,0	-16,16
					-5,30	13,833	-12,111	3,574
					0,630	-1,778	1,667	-0,519
					-0,037	0,111	-0,111	0,037
	$\bar{T}^3[x'] \times \bar{T}[\bar{X}]^{-1}$				$\bar{V}^T$	=	$V^3[x']$	
	-0,06	0,74	0,37	-0,05	7,93	=	12,528	
					11,61		5905	
					14,04			
					15,85			

**Вікно 3.** Результати інтерполяції табличної функції многочленом Тейлора 4-го степеня (див. табл. 3) / Results of interpolation of the tabular function by Taylor polynomial of the 4th degree (see Table 3)

1. Розрахунок коефіцієнтів інтерполянти 4-го степеня / Calculation of interpolant coefficients of the 4th degree

$\bar{X}$	$\bar{T}[\bar{X}]$					$\bar{C}^T$	$\bar{V}^T$
	1	$x$	$x^2/2!$	$x^3/3!$	$x^4/4!$		
11	1	11	60,5	221,8	610,0	$c_0$	17,193
14	1	14	98,0	457,3	1600,7	$c_1$	11,610
17	1	17	144,5	818,8	3480,0	$c_2$	16,532
20	1	20	200,0	1333,3	6666,7	$c_3$	12,260
23	1	23	264,5	2027,8	11660,0	$c_4$	17,297

56,317	-176,996	218,642	-123,897	26,934
-12,600	43,047	-55,932	32,788	-7,303
2,090	-7,617	10,426	-6,358	1,460
-0,228	0,877	-1,259	0,802	-0,191
0,012	-0,049	0,074	-0,049	0,012

1474,78
-365,85
67,150
-8,0396
0,47162

17,193
11,610
16,532
12,260
17,297

2. Обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці / Calculation of the interpolated value of the function at a given point

$$\begin{array}{c} x' \\ 15 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bar{T}^4[x'] \\ \hline 1 & 15 & 112,5 & 562,5 & 2109,4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bar{T}[\bar{X}]^{-1} \\ \hline 56,317 & -177,00 & 218,6 & -123,897 & 26,934 \\ \hline -12,60 & 43,047 & -55,932 & 32,788 & -7,303 \\ \hline 2,090 & -7,617 & 10,426 & -6,358 & 1,460 \\ \hline -0,228 & 0,877 & -1,259 & 0,802 & -0,191 \\ \hline 0,012 & -0,049 & 0,074 & -0,049 & 0,012 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{V}^T \\ \hline 17,193 \\ \hline 11,610 \\ \hline 16,532 \\ \hline 12,260 \\ \hline 17,297 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline V^4[x'] \\ \hline 13,842 \\ \hline 14688 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{од.} \\ \text{байт} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bar{T}^4[x'] \times \bar{T}[\bar{X}]^{-1} \\ \hline -0,0412 & 0,6584 & 0,4938 & -0,1317 & 0,0206 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bar{V}^T \\ \hline 17,193 \\ \hline 11,610 \\ \hline 16,532 \\ \hline 12,260 \\ \hline 17,297 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline V^4[x'] \\ \hline 13,842 \\ \hline 14688 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{од.} \\ \text{байт} \end{array}$$

Отже, наведено матричний запис процедур інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної, які безпосередньо містять інформацію про табличну функцію. Наведено матричні вирази для розрахунку коефіцієнтів інтерполяції та обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці, а також для обчислення інтерпольованих значень функції у заданому діапазоні зміни аргумента  $x$ . З'ясовано, що запис відповідних процедур інтерполяції в термінах матричної алгебри, порівняно зі скалярним, значно спрощує як їх подання (компактність запису), розуміння сутності, так і програмну реалізацію.

**Обговорення результатів дослідження.** Багатьом науковцям у своїх розрахунках часто доводиться мати справу з наборами даних, отриманими експериментально чи відібраних випадково. На підставі цих даних потрібно побудувати таку аналітичну функцію, яка б з високою точністю давала можливість обчислювати відповідні її значення за заданими значеннями аргумента. Інтерполяція табличних функцій в обчислювальній математиці – спосіб знаходження проміжних значень величини за наявного дискретного набору відомих значень. Отримані результати застосування різних методів інтерполяції табличних функцій розглянуто можна побачити в багатьох роботах як вітчизняних дослідників, так і з-за кордонк. Обговоримо деякі результати їхніх досліджень та порівняємо з нашими.

В роботі [61] автором описано метод мінімізації функції з використанням її значень без похідних. Квадратичну модель функції сформовано шляхом інтерполяції точок з таблиці даних. Квадратичну модель (не обов'язково позитивно визначену) мінімізували в обмежувальній дійсній області, щоб знайти наступну пробну точку. Точки інтерполяції вибирали з таблиці даних, що містить значення функції на початковій сітці та в наступних пробних точках. Встановлено, що метод ефективний при використанні оцінок табличних функцій, але трудомісткий у обчисленнях, необхідних для вибору нових пробних точок.

У роботі [49] автори наводять новий підхід до побудови двовимірної раціональної інтерполяції над триан-

гуляцією на підставі розсіяних даних у паралельних лініях [55]. Основна перевага цього методу порівняно з наявними методами інтерполяції полягає в двох моментах: функція інтерполяції виконується простим і явним математичним поданням через параметр  $\alpha$ ; форму поверхні інтерполяції можна змінити за допомогою параметра для незмінних даних інтерполяції. Окрім цього, для керування формою поверхонь автори використовують локальний метод контролю форми. У окремому випадку досліджується метод "контролю значень барицентру", а також наведено чисельні приклади, щоб показати ефективність запропонованого методу.

У роботі [64] автори розглядають двовимірний раціональний бікубічний інтерполяційний сплайн BRIS (англ. *Bivariate Rational Bicubic Interpolating Spline*) з біквадратичним знаменником і шістьма параметрами форми, який будується в області прямокутника. Також автори обговорюють неперервний стан  $C^1$  BRIS. Доведено його обмеженість та оцінено похибку відхилення. У випадку рівновіддалених вузлів подано матричний вираз та симетрію BRIS. Наведено деякі властивості основи BRIS, а також багато прикладів, щоб проілюструвати вплив параметрів форми на форму поверхні BRIS.

У роботі [38] автори роблять внесок у графічне відображення даних, коли вони додатні. Дані мають бути такими, щоб їх візуальне відображення виглядало гладким і приємним, їх додатна форма зберігалася всюди, а витрати на обчислення були економічними. Для цієї мети автори використовували кусково-раціональну кубічну функцію в її найбільш загальному вигляді. Свій метод вони спочатку реалізували для одновимірних даних, а потім розширили до інтерполяційної раціональної бікубічної форми для даних, розташованих у прямокутній сітці. Також ними розроблено прості достатні умови на вільні параметри в описі раціональної функції для візуалізації додатних даних у вигляді додатних кривих і поверхонь.

У роботі [65] автори використовують вид  $C^1$  раціональні інтерполяційні сплайни в одному та двох вимірах для створення кривих і поверхонь з контролем області даних. Прості достатні обмеження, що залежать від даних, вони наводять на параметри локального ке-

рування для створення  $C^1$  інтерполяційних кривих, що знаходяться строго між двома заданими кусково-лінійними кривими і  $C^1$  інтерполяційні поверхні, які водночас знаходяться строго між двома заданими кусково-бікубічними лінійними інтерполяційними поверхнями.

У роботі [66] автори мають справу з контролем області  $C^2$  інтерполяційних кривих і поверхонь за допомогою класу раціональних інтерполяційних сплайнів у одному і двох вимірах. Прості достатні залежні від даних обмежень наводяться на локальні контрольні параметри для генерування інтерполяційних кривих  $C^2$ , що знаходяться строго між двома заданими кусково-лінійними кривими, і інтерполяційними поверхнями  $C^2$ , які водночас знаходяться строго між двома заданими кусково-білайнерними змішувальними квінтичними інтерполяційними поверхнями. Окрім цього, вони також розробили алгоритм щодо застосування сплайнових поверхонь раціональної інтерполяції  $C^2$  для інтерполяції зображення.

У роботі [24] автори обговорюють інтерполяцію із збереженням додатності  $C^2$  з використанням раціонального кватричного сплайну для додатних даних. Цей сплайн має три різні параметри, а саме –  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  і  $\gamma_i$ . Запропонований раціональний сплайн може досягти  $C^2$  неперервності без потреби розв'язувати тридіагональні системи лінійних рівнянь, на відміну від деяких інших сплайнів, які їх потребують. Достатню умову наводять на підставі одного параметра, тоді як інші два параметри є вільними, за допомогою яких користувач може інтерполювати остаточну форму додатної інтерполяційної кривої. Ці умови гарантують отримання всюди додатної інтерполяційної кривої. Також детально ведеться обговорення отриманих результатів порівняно з наявними схемами розрахунку. З графічних і числових результатів видно, що запропонована схема є кращою, ніж відомі схеми, оскільки вона має додатковий вільний параметр для контролю додатної кривої інтерполяції, зберігаючи  $C^2$  неперервність.

У роботі [30] автори розглядають кватричні параметричні інтерполяційні сплайн-криві Ерміта, які формуються за допомогою кватричних базисних функцій Ерміта з параметрами. Вони також досліджують вибір параметрів сплайн-кривих і надають критерії для кривої з найкоротшою довжиною дуги та найплавнішою кривою. Коли встановлені умови інтерполяції, запропоновані сплайн-криві не тільки досягають  $C^1$ -неперервності, але також можуть реалізувати контроль форми шляхом вибору відповідних параметрів, які усувають слабкість класичних кубічних інтерполяційних сплайн-кривих Ерміта.

Отже, внаслідок проведеного дослідження отримано такі *основні наукові результати*: наведено деякі постановки задач інтерполяції табличних функцій многочленом Тейлора  $n$ -го степеня в довільно розташованих вузлах інтерполяції; наведено алгоритм розв'язання, математичне формулювання та формалізацію задачі інтерполяції табличних функцій; розглянуто особливості матричного запису процедур інтерполяції табличних функцій; наведено результати інтерполяції табличних функцій многочленом Тейлора  $n$ -го степеня.

*Наукова новизна отриманих результатів дослідження* – вперше розроблено метод розрахунку коефіцієнтів

інтерполянти, заданої многочленом Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної, сутність якого полягає в обчисленні добутку матриці, оберненої до матриці Тейлора, яку визначають за значеннями вузлових точок табличної функції, на вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції.

*Практична значущість результатів дослідження* – розроблені алгоритми та методи інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня можна використати в практиці як математичного моделювання, так і комп'ютерної графіки для опису складних геометричних поверхонь.

## Висновок / Conclusions

Розроблено методологію локальної інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня в довільно розташованих вузлах інтерполяції, що дає можливість обчислювати їх проміжні значення між вузлами інтерполяції. За результатами дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Розглянуто деякі особливості інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня, а саме: наведено алгоритм розв'язання та математичне формулювання задачі інтерполяції табличних функцій; наведено формалізований запис задачі інтерполяції, а також матричний запис процедур інтерполяції для певних значень незалежної змінної.

2. Наведено алгоритм розв'язання задачі інтерполяції табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора 2-го, 3-го і 4-го степенів, простота й наочність якого є однією з його переваг, але він незручний для програмної реалізації. Наведено математичне формулювання задачі інтерполяції табличних функцій у термінах матричної алгебри, яке зводиться до виконання таких дій: за відомими з таблиці значеннями вузлових точок потрібно обчислити матрицю Тейлора  $n$ -го степеня; за вказаними у таблиці значеннями функції потрібно сформувати вектор-стовпець вузлів інтерполяції; розв'язати лінійну систему алгебричних рівнянь, коренем якої є числові коефіцієнти многочлена Тейлора  $n$ -го степеня.

3. Розроблено метод розрахунку коефіцієнтів інтерполянти, заданих многочленом Тейлора  $n$ -го степеня для однієї незалежної змінної, сутність якого зводиться до добутку матриці, оберненої до матриці Тейлора, яку визначають за вузловими точками табличної функції, на вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції.

4. На конкретних прикладах продемонстровано викладене вище, а саме – розраховано коефіцієнти інтерполянти 2-го, 3-го і 4-го степенів для однієї незалежної змінної, а також для кожної з них обчислено інтерпольоване значення функції у заданій точці. Розрахунки виконано в середовищі Excel, які за аналогією можна успішно реалізувати й в будь-якому іншому обчислювальному середовищі.

## References

- [1] Alain Le Méhauté. (1993). On Multivariate Hermite Polynomial Interpolation. *Series in Approximations and Decomposi-*

- tions. Multivariate Approximation: From CAGD to Wavelets, 179–192. [https://doi.org/10.1142/9789814503754\\_0010](https://doi.org/10.1142/9789814503754_0010)
- [2] Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., & Pasichnyk V. V. (Ed.). (2018). *Numerical methods in computer science: textbook*. Issue 2. Lviv: Novy svit-2000, 536 p. [In Ukrainian].
- [3] Boyko, L. T. (2009). *Fundamentals of numerical methods: textbook*. Dnipropetrovsk: DNU Publishing House, 244 p. [In Ukrainian].
- [4] Bruno Després, & Maxime Herda. (2020). Computation of Sum of Squares Polynomials from Data Points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(3). <https://doi.org/10.1137/19M1273955>
- [5] Chapter 1: Computer Arithmetic. (2019). *An Introduction to Numerical Computation*, 1–19. [https://doi.org/10.1142/9789811204425\\_0001](https://doi.org/10.1142/9789811204425_0001)
- [6] Chapter 1: Fundamentals: Taylor Series. (2022). *Numerical Methods for Engineers*, 1–16. [https://doi.org/10.1142/9789811255267\\_0001](https://doi.org/10.1142/9789811255267_0001)
- [7] Chapter 2: Polynomial Interpolation. (2019). *An Introduction to Numerical Computation*, 21–54. [https://doi.org/10.1142/9789811204425\\_0002](https://doi.org/10.1142/9789811204425_0002)
- [8] Chapter 3: Newton–Raphson Algorithms and Interpolation. (2017). *Computational Physics*, 23–29. [https://doi.org/10.1142/9789813200227\\_0003](https://doi.org/10.1142/9789813200227_0003)
- [9] Chapter 6: Applications of Power Series. (2015). *Foundations in Applied Nuclear Engineering Analysis*, 153–169. [https://doi.org/10.1142/9789814630948\\_0006](https://doi.org/10.1142/9789814630948_0006)
- [10] Chui, C. K., & Schumaker, L. L. (1995). Approximation and Interpolation. *Wavelets and Multilevel Approximation (Vol. 1)*. *Series in Approximations and Decompositions*. Approximation Theory VIII, 1–606. <https://doi.org/10.1142/9789814532594>
- [11] DAzevedo, E. F., & Simpson, R. B. (1989). On Optimal Interpolation Triangle Incidences. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 10(6). <https://doi.org/10.1137/0910064>
- [12] Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2005). A new  $C^2$  rational interpolation based on function values and constrained control of the interpolant curves. *Applied Mathematics and Computation*, 161(1), 311 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.030>
- [13] Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2005). A new weighted rational cubic interpolation and its approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 990 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.09.041>
- [14] Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2006). A bivariate rational interpolation and the properties. *Applied Mathematics and Computation*, 179(1), 190 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.11.094>
- [15] Duan, Qi, Zhang, Yunfeng, & Twizell, E. H. (2008). Hermite interpolation by piecewise rational surface. *Applied Mathematics and Computation*, 198(1), 59 p. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.08.050>
- [16] Fan Zhang, Jinjiang Li, Peiqiang Liu, & Hui Fan. (2020). Computing knots by quadratic and cubic polynomial curves. *Computational Visual Media*, 6(4), 417–430. <https://doi.org/10.1007/s41095-020-0186-4>
- [17] Faul, A. C., Goodsell, G., & Powell, M. J. D. (2005). A Krylov subspace algorithm for multiquadric interpolation in many dimensions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(1), 1–24. <https://doi.org/10.1093/imanum/drh021>
- [18] Filts, R. V. (1994). Calculation of Taylor and Fourier polynomials and their derivatives. Synopsis of lectures on the subject "Mathematical problems of electromechanics" for students. special 1801 "Electromechanics". Lviv: State University "Lviv Polytechnic", 24 p. [In Ukrainian].
- [19] Filts, R. V., & Kotsyuba, M. V. (1988). *The program of natural power interpolation and differentiation of a tabular function of several independent variables*. Kyiv, Deposited with RFAP. INB.NAn0223. [In Russian].
- [20] Filts, R. V., & Kotsyuba, M. V. (1989). Calculation of two-dimensional magnetic fields by the collocation method using the theory of natural interpolation. *Izvestiya vuzov. Electromechanics*, 3, 5–12. [In Russian].
- [21] Filts, R. V., Kotsyuba, M. V., & Grytsyuk, Yu. I. (1991). Algorithm for computing the Taylor polynomial and its derivatives on a computer. *Izvestia of universities. Electromechanics*, 5, 5–10. [In Russian].
- [22] Giampietro Allasia, & Cesare Bracco. (2011). Two interpolation operators on irregularly distributed data in inner product spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(4), 1763 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.04.025>
- [23] Goodman, T. N. T., & Meek, D. S. (2007). Planar interpolation with a pair of rational spirals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 201(1), 112 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.02.003>
- [24] Harim, N. A., & Abdul Karim, S. A. (2021). Positivity Preserving Using  $C^2$  Rational Quartic Spline Interpolation. In: Abdul Karim, S. A., Abd Shukur, M. F., Fai Kait, C., Soleimani, H., Sakidin, H. (Eds). *Proceedings of the 6th International Conference on Fundamental and Applied Sciences. Springer Proceedings in Complexity*. Springer, Singapore. [https://doi.org/10.1007/978-981-16-4513-6\\_46](https://doi.org/10.1007/978-981-16-4513-6_46)
- [25] Hashemi, B., & Trefethen, L. N. (2017). Chebfun in three dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39, 341–363. Retrieved from: <https://drive.google.com/file/d/1Iv2eukbtCIPc8R7HN1mEbzMLaD1tu9T/view>
- [26] Hrytsiuk, Yu. I. (2014). *Computational methods and models in scientific research: monograph*. Lviv: LSU BZD Publishing House. 288 p. [In Ukrainian].
- [27] Hrytsiuk, Yu. I., & Havrysh, V. I. (2022). Interpolation of table-given functions by Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(4), 88–102. <https://doi.org/10.36930/40320414>
- [28] Hussain, Malik Zawwar, & Muhammad Sarfraz. (2008). Positivity-preserving interpolation of positive data by rational cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2), 446 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.05.023>
- [29] Jared L. Aurentz, Anthony P. Austin, Michele Benzi, & Vasilis Kalantzis. (2019). Stable Computation of Generalized Matrix Functions via Polynomial Interpolation. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 40(1). <https://doi.org/10.1137/18M1191786>
- [30] Jin Xie, & Xiaoyan Liu. (2021). Adjustable Piecewise Quartic Hermite Spline Curve with Parameters. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, Article ID 2264871, 6 p. <https://doi.org/10.1155/2021/2264871>
- [31] Kolesnytskyi, O. K., Arsenyuk, I. R., & Mesyura, V. I. (2017). *Numerical methods: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 130 p. [In Ukrainian].
- [32] Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Lisovenko, A. I. (2019). *Numerical Methods. Numerical integration of functions: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 74 p. [In Ukrainian].
- [33] Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Prokopova, M. O. (2013). *Computational mathematics. Interpolation and approximation of tabular data: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 111 p. [In Ukrainian].
- [34] Krystyna STYŠ, & Tadeusz STYŠ. (2014). Natural and Generalized Interpolating Polynomials, 27–62 (32). <https://doi.org/10.2174/9781608059423114010005>
- [35] Kvetny, R. N., Dementiev, V. Yu., Mashnytskyi, M. O., & Yudin, O. O. (2009). *Difference methods and splines in multidimensional interpolation problems: monograph*. Vinnytsia: Universum-Vinnytsia, 92 p. [In Ukrainian].
- [36] Kvyetny, R. N., & Bogach, I. V. (2003). Interpolation of a function of two variables by the Lagrange method. *Bulletin of the Vinnytsia Polytechnic Institute*, 6, 365–368. [In Ukrainian].
- [37] Kvyetny, R. N., Kostrova, K. Yu., & Bogach, I. V. (2005). *Interpolation by self-similar sets: monograph*. Vinnytsia: Universum-Vinnytsia, 100 p. [In Ukrainian].

- [38] Malik Zawwar Hussain, & Muhammad Sarfraz. (2008). Positivity-preserving interpolation of positive data by rational cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2), 446–458. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.05.023>
- [39] Mamchuk, V. I. (2015). *Numerical methods: tutorial*. Kyiv: National Aviation University, 388 p. [In Ukrainian].
- [40] Martin Berzins. (2000). A Data-Bounded Quadratic Interpolant on Triangles and Tetrahedra. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1). <https://doi.org/10.1137/S1064827597317636>
- [41] Mikhaillets, V. A., & Murach, A. A. (2010). *Hörmander spaces, interpolation and elliptic problems*. With a preface by Yu. M. Berezansky. Kyiv: IM NAS of Ukraine, 370 p. [In Russian].
- [42] Min Hu, & Jieqing Tan. (2006). Adaptive osculatory rational interpolation for image processing. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195(1-2), 46 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.07.011>
- [43] Moskalets, O. F., & Shutko, V. M. (2010). The method of least squares for splines of odd powers. *Bulletin of Engineering Academy of Ukraine*, 2, 224. [In Ukrainian].
- [44] Nail A. Gumerov, & Ramani Duraiswami. (2007). Fast Radial Basis Function Interpolation via Preconditioned Krylov Iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(5). <https://doi.org/10.1137/060662083>
- [45] Nekrasov, O. N., & Mirmovich, E. G. (2010). Interpolation and approximation of data by polynomials of power, exponential and trigonometric types. *Scientific and educational problems of civil protection*, 4, 23–27. [In Russian].
- [46] Pahiryra, M. M. (1994). Interpolation of functions by a chained fraction and a branched chained fraction of a special type. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Mathematical*, 1, 72–79. [In Ukrainian].
- [47] Petukh, A. M., Obidnyk, D. T., & Romanyuk, O. N. (2007). *Interpolation in problems of contour formation: monograph*. Vinnytsia: VNTU, 104 p. [In Ukrainian].
- [48] Philip J. Rasch, & David L. Williamson. (1990). On Shape-Preserving Interpolation and Semi-Lagrangian Transport. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(4). <https://doi.org/10.1137/0911039>
- [49] Qinghua Sun, Fangxun Bao, Yunfeng Zhang, & Qi Duan. (2013). A bivariate rational interpolation based on scattered data on parallel lines. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 24(1), 75–80. <https://doi.org/10.1016/j.jvcir.2012.11.003>
- [50] Qiyuan Pang, Kenneth L. Ho, & Haizhao Yang. (2020). Interpolative Decomposition Butterfly Factorization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(2). <https://doi.org/10.1137/19M1294873>
- [51] Romanyuk, O. N., Romanyuk, O. V., & Velychko M. O. (2020). Analysis of circular interpolation methods. *The 12th International scientific and practical conference "Impact of Modernity on Science and Practice"* (12-13 April, 2020), 572–574. Edmonton, Canada 2020.
- [52] Sarfraz, M., Hussain, & Malik Zawwar. (2006). Data visualization using rational spline interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189(1-2), 513 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.039>
- [53] Sergey Dolgov, Daniel Kressner, & Christoph Strössner. (2021). Functional Tucker Approximation Using Chebyshev Interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 43(3). <https://doi.org/10.1137/20M1356944>
- [54] Sheehan Olver, & Yuan Xu. (2021). Orthogonal structure on a quadratic curve. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 41(1), 206–246. <https://doi.org/10.1093/imanum/draa001>
- [55] Stefan Jakobsson, Bjorn Andersson, & Fredrik Edelvik. (2009). Rational radial basis function interpolation with applications to antenna design. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(4), 889 p. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.058>
- [56] Stephen M. Robinson. (1979). Quadratic Interpolation is Risky. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(3). <https://doi.org/10.1137/0716030>
- [57] Taylor Series and Power Series. (2008). *Applications and Computation Complex Analysis*, 63–71. [https://doi.org/10.1142/9789812811080\\_0011](https://doi.org/10.1142/9789812811080_0011)
- [58] Tsegelyk, H. G. (2004). *Numerical methods: textbook for university students*. Lviv National University named after Ivan Franko. Lviv, 407 p. [In Ukrainian].
- [59] Tyada, K. R., Chand, A. K. B., & Sajid, M. (2021). Shape preserving rational cubic trigonometric fractal interpolation functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 190, 866–891. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.06.015>
- [60] Volontyr, L. O., Zelinska, O. V., Potapova, N. A., & Chikov, I. A. (2020). *Numerical methods: tutorial*. Vinnytsia NAU. Vinnytsia: VNAU, 322 p. [In Ukrainian].
- [61] Winfield, D. (1973). Function Minimization by Interpolation in a Data Table. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 12(3), 339–347. <https://doi.org/10.1093/imamat/12.3.339>
- [62] Yang Jing, & Han Xu-li. (2019). Robust Uniform B-Spline Models for Interpolating Interval Data. *Journal of Graphics*, 40(3), 429–434. <http://www.txxb.com.cn/EN/10.11996/JG.j.2095-302X.2019030429>
- [63] Yaroshenko, O. I., & Grihorkiv, M. V. (2018). *Numerical methods: tutorial*. Chernivtsi: Chernivtsi National University, 172 p. [In Ukrainian].
- [64] Youtian Tao, & Dongyin Wang. (2015). A bivariate rational cubic interpolating spline with biquadratic denominator. *Applied Mathematics and Computation*, 264(1), 366–377. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.100>
- [65] Zhu, Y., & Wang, M. (2020). A class of C1 rational interpolation splines in one and two dimensions with region control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 39, 69. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-1067-2>
- [66] Zhuo Liu, Shengjun Liu & Yuanpeng Zhu. (2021). C<sup>2</sup> Rational Interpolation Splines with Region Control and Image Interpolation Application. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 63, 394–416. <https://doi.org/10.1007/s10851-020-01005-z>

**Yu. I. Hrytsiuk, R. B. Tushnytskyy**

*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## INTERPOLATION OF TABULAR FUNCTIONS FROM ONE INDEPENDENT VARIABLE USING THE TAYLOR POLYNOMIAL

A method of local interpolation of tabular functions from one independent variable using the Taylor polynomial of the  $n$ th degree in arbitrarily located interpolation nodes has been developed. This makes it possible to calculate intermediate values of tabular functions between interpolation nodes. The conducted analysis of the latest research and publications in the field of interpolation of tabular functions showed that the main part of the research is a strict theory of interpolation, i.e. clarification of its fundamental mathematical provisions. Some features of the interpolation of tabular functions from one independent variable using the Taylor polynomial of the  $n$ th degree are considered, namely: the solution algorithm and mathematical formulation of



the interpolation problem are given; its formalized notation is given, as well as the matrix notation of interpolation procedures for certain values of the argument. A scalar algorithm for solving the problem of interpolation of tabular functions from one independent variable using the Taylor polynomial of the 2nd, 3rd and 4th degrees has been developed. The simplicity and clarity of this algorithm is one of its advantages, but the algorithm is inconvenient for software implementation. The mathematical formulation of the problem of interpolation of tabular functions in terms of matrix algebra is given. The interpolation task is reduced to performing the following actions: based on the values of nodal points known from the table, it is necessary to calculate the Taylor matrix of the  $n$ th degree; based on the function values specified in the table a column vector of interpolation nodes should be formed; solve a linear system of algebraic equations, the root of which is the numerical coefficients of the Taylor polynomial of the  $n$ th degree.

A method of calculating the coefficients of the interpolant, given by the Taylor polynomial of the  $n$ th degree for one independent variable has been developed. The essence of the method reduces to the product of the matrix, inverse of the Taylor matrix, which is determined by the nodal points of the tabular function, by a column vector containing the values of the interpolation nodes. Specific examples demonstrate the peculiarities of calculating the interpolant coefficients of the 2nd, 3rd and 4th degrees for one independent variable, and for each of them the interpolated value of the function at a given point is calculated. Calculations were performed in the Excel environment, which by analogy can be successfully implemented in any other computing environment.

**Keywords:** matrix algebra; computational mathematics; Gauss method; coefficients of interpolant; nodal points; interpolation nodes; the solving task algorithm; mathematical formulation of the task.

---

#### Інформація про авторів:

**Грицюк Юрій Іванович**, д-р техн. наук, професор кафедри програмного забезпечення.

**Email:** yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-8183-3466>

**Тушницький Руслан Богданович**, канд. техн. наук, доцент кафедри програмного забезпечення.

**Email:** ruslan.b.tushnytskyi@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0002-8522-0293>

**Цитування за ДСТУ:** Грицюк Ю. І., Тушницький Р. Б. Інтерполяція табличних функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора. *Український журнал інформаційних технологій*. 2022, т. 4, № 2. С. 01–17.

**Citation APA:** Hrytsiuk, Yu. I., & Tushnytskyi, R. B. (2022). Interpolation of tabular functions from one independent variable using the Taylor polynomial. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 4(2), 01–17. <https://doi.org/10.23939/ujit2022.02.001>