

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ЗМІННОЇ СТРУКТУРИ НА ПРИКЛАДІ РУХУ ІНЕРЦІЙНОГО ЗБУДНИКА НА ПРУЖНИХ ОПОРАХ

© Кузьо І. В., Шоловій Ю. П., Магерус Н. І., 2022

<https://doi.org/>

Мета роботи полягає у розробленні математичної моделі поведінки систем змінної структури, що піддається впливу коливань. Динаміка систем змінної структури розглядається на прикладі руху інерційного збудника на пружних опорах. **Актуальність.** Велика кількість математичних моделей задач динаміки пружних систем під дією рухомого інерційного навантаження переважно висвітлює або лише загальний підхід для розв’язку даних задач, або описує конкретний тип обладнання, що “вузько” використовується у певних галузях промисловості. Запропонована математична модель коливної системи пропонує набагато більші можливості. Вона дозволяє видозмінювати розроблений підхід до моделювання динаміки систем змінної структури залежно від їх параметрів. **Методика.** Використовуючи рівняння Лагранжа 2-го роду, змодельовано динаміку руху інерційного віброзбудника на пружних опорах та надано детальний аналіз факторів та параметрів системи, що впливають на його поведінку. **Результати.** Представлена математична модель поведінки масивного тіла на пружних опорах із жорстко встановленим валом дозволяє обґрунтувати інерційно-жорсткісні та силові параметри коливної системи. **Наукова новизна.** Розроблено математичну модель поведінки масивного тіла на пружних опорах із жорстко встановленим валом, який через пружний зв’язок передає обертальний рух двом дебалансам. **Практична значущість.** Запропонована методика розрахунків дозволить згодом досліджувати способи стабілізації системи змінної структури та зменшення інерційного навантаження на елементи конструкції, що дасть змогу обґрунтувати необхідні параметри технічних систем.

Ключові слова: інерційний віброзбудник, дебаланс, рівняння Лагранжа 2-го роду, система змінної структури.

Вступ

При експлуатації висотних конструкцій, що широко використовуються у багатьох інженерних сферах, виникає потреба у забезпеченні їх надійної та безпечної роботи. До даних конструкцій належать спостережні вежі, технічні засоби для підйому і доставки вантажів та людей (крани, пожежні машини тощо). Цього можна досягти завдяки мінімізації динамічних та інерційних навантажень, які спричинені вимушеними коливаннями конструкцій. Дослідити поведінку такого обладнання можна шляхом математичного моделювання процесу коливань, викликаного різними факторами. Тому розробка математичної моделі коливної системи у загальному вигляді дозволяє у майбутньому досліджувати і аналізувати параметри конкретної системи, а також способи їх регулювання для забезпечення стійкості та надійності роботи.

Аналіз літературних джерел

Основні механічні і, відповідні їм, математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем під дією рухомого інерційного навантаження розглянуто у [1], проте основна увага приділена дослідженню математичної моделі динаміки балки на пружній основі, що знаходиться під дією рухомого інерційного навантаження. Однак на сьогодні значна увага науковців приділена розгляду об’єктів конкретного типу, що піддаються впливу коливань, із подальшим розробленням математичної моделі. Такі дослідження проводяться зазвичай окремо для кранів, спостережних веж чи інших технічних об’єктів. У дослідженнях [2] розглянуто кранові системи, що широко використовуються в багатьох галузях, пов’язаних із транспортуванням важких вантажів. На сьогодні дослідниками було

отримано безліч математичних моделей динаміки різних типів кранів і більшість підходів були на основі методів зосередженої маси. До них належить моделювання динаміки контейнерного крана [3, 4], моделювання козлового крана з використанням методу Лагранжа [5-7]. Для моделювання мостового крана переважно використовуються підходи Лагранжа [8-10]. У дослідженнях [2] представлено детальний огляд різних типів кранів, а також наведено способи моделювання одномятникових і двомаятникових кранових систем. Частина даних досліджень присвячена моделюванню мостового крана методом Лагранжа. Однак дані дослідження обмежені лише загальним виглядом рівнянь Лагранжа без уточнень окремих складових. Більш детальний опис математичної моделі мостового крану за допомогою рівнянь Лагранжа приведено у дослідженнях [11].

Мета

Метою даної роботи є розроблення математичної моделі поведінки системи змінної структури, що піддається впливу інерційного віброзбудника. Дана математична модель дозволить у майбутньому досліджувати способи стабілізації системи та зменшення інерційного навантаження на елементи конструкції.

Методика проведення досліджень

У роботі [12] досліджується поведінка вектора збурення віброзбудника конструкції, встановленої на жорстких опорах. Продовжуючи дослідження властивостей цього збудника, розглянемо рух жорсткого масивного тіла, на якому встановлений цей збудник, на пружній основі.

Для цього використаємо розрахункову схему (рис. 1) у масивному тілі на пружних опорах жорстко встановлений вал, який через пружний зв'язок передає обертальний рух двом дебалансам.

Результати досліджень та їх обговорення

На рис. 1 позначено: $\{XOY\}$, $\{X_1O_1Y_1\}$ – нерухома та рухома (зв'язана з тілом) системи координат; А, В – точки кріплення пружних опор до масивного тіла; O_2 – центр вала віброзбудника; X_{01} , Y_{01} , φ_{01} – координати початку рухомої системи координат та кут її повороту в нерухомій системі координат $\{XOY\}$; a , b – координати O_2 в рухомій системі координат; φ_2 , φ_3 , φ_4 – кути повороту вала і дебалансів.

Кінетичну енергію масивного тіла запишемо у вигляді:

$$T_{\text{т.}} = \frac{1}{2} m_{\text{т.}} \frac{dx_{01}}{dt}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{т.}} \frac{dy_{01}}{dt}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{т.}}^{01} \frac{d\varphi_{01}}{dt}^2, \quad (1)$$

де $m_{\text{т.}}$, $J_{\text{т.}}^{01}$ – маса і момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через точку O_1 , перпендикулярно площині рисунка.

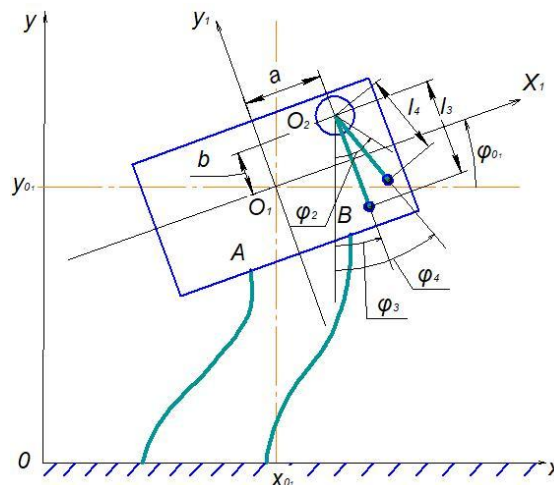


Рис. 1. Розрахункова схема

Fig. 1. Analysis scheme

Координати центру вала збудника і центрів мас дебалансів у нерухомій системі координат визначаються співвідношеннями:

$$x_{02} = x_{01} + K_2; y_{02} = y_{01} - K_1;$$

$$x_{0i} = x_{02} + K_{4i}; y_{0i} = y_{02} - K_{3i}; i = 3, 4,$$

де $K_1 = -a \cdot \sin \varphi_{01} + b \cdot \cos \varphi_{01}$; $K_2 = a \cdot \cos \varphi_{01} - b \cdot \sin \varphi_{01}$; $K_{3i} = l_i \cdot \cos \varphi_i$; $K_{4i} = l_i \cdot \sin \varphi_i$; $i = 3, 4$.

Кінетична енергія вала збудника буде дорівнювати:

$$T_{\text{вал}} = \frac{1}{2} m_{\text{вал}} \left(\frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 \right)^2 + \frac{dy_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2 \right)^2 + \frac{1}{2} J_{\text{вал}}^{02} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2, \quad (2)$$

де $m_{\text{вал}}$, $J_{\text{вал}}^{02}$ – маса вала та його момент інерції відносно власної осі обертання.

Кінетична енергія i -го дебаланса рівна:

$$T_{\text{деб},i} = \frac{1}{2} m_{\text{деб},i} \left(\frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 + \frac{d\varphi_i}{dt} K_{3i} \right)^2 + \frac{dy_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2 + \frac{d\varphi_i}{dt} K_{4i} \right)^2, \quad (3)$$

де $m_{\text{деб},i}$ – маса i -го дебаланса.

Привідний двигун збудника може знаходитись на нерухомому фундаменті або безпосередньо бути закріпленим на тілі, яке здійснює коливання. У другому випадку кінетична енергія двигуна разом з його ротором буде дорівнювати:

$$T_{\text{дв.}} = \frac{1}{2} m_{\text{дв.}} \left(\frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 \right)^2 + \frac{dy_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2 \right)^2 + \frac{1}{2} J_{\text{дв.}}^{02} \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2, \quad (4)$$

де $m_{\text{дв.}}$, $J_{\text{дв.}}^{02}$ – маса двигуна та його момент інерції відносно власної осі обертання.

Для випадку привідного двигуна на опорах у виразі кінетичної енергії двигуна його масу $m_{\text{дв.}}$ вважатимемо рівною нулю.

Сумарна кінетична енергія тіла, вала та дебалансів збудника разом з привідним двигуном, з врахуванням (1)... (4) набере вигляду:

$$\begin{aligned} 2T_{\text{сист.}} = m_{\text{т.}} & \left(\frac{dx_{01}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_{01}}{dt} \right)^2 + J_{\text{т.}}^{01} \left(\frac{d\varphi_{01}}{dt} \right)^2 + J_{\text{вал}}^{02} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 \\ & + m_{\text{прив.}} \left(\frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 \right)^2 + \left(\frac{dy_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2 \right)^2 + J_{\text{дв.}}^{02} \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \\ & + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} \left(2 \frac{d\varphi_i}{dt} K_{3i} \frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 + K_{4i} \frac{dy_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2 \right)^2 + K_{3i}^2 + K_{4i}^2 \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2, \quad (5) \end{aligned}$$

де $m_{\text{прив.}} = m_{\text{вал}} + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} + m_{\text{дв.}}$; $m_{\text{сист.}} = m_{\text{т.}} + m_{\text{прив.}}$.

Візьмемо похідні від кінетичної енергії по узагальнених координатах ($\varphi_1 \dots \varphi_4$, x_{01} , y_{01} , φ_{01}), їх швидкостях і часу. Вони мають вигляд:

$$\frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \frac{d\varphi_1}{dt}} = J_{\text{дв.}}^{02} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \frac{d\varphi_2}{dt}} & = J_{\text{вал}}^{02} \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2}; \quad \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial x_{01}} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \frac{dx_{01}}{dt}} = m_{\text{сист.}} \frac{d^2 x_{01}}{dt^2} + m_{\text{прив.}} K_1 \frac{d^2 \varphi_{01}}{dt^2} + \\ & + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{3i} \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} - m_{\text{прив.}} K_2 \frac{d\varphi_{01}}{dt} + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{4i} \frac{d\varphi_i}{dt}; \quad \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial y_{01}} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \varphi_{01}} = \frac{d\varphi_{01}}{dt} m_{\text{прив.}} - \frac{dx_{01}}{dt} K_2 + \frac{dy_{01}}{dt} K_1 + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} \frac{d\varphi_i}{dt} - K_{3i} K_2 + K_{4i} K_1; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \frac{d\varphi_{01}}{dt}} =$$

$$= \frac{d^2 \varphi_{01}}{dt^2} J_{\text{т.}}^{01} + m_{\text{прив.}} (K_1^2 + K_2^2) + m_{\text{прив.}} K_1 \frac{d^2 x_{01}}{dt^2} + m_{\text{прив.}} K_2 \frac{d^2 y_{01}}{dt^2} + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{3i} K_1 +$$

$$+ K_{4i} K_2 \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} m_{\text{прив.}} - \frac{dx_{01}}{dt} K_2 + \frac{dy_{01}}{dt} K_1 + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} (-K_{3i} K_2 + K_{4i} K_1) +$$

$$+ \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} (-K_{4i} K_1 + K_{3i} K_2) \frac{d\varphi_i}{dt}; \quad \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \varphi_i} = m_{\text{деб},i} \frac{d\varphi_i}{dt} - K_{4i} \frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 + K_{3i} \frac{dy_{01}}{dt} +$$

$$+ \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\text{сист.}}}{\partial \frac{d\varphi_i}{dt}} = m_{\text{деб},i} K_{3i} \frac{d^2 x_{01}}{dt^2} + m_{\text{деб},i} K_{4i} \frac{d^2 y_{01}}{dt^2} + m_{\text{деб},i} (K_{3i}^2 + K_{4i}^2) \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + m_{\text{деб},i} K_{3i} K_1 +$$

$$+K_{4i}K_2 \frac{d^2\varphi_{01}}{dt^2} + m_{\text{деб},i} \frac{d\varphi_{01}}{dt}^2 \cdot -K_{3i}K_2 + K_{4i}K_1 + \frac{d\varphi_i}{dt} - \frac{dx_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_1 K_{4i} + \frac{dy_{01}}{dt} + \frac{d\varphi_{01}}{dt} K_2 K_{3i} .$$

Рівняння Лагранжа 2-го роду запишемо у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j,;$$

де q_j для нашого випадку приймає полідовно $\varphi_1 \dots \varphi_4, \varphi_{01}, x_{01}, y_{01}; Q_j$ – узагальнена сила.

Підставляючи вирази для похідних і скорочуючи подібні члени, отримаємо систему рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} J_{\text{дв.}}^{02} \frac{d^2\varphi_{01}}{dt^2} &= Q_1; \quad J_{\text{вал}}^{02} \frac{d^2\varphi_{02}}{dt^2} = Q_2; \\ m_{\text{деб},i} K_{3i} \frac{d^2x_{01}}{dt^2} + m_{\text{деб},i} K_{4i} \frac{d^2y_{01}}{dt^2} + m_{\text{деб},i} K_{3i}K_1 + K_{4i}K_2 \frac{d^2\varphi_{01}}{dt^2} + m_{\text{деб},i} K_{3i}^2 + K_{4i}^2 \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} &= \\ &= m_{\text{деб},i} -K_{3i}K_2 + K_{4i}K_1 \frac{d\varphi_{01}}{dt}^2 + Q_1; \quad i = 3, 4; \\ J_{\text{т.}}^{01} + m_{\text{прив.}} K_1^2 + K_2^2 \frac{d^2\varphi_{01}}{dt^2} + m_{\text{прив.}} K_1 \frac{d^2x_{01}}{dt^2} + m_{\text{прив.}} K_2 \frac{d^2y_{01}}{dt^2} + \\ &+ \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{3i}K_1 + K_{4i}K_2 \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} -K_{4i}K_1 + K_{3i}K_2 \frac{d\varphi_i}{dt}^2 + Q_\varphi; \\ m_{\text{сист.}} \frac{d^2x_{01}}{dt^2} + m_{\text{прив.}} K_1 \frac{d^2\varphi_{01}}{dt^2} + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{3i} \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} &= m_{\text{прив.}} K_2 \frac{d\varphi_{01}}{dt}^2 + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{4i} \frac{d\varphi_i}{dt}^2 + Q_x; \\ m_{\text{сист.}} \frac{d^2y_{01}}{dt^2} + m_{\text{прив.}} K_2 \frac{d^2\varphi_{01}}{dt^2} + \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{4i} \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} &= m_{\text{прив.}} K_1 \frac{d\varphi_{01}}{dt}^2 + \\ &+ \sum_{i=3}^4 m_{\text{деб},i} K_{3i} \frac{d\varphi_i}{dt}^2 + Q_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдемо до визначення узагальнених сил. Для, спочатку, визначимо сили пружного деформування опор.

Нехай у вільному стані (рис. 2) опори мають довжину l_B , відстань між ними l_2 , а координати кріплення тіла лівої опори дорівнюють $(l_1, 0)$. Тоді координати тіла правої опори – $(l_1 + l_2, 0)$.

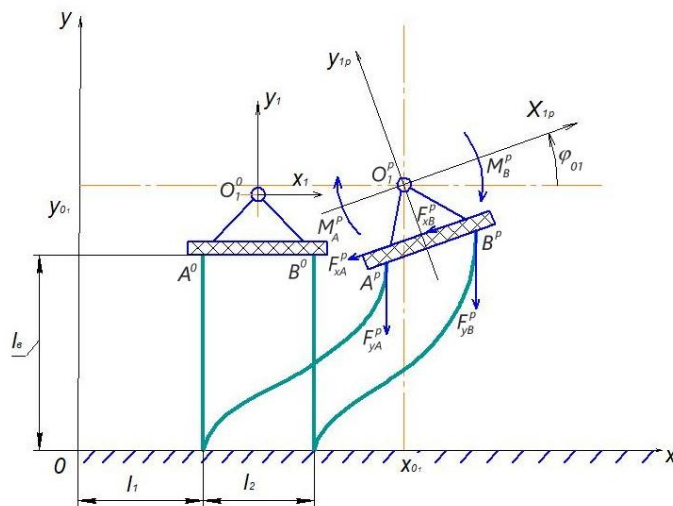


Рис. 2. Вільне (ліве) і рівноважне (праве) положення тіла

Fig. 2. Free (left) and equilibrium (right) body position

Кути α_L та α_Π визначаються співвідношеннями:

$$\alpha_L = \arctg \frac{-l_2}{l_B}; \quad \alpha_\Pi = \arctg \frac{l_2}{l_B}.$$

Визначимо рівновагу тіла під дією сил пружного деформування опор, сил ваги тіла, вала, дебалансів та двигуна.

Нехай рівновазі тіла (рис. 2) відповідають $(x_{01}^p, y_{01}^p, \varphi_{01}^p)$. В цьому положенні дебаланси розташовані в нижньому положенні. Координати точок O_2, O_3, O_4 в цьому положенні дорівнюють:

$$\begin{aligned} O_2^p \quad & x_{02}^p = x_{01}^p + a \cos \varphi_{01}^p - b \sin \varphi_{01}^p; \\ & y_{02}^p = y_{01}^p + a \sin \varphi_{01}^p + b \cos \varphi_{01}^p; \\ O_i^p \quad & x_{0i}^p = x_{02}^p; \quad i = 3, 4. \\ & y_{0i}^p = y_{02}^p - l_1; \end{aligned}$$

Координати точок кріплення пружних опор до тіла у стані рівноваги системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} A^p \quad & x_A^p = x_{01}^p + O_1 A \sin(\alpha_{л} + \varphi_{01}^p); \\ & y_A^p = y_{01}^p - O_1 A \cos(\alpha_{л} + \varphi_{01}^p); \\ B^p \quad & x_B^p = x_{01}^p + O_1 B \sin(\alpha_{п} + \varphi_{01}^p); \\ & y_B^p = y_{01}^p - O_1 B \cos \alpha_{п} + \varphi_{01}^p. \end{aligned}$$

Координати точки A і B у вільному положенні системи записуються у вигляді:

$$A \quad x_A^0 = l_1; \quad B \quad x_B^0 = l_1 + l_2; \\ y_A^0 = l_B; \quad y_B^0 = l_B;$$

Лінійні і кутові переміщення тіла з вільного стану у стан рівноваги мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta x_{л}^p &= x_{01}^p + O_1 A \sin \alpha_{л} + \varphi_{01}^p - l_1; \\ \Delta y_{л}^p &= y_{01}^p - O_1 A \cos \alpha_{л} + \varphi_{01}^p - l_B; \\ \Delta \varphi_{л}^p &= \varphi_{01}^p; \quad \Delta \varphi_{п}^p = \varphi_{01}^p; \\ \Delta x_{п}^p &= x_{01}^p + O_1 B \sin \alpha_{п} + \varphi_{01}^p - l_1 - l_2; \\ \Delta y_{п}^p &= y_{01}^p - O_1 B \cos \alpha_{п} + \varphi_{01}^p - l_B \end{aligned} \quad (7)$$

Модулі пружних сил і моментів дорівнюють:

$$F_{\frac{l}{п}x}^p = \Delta x_{\frac{l}{п}}^p \cdot C_{x \frac{l}{п}}; \quad F_{\frac{l}{п}y}^p = \Delta y_{\frac{l}{п}}^p \cdot C_{y \frac{l}{п}}; \quad M_{\frac{l}{п}}^p = \Delta \varphi_{\frac{l}{п}}^p \cdot C_{\varphi \frac{l}{п}}.$$

На тіло діє плоска система сил (рис. 3).

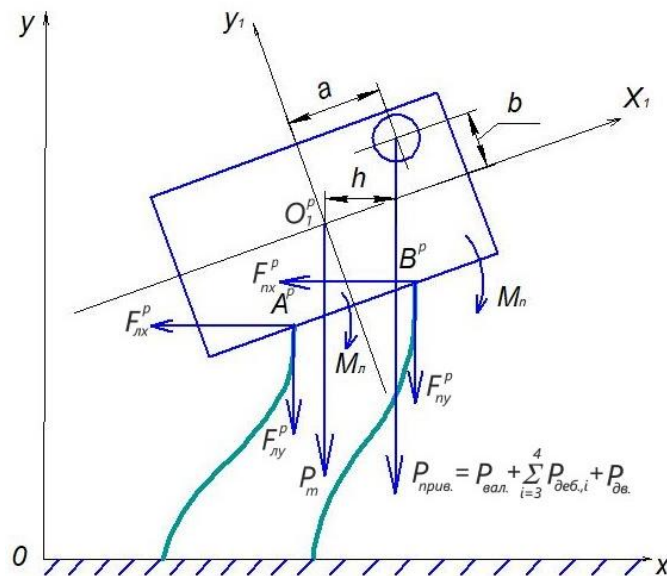


Рис. 3. Сили, які діють на тіло у стані рівноваги

Fig. 3. Forces acting on the body in equilibrium

Запишемо три рівняння рівноваги, які мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_i &= 0; & F_{lx}^p - F_{px}^p &= 0; \\ y_i &= 0; & -F_{ly}^p - F_{py}^p - P_{\text{сист.}} &= 0; \\ M_{01}^p &= 0; & -F_{lx}^p y_{01}^p - y_A^p + F_{ly}^p x_{01}^p - x_A^p - F_{px}^p y_{01}^p - y_B^p - & \\ & & -F_{py}^p x_B^p - x_{01}^p - P_{\text{прив.}} x_{02}^p - x_{01}^p - M_{\text{л}} - M_{\text{п}} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Перетворивши рівняння цієї системи, отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{01}^p C_{xл} + C_{xp} + C_{xl} \cdot O_1 A \cdot \sin \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p + C_{xp} \cdot O_1 B \cdot \sin \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01}^p &= l_1 C_{xл} + C_{xp} + l_2 C_{xp}; \\ y_{01}^p C_{yl} + C_{yp} - C_{yl} \cdot O_1 A \cdot \cos \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p - C_{yp} \cdot O_1 B \cdot \cos \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p &= l_{\text{в}} C_{yl} + C_{yp} - P_{\text{сист.}}; \\ x_{01}^p + O_1 A \cdot \sin \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p - l_1 \cdot C_{xl} \cdot O_1 A \cdot \cos \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p + y_{01}^p - O_1 A \cdot \cos \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p - l_{\text{в}} \cdot C_{yl} \cdot & \\ \cdot O_1 A \cdot \sin \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01}^p + x_{01}^p + O_1 B \cdot \sin \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01}^p - l_1 - l_2 \cdot C_{xp} \cdot O_1 B \cdot \cos \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01}^p + & \\ + y_{01}^p - O_1 B \cdot \cos \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01}^p - l_{\text{в}} \cdot C_{yp} \cdot O_1 B \cdot \sin \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01}^p + P_{\text{прив.}} \cdot a \cdot \cos \varphi_{01}^p - b \cdot \sin \varphi_{01}^p + & \\ + \Delta \varphi_{01}^p \cdot C_{\varphi\text{л}} + C_{\varphi\text{п}} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В окремому випадку, коли

$$\begin{aligned} C_{xл} = C_{xp} = C_x; & C_{yl} = C_{yp} = C_y; C_{\varphi\text{л}} = C_{\varphi\text{п}} = C_{\varphi}; \\ -\alpha_{\text{л}} = \alpha_{\text{п}} = \alpha; & O_1 A = O_1 B = R; \end{aligned} \quad (10)$$

Остання система трьох рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{aligned} x_{01}^p + R \sin \varphi_{01}^p \cdot \cos \alpha - l_1 + \frac{1}{2} l_2 &= 0; \\ y_{01}^p - R \cos \varphi_{01}^p \cdot \cos \alpha - l_{\text{в}} + \frac{P_{\text{сист.}}}{2C_y} &= 0; \\ x_{01}^p \cdot C_x \cdot \cos \varphi_{01}^p + y_{01}^p \cdot C_y \cdot \sin \varphi_{01}^p \cdot \cos \alpha + R C_x - C_y \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \sin \varphi_{01}^p \cdot \cos \varphi_{01}^p - & \\ - l_1 \cdot C_x \cdot \cos \varphi_{01}^p + l_{\text{в}} \cdot C_y \cdot \sin \varphi_{01}^p - \frac{1}{2} l_2 \cdot C_x \cdot \cos \alpha + \varphi_{01}^p + \frac{1}{2} R \cdot & \\ \cdot P_{\text{прив.}} \cdot a \cdot \cos \varphi_{01}^p - b \cdot \sin \varphi_{01}^p + \frac{1}{R} \varphi_{01}^p \cdot C_{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь, відносно, x_{01}^p, y_{01}^p та φ_{01}^p . З перших двох рівнянь:

$$\begin{aligned} x_{01}^p &= l_1 + \frac{1}{2} l_2 - R \sin \varphi_{01}^p \cdot \cos \alpha; \\ y_{01}^p &= l_{\text{в}} - \frac{P_{\text{сист.}}}{2C_y} + R \cos \varphi_{01}^p \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Підставивши вирази для x_{01}^p, y_{01}^p в третє рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} C_x \cdot l_2 \cdot \sin \alpha - P_{\text{сист.}} \cdot \cos \alpha + R C_y - C_x \cdot (\sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi_{01}^p) \cdot \sin \varphi_{01}^p + \frac{P_{\text{прив.}}}{2R} \cdot a \cdot \cos \varphi_{01}^p - b \cdot & \\ \cdot \sin \varphi_{01}^p + \frac{C_{\varphi}}{R} \cdot \varphi_{01}^p &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Останнє рівняння дозволяє визначити рівноважне значення кута повороту φ_{01} залежно від значень параметрів системи для окремого випадку. Загалом, коли не виконується умова (10), необхідно розв'язувати загальну систему рівнянь рівноваги (9) плоскої системи сил і моментів.

Перейдемо тепер до визначення узагальнених сил Q_j . Як відзначалось вище, на елементи системи діють:

- сила ваги $P_{\text{т}}, P_{\text{вал}}, P_{\text{деб.3}}, P_{\text{деб.4}}$;
- сили і моменти пружного деформування опор $F_{lx}, F_{ly}, F_{px}, F_{py}, M_{\text{лф}}, M_{\text{пф}}$;
- моменти пружного деформування зав'язків “ротатор двигуна – вал збудника ($M_{1,2}$)”, “вал збудника – i -ий дебаланс ($M_{2,i}, i = 3, 4$)”;
- крутний момент двигуна $M_{\text{д}}$.

Для визначення узагальнених сил будемо спочатку визначати елементарну роботу діючих сил на можливих переміщеннях системи. Дамо узагальненій координаті φ_1 можливу зміну $\delta \varphi_1$. При цьому $M_{\text{двиг.}}$ і M_{12} виконують роботу:

$$\delta A_1 = M_{\text{двиг.}} - M_{12} \delta \varphi_1.$$

Тоді узагальнена сила Q_1 буде дорівнювати:

$$Q_1 = M_{\text{двиг.}} - M_{12}. \quad (13)$$

Дано узагальненій координаті φ_2 можливу зміну $\delta\varphi_2$. При цьому M_{12}, M_{23}, M_{24} виконують роботу:

$$\delta A_2 = M_{12} - M_{23} - M_{24} \delta\varphi_2.$$

Звідси

$$Q_2 = M_{12} - M_{23} - M_{24}. \quad (14)$$

При зміні узагальненої координати x_{01} роботу виконують $F_{\text{лх}}, F_{\text{пх}}$:

$$\delta A_x = F_{\text{лх}} + F_{\text{пх}} \delta x_{01}.$$

Тоді:

$$Q_x = -F_{\text{лх}} - F_{\text{пх}}. \quad (15)$$

За аналогією

$$Q_y = -F_{\text{лу}} - F_{\text{пу}} - P_{\text{сист.}} \quad (16)$$

При зміні узагальненої координати φ_{01} роботу виконують $F_{\text{лх}}, F_{\text{лу}}, F_{\text{пх}}, F_{\text{пу}}, M_{\text{лф}}, M_{\text{пф}}, P_{\text{прив.}}$:

$$\delta A = -F_{\text{лх}} \cdot y_{01} - y_A + F_{\text{лу}} \cdot x_{01} - x_A - F_{\text{пх}} \cdot y_{01} - y_B + F_{\text{пу}} \cdot x_{01} - x_B - P_{\text{прив.}} \cdot x_{02} - x_{01} - M_{\text{лф}} - M_{\text{пф}} \delta\varphi_{01}.$$

Звідки

$$Q_\varphi = -F_{\text{лх}} \cdot y_{01} - y_A + F_{\text{лу}} \cdot x_{01} - x_A - F_{\text{пх}} \cdot y_{01} - y_B + F_{\text{пу}} \cdot x_{01} - x_B - P_{\text{прив.}} \cdot x_{02} - x_{01} - M_{\text{лф}} - M_{\text{пф}}. \quad (17)$$

При зміні узагальненої координати φ_i на $\delta\varphi_i$ виконують роботу $P_{\text{деб.,i}}$ та M_{2i} .

$$\delta A_i = M_{21} - P_{\text{деб.,i}} \cdot l_i \cdot \sin \varphi_i \delta\varphi_i, \quad i = 3, 4. \quad (18)$$

З врахуванням (13) - (18), отримаємо:

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_{\text{дв.}} - C_{12} \cdot \varphi_1 - \varphi_2 ; \\ Q_2 &= C_{12} \cdot \varphi_1 - \varphi_2 - \sum_{i=3}^4 C_{21} \cdot \varphi_2 - \varphi_1 ; \\ Q_x &= -C_{\text{лх}} + C_{\text{пх}} \cdot x_{01} - l_1 - O_1 A \cdot \sin \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01} \cdot C_{\text{лх}} - O_1 B \cdot \sin \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01} \cdot C_{\text{пх}} + l_2 \cdot C_{\text{пх}} ; \\ Q_y &= -C_{\text{лу}} + C_{\text{пу}} \cdot y_{01} - l_{\text{в}} + O_1 A \cdot \cos \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01} \cdot C_{\text{лу}} - O_1 B \cdot \cos \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01} \cdot C_{\text{пу}} - P_{\text{сист.}} ; \\ Q_\varphi &= -x_{01} + O_1 A \cdot \sin \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01} - l_1 \cdot C_{\text{лх}} \cdot O_1 A \cdot \cos \alpha_{\text{л}} - \varphi_{01} - y_{01} - O_1 A \cdot \cos \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01} - \\ & l_{\text{в}} \cdot C_{\text{лу}} \cdot O_1 A \cdot \sin \alpha_{\text{л}} + \varphi_{01} - x_{01} + O_1 B \cdot \sin \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01} - (l_1 + l_2) \cdot C_{\text{пх}} \cdot O_1 B \cdot \cos \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01} - \\ & - y_{01} - O_1 B \cdot \cos \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01} - l_{\text{в}} \cdot C_{\text{пу}} \cdot O_1 B \cdot \sin \alpha_{\text{п}} + \varphi_{01} - a \cos \varphi_{01} - b \sin \varphi_{01} \cdot P_{\text{прив.}} - \varphi_{01} \cdot \\ & \cdot C_{\text{лф}} + C_{\text{пф}} ; \\ Q_i &= C_{2i} \cdot \varphi_2 - \varphi_1 - P_i \cdot l_i \cdot \sin \varphi_i, \quad i = 3, 4. \end{aligned} \quad (19)$$

Система рівнянь (6), із врахуванням виразів (19), є математичною моделлю інерційного збудника змінної структури на пружних опорах.

Висновки

Розроблено математичну модель поведінки масивного тіла на пружних опорах із жорстко встановленим валом, який через пружний зв'язок передає обертальний рух двом дебалансам. Використання даної математичної моделі дозволить майбутньому досліджувати способи стабілізації системи змінної структури та зменшення інерційного навантаження на елементи конструкції, що дасть змогу обґрунтовувати необхідні параметри технічних систем та гарантувати надійну та безпечну роботу різноманітних конструкцій та споруд.

Список літератури

1. Дем'яненко А. Г. Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження // Вібрації в техніці та технологіях. 2018. № 2(74). С. 12-22.

2. Ramli L., Mohamed Z. et al Control strategies for crane systems: A comprehensive review // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 95. P. 1-23.
3. E. Pap, M. Georgijevic' et al. Pseudo-analysis application in complex mechanical systems modelling of container quay cranes // *Int. Symp. Intell. Syst. Informatics. – Subotica: SIISY 2010-8th IEEE*. 2010. P. 493-496.
4. N. D. Zrnic', K. Hoffmann, S. M. Bošnjak. Modelling of dynamic interaction between structure and trolley for mega container cranes // *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.* 2009. Vol. 15. P. 295-311.
5. W. Singhose, L. Porter et al. Effects of hoisting on the input shaping control of gantry cranes // *Control Eng. Pract.* 2000. Vol. 8. P.1159-1165.
6. R. M. T. Raja Ismail, M. A. Ahmad et al. Nonlinear dynamic modelling and analysis of a 3-D overhead gantry crane system with system parameters variation // *Int. J. Simul. Syst. Sci. Technol.* 2010. Vol. 11. P. 9-16.
7. V. S. Renuka, A. T. Mathew. Precise modelling of a gantry crane system including friction, 3D angular swing and hoisting cable flexibility // *Int. J. Theor. Appl. Res. Mech. Eng.* 2013. Vol. 2. P. 119-125.
8. M. H. Fatehi, M. Eghtesad, R. Amjadifard. Modelling and control of an overhead crane system with a flexible cable and large swing angle // *J. Low Freq. Noise Vib. Act. Control*. 2014. Vol. 33. P. 395-410.
9. A. Aksjonov, V. Vodovozov, E. Petlenkov. Three-dimensional crane modelling and control using Euler-Lagrange state-space approach and anti-swing fuzzy logic // *J. Electr. Control Commun. Eng.* 2015. Vol. 9. P. 5-13.
10. L. Anh Tuan, A. Janchiv et al. Feedback linearization control of overhead cranes with varying cable length // *Int. Conf. Control. Autom. Syst. Gyeonggi-Do. – South Kore.* 2011. P. 906-911.
11. D. Qian, Yi J. Hierarchical. Sliding Mode Control for Under-Actuated Cranes. Berlin : Springer, 2015.
12. Y. Y. Hereha, Y. S. Lozovoi. Uravnenye dvyzheniya ynerstyonnykh elementov obobshchennoi skhemy vybratsyonnykh mashyn // *Інститут прикладних проблем механіки і математики*. 1988. Vol. 5595-B 88. P. 29.

Kuzio I. V., Sholoviy Yu. P., Maherus N. I.
Lviv Polytechnic National University

MODELING OF DYNAMIC OF VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF MOVEMENT OF INERTIAL DRIVER ON ELASTIC SUPPORTS

Goal of the article is to develop a mathematical model of the behavior of the variable structure system that are affected by oscillations. The dynamic of variable structure systems is considered on the example of a motion of the inertial vibrating exciter on elastic supports. **Significance.** A large number of mathematical models of elastic system dynamic under the action of moving inertial load mostly covers only the general approach to solving these problems, or describes a specific type of equipment that is narrowly used in certain industries. The proposed mathematical model of the oscillating system offers much greater possibilities. It allows to modify the developed approach to modeling the dynamic of variable structure systems depending on their parameters. **Method.** Using the Lagrange's equations of the second kind, the dynamic of the inertial vibration exciter on elastic supports is modeled and the factors influencing its behavior are analyzed. **Results.** The presented mathematical model of the massive body behavior on elastic supports with a rigidly mounted shaft allows to substantiate the inertial-rigid and force parameters of the oscillatory system. **Scientific novelty.** A mathematical model of the body behavior on elastic supports with a rigidly mounted shaft, which transmits rotational motion to two imbalances through an elastic connection, has been developed. **Practical significance.** The proposed method of calculations allows further to investigate ways to stabilize the variable structure system and reduce the inertial load on structural elements, which allows to justify the necessary parameters of technical systems.

Key words: inertial vibrator, unbalance, Lagrange equation of the 2nd kind, variable structure system.

References

1. A. H. Demianenko (2018). Mekhanichni i matematychni modeli deiakykh zadach dynamiky pruzhnykh system z rukhomym inertsionym navantazhenniam ta yikh doslidzhennia. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*, Vol. 2(74), Pp.12-22.
2. L. Ramli, Z. Mohamed et al. (2017). Control strategies for crane systems: A comprehensive review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 95, Pp. 1-23, 2017.
3. E. Pap, M. Georgijevic' et al. (2010). Pseudo-analysis application in complex mechanical systems modelling of container quay cranes. *SIISY 2010–8th IEEE Int. Symp. Intell. Syst. Informatics, Subotica, Serbia*, Pp. 493-496.

4. N. D. Zrnic', K. Hoffmann, S. M. Bošnjak. (2009). Modelling of dynamic interaction between structure and trolley for mega container cranes. *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, Vol. 15, Pp. 295-311.
5. W. Singhose, L. Porter et al. (2000). Effects of hoisting on the input shaping control of gantry cranes. *Control Eng. Pract.*, Vol. 8, Pp. 1159-1165.
6. R. M. T. Raja Ismail, M. A. Ahmad et al. (2010). Nonlinear dynamic modelling and analysis of a 3-D overhead gantry crane system with system parameters variation. *Int. J. Simul. Syst. Sci. Technol*, Vol. 11, Pp. 9-16.
7. V. S. Renuka, A. T. Mathew. (2013). Precise modelling of a gantry crane system including friction, 3D angular swing and hoisting cable flexibility. *Int. J. Theor. Appl. Res. Mech. Eng.*, Vol. 2, Pp. 119-125.
8. M. H. Fatehi, M. Eghtesad, R. Amjadifard. (2014). Modelling and control of an overhead crane system with a flexible cable and large swing angle. *J. Low Freq. Noise Vib. Act. Control*, Vol. 33, Pp. 395-410.
9. A. Aksjonov, V. Vodovozov, E. Petlenkov. (2015). Three-dimensional crane modelling and control using Euler-Lagrange state-space approach and anti-swing fuzzy logic. *J. Electr. Control Commun. Eng.*, Vol. 9. Pp. 5-13.
10. L. Anh Tuan, A. Janchiv et al. (2011). Feedback linearization control of overhead cranes with varying cable length. *Int. Conf. Control. Autom.* Pp. 906-911.
11. D. Qian, J. Yi. (2015). *Hierarchical Sliding Mode Control for Under-Actuated Cranes*, Springer. Berlin : Heidelberg.
12. Y. Y. Hereha, Y. S. Lozovoi. (1988). *Uravnene dvyzheniya ynerstyonnykh elementov obobshchenoi skhemy vybratsyonnykh mashy*. Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the Academy of Sciences of the USSR, Vol. 5595-B 88, Pp. 29.