

**В. І. Гавриш**

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

## МАТЕМАТИЧНІ ПРОСТОРОВІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ІЗ ЛОКАЛЬНО ЗОСЕРЕДЖЕНИМ ТЕПЛОВИМ НАГРІВАННЯМ

Розроблено лінійні та нелінійні математичні моделі визначення температурного поля, а в подальшому і аналізу температурних режимів у ізотропних просторових неоднорідних середовищах, які піддаються внутрішнім та зовнішнім тепловим навантаженням. Для цього коефіцієнт теплопровідності для таких структур описано єдиним цілим за допомогою симетричних одиничних функцій, що дає змогу розглядати крайові задачі теплопровідності з одним лінійним та нелінійним диференціальним рівнянням теплопровідності з розривними коефіцієнтами та лінійними і нелінійними крайовими умовами на межових поверхнях середовищ. У випадку нелінійної крайової задачі застосовано перетворення Кірхгофа, за допомогою якого лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови і внаслідок отримано лінійне диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними та сингулярними коефіцієнтами відносно функції Кірхгофа з лінійними крайовими умовами. Для розв'язування отриманої лінійної крайової задачі використано метод інтегрального перетворення Фур'є, внаслідок чого отримано аналітичний розв'язок, який визначає лінеаризуючу функцію Кірхгофа. Як приклад, вибрано лінійну та кубічну залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів структури від температури, які часто використовують у багатьох практичних задачах. Внаслідок цього отримано аналітичні співвідношення у вигляді квадратних і біквадратних рівнянь для визначення розподілу температури у термочутливому шарі з чужорідним включенням при зовнішньому локальному нагріванні. Виконано числовий аналіз поведінки температури як функції просторових координат для заданих значень геометричних і теплофізичних параметрів. Досліджено вплив чужорідного включення на розподіл температури, якщо матеріалом середовища вибрано кераміку ВК94-І, а включення – срібло, алюміній та кремній. Для визначення числових значень температури в наведених конструкціях, а також аналізу теплообмінних процесів у середині цих конструкцій, зумовлених внутрішніми та зовнішніми тепловими навантаженнями, розроблено програмні засоби, із використанням яких виконано геометричне зображення розподілу температури залежно від просторових координат. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність розроблених математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у просторових неоднорідних середовищах з внутрішнім та зовнішнім нагріванням реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати такого роду середовища, які піддаються внутрішнім та зовнішнім тепловим навантаженням, щодо їх термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

**Ключові слова:** температурне поле; ізотропне просторове неоднорідне середовище; теплопровідність; конвективний теплообмін; ідеальний тепловий контакт; локальне внутрішнє та зовнішнє нагрівання; тепловий потік; термочутливість, чужорідне включення.

### Вступ / Introduction

*Теплопровідність* – це явище передачі внутрішньої енергії від однієї частини тіла до іншої або від одного тіла до іншого за їхнього безпосереднього контакту. Зауважимо, що внаслідок процесу теплопровідності не відбувається перенесення речовини з різною теплопровідністю. Так, метали краще переносять тепло, ніж деревина чи пластмаса. Тому внаслідок виготовлення побутових виробів їх конструкції комбінують з різних матеріалів із урахуванням теплопровідності. Серед металів високу теплопровідність мають срібло, мідь та алюміній. Водночас, теплопровідність рідин є меншою за теплопровідність металів. Добре відомо, що низьку теплопровідність мають різні теплоізоляційні матеріали, які використовують для теплової ізоляції огорожувальних конструкцій будівель та інших споруд, промислового устаткування й трубопроводів.

Нагадаємо, що температурним полем називають сукупність значень температури в усіх точках досліджуваного об'єкта для кожного фіксованого моменту часу. Температури, що характеризує ступінь нагрятості будь-

якої точки тіла, не можна приписати якийсь напрямок, і тому вона є скалярною величиною. Математично температурне поле описують диференціальним рівнянням із частковими похідними відносно невідомої температури як функції від трьох просторових координат і часу (тривимірне нестационарне задача теплопровідності). Для сталих (стаціонарних) режимів температурне поле від часу не залежить. У багатьох випадках розглядають залежність температурного поля від двох просторових координат, а інколи і від однієї. Графічно температурне поле зображають ізотермічними кривими та поверхнями, що з'єднують всі точки поля з однаковою температурою. Відстань між ізотермами є обернено пропорційною градієнту температури, внаслідок чого скалярне температурне поле відповідає векторному полю градієнтів температури.

Отже, для випадку стаціонарної температурної задачі температура є функцією тільки від просторових координат і зовсім не залежить від часу, тому тіло перебуває у тепловій рівновазі з навколишнім середовищем. За одиницю часу воно отримує та віддає однаково кіль-

кість теплоти. В цьому випадку причин для зростання температури в об'єкті немає. Тепловий потік у середовищі є сталим, а розподіл температури в перерізі тіла не змінюється з плином часу. У випадку нестационарних процесів теплопровідності температура є функцією як від просторових координат, так і від часу. Тобто, температура об'єкта змінюється як у просторі, так і з плином часу.

У техніці, інженерних спорудах і різних природних фізичних явищах широко поширені нестационарні процеси теплопровідності, зокрема, нагрівання та охолодження металу, різноманітних металічних заготовок у ливарному виробництві, їх термооброблення тощо. Усе це спричиняє зміну дії теплових потоків і, як наслідок, зумовлених ними температурних полів у елементах конструкцій від найпростішої до найскладнішої форми. Нестационарні процеси бувають періодичними, тобто повторюються через певні інтервали часу та інтенсивними чи перехідними, що характеризуються переходом від одного нестационарного процесу до іншого.

*Об'єкт дослідження* – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в ізотропних просторових неоднорідних середовищах із локальним внутрішнім і зовнішнім нагріванням.

*Предмет дослідження* – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для ізотропних просторових неоднорідних середовищ із локальним внутрішнім і зовнішнім нагріванням.

*Мета роботи* – розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових неоднорідних середовищ, які піддаються внутрішньому та зовнішньому нагріванню, внаслідок чого є можливість підвищити точність визначення температурних полів, що у подальшому вплине на ефективність методів проектування пристроїв, окремі елементи та вузли яких є неоднорідної структури і піддаються різної природи тепловим впливам.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямі розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- навести об'єкти дослідження та їх лінійні і нелінійні математичні моделі;
- навести спосіб лінеаризації нелінійної моделі;
- отримати аналітичні розв'язки лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності;
- розробити алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних полів у ізотропних просторових неоднорідних середовищах.

*Аналіз основних літературних джерел.* Визначення температурних режимів як в однорідних [2], [11], [13], так і в неоднорідних [10], [14], [15] конструкціях привертає увагу багатьох дослідників.

У роботі [3] наведено ізотропні пологі тонкі оболонки, що нагріваються внутрішніми джерелами тепла, зосередженими у квадраті та еліпсі, на межових поверхнях яких відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем. Задачу теплопровідності розв'язано за умов, коли температура навколишнього середовища є сталою, а на безмежності прямує до нуля. Теплові джерела з інтенсивністю, що дорівнює одиниці, розміщено на серединній поверхні, де вибрано початок

системи координат. Об'ємну густину джерел нагрівання описано за допомогою двовимірної функції Дірака. Досліджено поведінку температурного поля у середовищі та залежність температури від відстані до джерел тепла.

Розроблено інженерну методіку дослідження теплових режимів у елементах та вузлах конструкцій радіоелектронної апаратури, яка ґрунтується на розв'язанні рівняння теплопровідності для прямокутного паралелепіпеда з джерелами тепла такої ж геометричної форми. Розроблені модель та алгоритм визначення та аналізу теплових режимів у елементах конструкцій – стійка, блок, мікросхема електронної апаратури дає можливість отримати значення температури для довільної точки структури в аналітичному вигляді. Із розв'язку рівняння теплопровідності отримано співвідношення для визначення ефективної теплопровідності елементів конструкції вздовж основних координатних осей із врахуванням максимально заданого їх перегрівання [1].

У працях [4], [5], [6] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-годнорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-годнорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних і аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних і шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми. У роботах [12], [16] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися просторові моделі, які б враховували інтенсивні температурні збурення у конструкціях, зумовлені локально зосередженими тепловими джерелами. Це приводить до розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у неоднорідних елементах пристроїв складної геометричної форми, які функціонують у наведених температурних режимах. Результати досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування пристроїв сучасної техніки щодо їх термостійкості.

## Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

### Об'єкт дослідження та його математичні моделі.

**1.** Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним шаром, який містить паралелепіпедне включення з об'ємом  $V_0 = 8hbd = 2dS_0$ . На одній із межових поверхонь шару  $K_b = \{(x, y, -d - l_b) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$  зосереджено тепловий потік, поверхнева густина якого становить  $q_0$ , а на іншій  $K_n = \{(x, y, d + l_n) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$  – задано умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем зі сталою температурою  $t_c$ . На поверхнях включення існують умови ідеального теплового контакту. Наведену структуру віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$  із початком  $O$  в центрі включення (рис. 1).

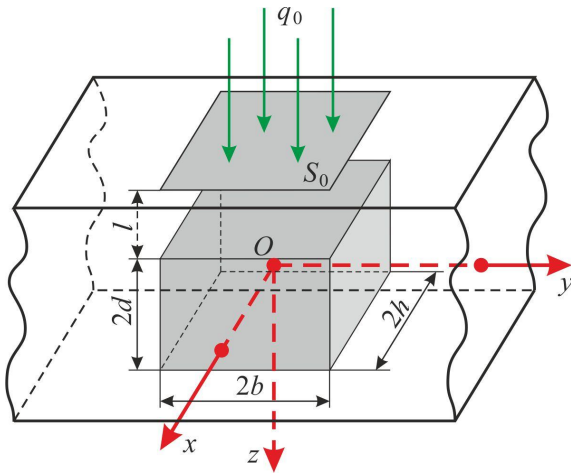


Рис. 1. Ізотропний шар з включенням, під дією теплового потоку / Isotropic layer with inclusion, under the action of heat flow

Для визначення температурного поля  $t(x, y, z)$  у наведеному середовищі скористаємось рівнянням теплопровідності [12], [17]

$$\operatorname{div}[\lambda(x, y, z)\operatorname{grad} \theta(x, y, z)] = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=-d-l_b} &= -Q(x, y); \\ \lambda_1 \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=d+l_n} &= -\alpha_n \theta(x, y, z) \Big|_{z=d+l_n}; \\ \theta(x, y, z) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= \theta(x, y, z) \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z) &= t(x, y, z) - t_c; \\ \lambda(x, y, z) &= \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)N(x, h)N(y, b)N(z, d); \\ Q(x, y) &= q_0 N(x, h)N(y, b); \end{aligned} \quad (3)$$

$\lambda(x, y, z)$  – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару;  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_0(t)$  – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення відповідно;  $\alpha_n$  – коефіцієнт тепловіддачі з межевої поверхні шару  $K_n$ ;  $S(\zeta)$  – симетрична одинична функція [17]

$$N(\zeta, \eta) = S(\zeta + \eta) - S(\zeta - \eta);$$

$$\text{де} \quad S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0.5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Припустимо, що геометричні параметри включення  $b, h, d$  є малими порівняно з відстанями  $l_b, l_n$  від його межових поверхонь  $\Pi_{\pm} = \{(x, y, \pm d): |x| \leq h, |y| \leq b\}$  до межових поверхонь  $K_b, K_n$  шару. Введемо зведену теплопровідність  $\Lambda_0 = \lambda_0 V_0$  включення, зведену поверхневу густину теплового потоку  $Q_0 = q_0 V_0$  і перейдемо у виразах (3) до границі для  $h \rightarrow 0, b \rightarrow 0, d \rightarrow 0$ , зберігаючи при цьому  $\Lambda_0$  і  $Q_0$  сталими та використовуючи відому границю

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{N(\zeta, \eta)}{2\eta} = \delta(\zeta).$$

Внаслідок цього отримаємо співвідношення

$$\lambda(x, y, z) = \lambda_1 + \Lambda_0 \delta(x, y, z), \quad Q(x, y) = Q_0 \delta(x, y), \quad (4)$$

де  $\delta(x)$ ,  $\delta(x, y)$ ,  $\delta(x, y, z)$  – одновимірні, двовимірні і тривимірні дельта-функції Дірака відповідно [17].

Хоча локальна неоднорідність шару, описана у співвідношеннях (4), які містять дельта-функцію Дірака, формально зосереджена в початку системи координат,

проте вона характеризується скінченними розмірами, які пов'язані з об'ємом  $V_0$  та площею  $S_0$ . Як наслідок, за допомогою (4) ефективно враховано скінченні розміри включення та прямокутника, в якому зосереджено теплової потік.

Із урахуванням виразів (4) після деяких перетворень диференціальне рівняння (1) перепишемо у такому вигляді:

$$\Delta \theta + \frac{\Lambda_0}{\lambda_1} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}^* \delta'(x) \delta(y, z) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}^* \delta'(y) \delta(x, z) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \delta'(z) \delta(x, y) \right] = 0, \quad (5)$$

$$\text{де:} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=+0} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=-0} \right]; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа в просторовій прямокутній декартовій системі координат.

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до крайових умов (2) із урахуванням співвідношень (4) і диференціального рівняння другого порядку з частковими похідними та сингулярною правою частиною (5). Внаслідок цього отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\theta}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\theta}(z) = P_2 \delta'(z) \quad (6)$$

і крайові умови

$$\frac{d \bar{\theta}(z)}{dz} \Big|_{z=-d-l_b} = R_1, \quad \lambda_1 \frac{d \bar{\theta}(z)}{dz} \Big|_{z=d+l_n} = -\alpha_n \bar{\theta}(z) \Big|_{z=d+l_n}, \quad (7)$$

$$\text{де:} \quad \bar{\theta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, y, z) e^{i\beta y} dy \quad \text{– трансформанта}$$

функції  $\theta(x, y, z)$ ;  $\alpha, \beta$  – параметри інтегрального перетворення;  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ;  $R_1 = -\frac{Q_0}{2\pi \lambda_1}$ ;  $P_2 = -\frac{\Lambda_0}{2\pi \lambda_1} \frac{\partial \theta(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^*$  і

$$\text{враховано рівність} \quad \frac{\partial \theta(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0}^* = \frac{\partial \theta(0, y, 0)}{\partial y} \Big|_{y=0}^* = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння (6) отримаємо методом варіації сталих у такому вигляді:

$$\bar{\theta}(z) = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} + P_2 \operatorname{ch} \gamma z S(z).$$

Скориставшись крайовими умовами (7), визначимо сталі інтегрування  $c_1$  і  $c_2$ . Внаслідок виконання таких дій отримаємо розв'язок задачі (6), (7)

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(z) = P_2 \left\{ \operatorname{ch} \gamma z S(z) - \frac{1}{\Delta} \left[ \gamma \operatorname{sh} \gamma (d + l_n) + \frac{\alpha_n}{\lambda_1} \operatorname{ch} \gamma (d + l_n) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \operatorname{ch} \gamma (z + d + l_b) \right\} - \frac{R_1}{\Delta} \left[ \operatorname{ch} \gamma (z - d - l_n) - \frac{\alpha_n}{\lambda_1 \gamma} \operatorname{sh} \gamma (z - d - l_n) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (8), отримаємо вираз, який визначає функцію  $\theta(x, y, z)$

$$\theta(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \cos \beta y \bar{\theta}(z) d\alpha d\beta. \quad (9)$$

Скориставшись отриманим співвідношенням (9), визначимо значення похідної  $\frac{\partial \theta(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^*$  в точці її розриву  $(0, 0, z)$  у такому вигляді:



$$\left. \frac{\partial \theta(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* = \frac{-Q_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{D(z)} \Lambda_n d\alpha d\beta}{\pi^2 \lambda_1^2 - \lambda_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{D(z)} \Lambda_n \text{sh} \gamma (d+l_b) d\alpha d\beta},$$

де:  $\Lambda_n = \lambda_1 \gamma \text{sh} \gamma (d+l_n) + \alpha_n \text{ch} \gamma (d+l_n)$ ;

$$D(z) = \gamma \text{sh} \gamma (2d+l_n+l_b) + \frac{\alpha_n}{\lambda_1} \text{ch} \gamma (2d+l_n+l_b).$$

Внаслідок цього шуканий розподіл температури  $\theta(x,y,z)$ , спричинений тепловим потоком, локально зосередженим на межовій поверхні просторового середовища з тепловіддачею та чужорідним включенням з малими геометричними параметрами, виражено співвідношенням (9). Це дає змогу розробляти розрахункові алгоритми і на їх основі виконувати програмну реалізацію для аналізу температурних режимів у елементах і окремих вузлах різного роду пристроїв сучасної техніки, які геометрично описують такими структурами.

**2.** Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним термочутливим шаром, який містить паралелепіпедне включення з об'ємом  $V_0 = 8hbd = 2dS_0$ . На одній із межових поверхонь шару  $K_b = \{(x,y,-d-l_b) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$  зосереджено тепловий потік, поверхнева густина якого становить  $q_0$ , а на іншій  $K_n = \{(x,y,d+l_n) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$  – задано крайові умови другого роду. На поверхнях включення задано умови ідеального теплового контакту. Наведену структуру віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x,y,z)$  із початком  $O$  в центрі включення (рис. 1).

Для визначення температурного поля  $t(x,y,z)$  у наведеному термочутливому середовищі скористаємось нелінійним рівнянням теплопровідності [12], [16]

$$\text{div}[\lambda(x,y,z,t) \text{grad } t(x,y,z)] = 0 \quad (10)$$

з крайовими умовами

$$\lambda_1(t) \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=-d-l_b} = -Q(x,y), \quad \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=d+l_n} = 0, \quad t \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = t \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0,$$

де:  $\lambda(x,y,z,t) = \lambda_1(t) + (\lambda_0(t) - \lambda_1(t))N(x,h)N(y,b)N(z,d)$ ; (12)

$$Q(x,y) = q_0 N(x,h)N(y,b);$$

$\lambda(x,y,z,t)$  – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного термочутливого шару;  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_0(t)$  – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення відповідно.

Припустимо, що розміри включення  $b, h, d$  є малими порівняно з відстанями  $l_b, l_n$  від його межових поверхонь  $P_\pm = \{(x,y,\pm d) : |x| \leq h, |y| \leq b\}$  до межових поверхонь  $K_b, K_n$  шару. Введемо зведену теплопровідність  $\Lambda_0(t) = \lambda_0(t)V_0$  включення, зведену поверхневу густину теплового потоку  $q_0 = q_0V_0$  і перейдемо у виразах (12) до границі для  $h \rightarrow 0, b \rightarrow 0, d \rightarrow 0$ , зберігаючи при цьому  $\Lambda_0(t)$  і  $Q_0$  сталими та використовуючи відому границю

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{N(\zeta,\eta)}{2\eta} = \delta(\zeta).$$

Внаслідок цього отримаємо співвідношення

$$\lambda(x,y,z,t) = \lambda_1(t) + \Lambda_0(t)\delta(x,y,z), \quad Q(x,y) = Q_0\delta(x,y), \quad (13)$$

із урахуванням яких після деяких перетворень рівняння (10) перепишемо у такому вигляді:

$$\text{div}[\lambda_1(t) \text{grad} t(x,y,z)] + \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta(x,y) \delta'(z) = 0. \quad (14)$$

Розглянемо перетворення Кірхгофа

$$\mathcal{G}(x,y,z) = \frac{1}{\lambda_1^0} \int_0^{t(x,y,z)} \lambda_1(\zeta) d\zeta \quad (15)$$

і продиференціюємо співвідношення (15) за змінними  $x, y$  та  $z$ , внаслідок чого отримаємо

$$\lambda_1^0 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \zeta} = \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial \zeta} \quad (\zeta = x,y,z), \quad (16)$$

де  $\lambda_1^0$  – опорний коефіцієнт теплопровідності шару.

Із урахуванням виразу (16) рівняння (14) та крайові умови (11) перетворимо і внаслідок одержимо

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{1}{\lambda_1^0} \left[ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta'(z) \right] \delta(x,y); \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right|_{z=d+l_n} = 0, \quad \mathcal{G} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \mathcal{G} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right|_{z=-d-l_b} = -Q(x,y). \quad (18)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до задачі (17), (18), прийдемо до звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\mathcal{G}}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\mathcal{G}} = -\frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \left[ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta'(z) \right] \quad (19)$$

і таких крайових умов:

$$\left. \frac{d \bar{\mathcal{G}}}{dz} \right|_{z=d+l_n} = 0, \quad \left. \frac{d \bar{\mathcal{G}}}{dz} \right|_{z=-d-l} = -\frac{Q_0}{2\pi \lambda_1}, \quad (20)$$

де:  $\bar{\mathcal{G}}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x} dx \int_{-\infty}^\infty \mathcal{G}(x,y,z) e^{i\beta y} dy$  – трансформанта функції  $\mathcal{G}(x,y,z)$ .

Загальний розв'язок рівняння (19) отримаємо методом варіації сталих у такому вигляді:

$$\bar{\mathcal{G}}(\alpha, \beta, z) = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} - \frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \left[ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \text{ch } \gamma z \right] S(z).$$

Використавши крайові умови (20), визначимо сталі інтегрування  $c_1$  і  $c_2$ . Внаслідок цього одержимо розв'язок задачі (19), (20)

$$\bar{\mathcal{G}}(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{\pi \lambda_1^0} \left\{ 0,5 \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \cdot \right. \quad (21)$$

$$\left. \left[ f_1(z) \text{sh } \gamma (d+l_n) - \text{ch } \gamma z S(z) + \frac{Q_0}{\gamma} f_2(z) \right] \right\},$$

$$\text{де: } f_1(z) = \frac{\text{ch } \gamma (z+d+l_b)}{\text{sh } \gamma (2d+l_n+l_b)}; f_2(z) = \frac{\text{ch } \gamma (z-d-l_n)}{\text{sh } \gamma (2d+l_n+l_b)}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (21), отримаємо вираз, який визначає функцію

$$\mathcal{G}(x,y,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \alpha x \cos \beta y \bar{\mathcal{G}}(\alpha, \beta, z) d\alpha d\beta. \quad (22)$$

Для наявних залежностей коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури, із використанням співвідношень (15) і (22), одержимо нелінійне алгебраїчне рівняння для визначення величини

$$\left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^*.$$

Шукане температурне поле  $t(x,y,z)$  у наведеному неоднорідному термочутливому просторовому середовищі визначимо з нелінійного алгебраїчного рівняння, от-

риманого з використанням співвідношень (15) і (22) та наявних залежностей коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.

**Часткові приклади.** Для низьких температур залежність коефіцієнта теплопровідності неметалічних кристалів від температури виражають співвідношенням [12], [16]

$$\lambda(t) = \kappa t^3 (\kappa - \text{const}). \quad (23)$$

Тоді з використанням виразів (15) і (22) отримаємо вираз для визначення температури  $t(x, y, z)$

$$t(x, y, z) = \sqrt[4]{4 / \kappa \lambda_1^0 \vartheta(x, y, z)}. \quad (24)$$

Значення величини  $\left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^*$  визначаємо з такого

нелінійного рівняння:

$$[4\vartheta(0, 0, 0)]^{\frac{3}{4}} \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* - \left( \frac{\lambda_1^0}{\kappa} \right)^{1/4} \left. \frac{\partial \vartheta(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Часто для металів у процесі розв'язування багатьох практичних задачах для певних інтервалів температур використовують залежність коефіцієнта теплопровідності від температури у вигляді  $\lambda = \lambda^0(1 - kt)$ , де  $\lambda^0$ ,  $k$  – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалу.

Скориставшись цим виразом та (15) і (22), отримаємо співвідношення, яке визначає температуру

$$t(x, y, z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta(x, y, z)}}{k_1}, \quad (25)$$

а значення величини  $\left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^*$  одержуємо, розв'язавши нелінійне алгебраїчне рівняння

$$\left[ \left. \frac{\partial \vartheta(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0} \right]^2 - [1 - 2k_1 \vartheta(0, 0, 0)] \left[ \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \right]^2 = 0,$$

де  $k_1$  – температурний коефіцієнт теплопровідності шару;

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \vartheta(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{1}{\pi^2 \lambda_1^0} \left\{ Q_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ Sc - \frac{1}{2} \right] d\alpha d\beta - \right. \\ &\quad \left. - \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma S s d\alpha d\beta \right\}; \\ \vartheta(0, 0, 0) &= \frac{1}{\pi^2 \lambda_1^0} \left\{ \Lambda_0 \left. \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} - Cs \right] d\alpha d\beta + \right. \\ &\quad \left. + Q_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma C c d\alpha d\beta \right\}; \end{aligned}$$

$$S = \frac{sh \gamma (d + l_n)}{sh \gamma (2d + l_n + l_b)}; C = \frac{ch \gamma (d + l_n)}{sh \gamma (2d + l_n + l_b)};$$

$$c = ch \gamma (d + l_b); s = sh \gamma (d + l_b).$$

У наслідку, співвідношеннями (23) і (25) визначено температурне поле  $t(x, y, z)$ , зумовлене локально зосередженим тепловим потоком, у неоднорідному термочутливому просторовому середовищі з чужорідним включенням із малими геометричними параметрами для наведених залежностей коефіцієнта теплопровідності від температури.

**3.** Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним півпростором, який містить на відстані  $l$  паралелепіпедне включення з об'ємом  $V_0 = 8hbd$ , в області

якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0$ . На межовій поверхні півпростору  $K = \{(x, y, -d - l) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$  існує конвективний теплообмін з навколишнім середовищем зі сталою температурою  $t_c$ . На поверхнях включення задано умови ідеального теплового контакту. Наведену структуру віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$  із початком  $O$  в центрі включення.

З огляду на те, що геометричні параметри включення  $b, h, d \in$  малими порівняно з відстанню  $l$  від його межової поверхні  $\Pi = \{(x, y, -d) : |x| \leq h, |y| \leq b\}$  до межової поверхні  $K$  півпростору, для визначення температурного поля  $\theta(x, y, z)$  у наведеному середовищі скористаємось диференціальним рівнянням другого порядку з частковими похідними та сингулярними коефіцієнтами і правою частиною

$$\begin{aligned} \Delta \theta + \frac{\Lambda_0}{\lambda_1} \left[ \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0}^* \delta'(x) \delta(y, z) + \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0}^* \delta'(y) \delta(x, z) + \right. \\ \left. + \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0}^* \delta'(z) \delta(x, y) \right] = -\frac{Q_0}{\lambda_0} \delta(x, y, z), \end{aligned} \quad (26)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left. \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=-d-l} = \alpha \theta(x, y, z) \Big|_{z=-d-l}, \\ \theta(x, y, z) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \theta(x, y, z) \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = \theta(x, y, z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

де  $Q_0 = qV_0$  – зведена потужність діючих внутрішніх джерел тепла.

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до задачі (26), (27). Внаслідок цього отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\theta}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\theta}(z) = -P_1 \delta(z) - P_2 \delta'(z) \quad (28)$$

і крайові умови

$$\bar{\theta}(z) \Big|_{z \rightarrow 0} = 0, \lambda_1 \left. \frac{d\bar{\theta}(z)}{dz} \right|_{z=-d-l} = \alpha \bar{\theta}(z) \Big|_{z=-d-l}, \quad (29)$$

$$\text{де: } P_1 = \frac{Q_0}{2\pi\lambda_1}; P_2 = \frac{\Lambda_0}{2\pi\lambda_1} \left. \frac{\partial \theta(0, 0, z)}{\partial z} \right|_{z=0}^*.$$

Розв'язок крайової задачі (28), (29) отримаємо у такому вигляді

$$\bar{\theta}(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P_1}{\gamma} [F_1(z) - F_2(z + d_1)] - P_2 [F_2(z + d_1) + F_1(z) \text{sign}(z)] \right\}, \quad (30)$$

$$\text{де: } F_1(z) = \exp(-\gamma|z|); F_2(z) = \frac{\alpha - \lambda_1 \gamma}{\alpha + \lambda_1 \gamma}; d_1 = 2(d + l);$$

$$\text{sign}(\zeta) = \begin{cases} 1, \zeta > 0, \\ 0, \zeta = 0, \\ -1, \zeta < 0. \end{cases}$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (30), знаходимо вираз для шуканої безрозмірної температури  $t(x, y, z)$

$$\begin{aligned} T(X, Y, Z) = \frac{\lambda_1 l}{Q_0} \theta(x, y, z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} [\varphi^{-1/2}(X, Y, Z) + \right. \\ \left. + \varphi^{-1/2}(X, Y, Z + D) - Bi\psi(X, Y, Z + D)] + \right. \\ \left. + P_2 [Z \varphi^{-3/2}(X, Y, Z) - (Z + D) \varphi^{-3/2}(X, Y, Z) + \right. \\ \left. + Bi\psi_1(X, Y, Z + D)] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $X=x/l$ ;  $Y=y/l$ ;  $Z=z/l$ ;  $D=d_1/l$ ;  $\varphi(x,y,z)=X^2+Y^2+Z^2$ ;  $Bi=\alpha_z l/\lambda_1$  – критерій Біо;

$$\psi(X,Y,Z) = 2 \exp(BiZ) \int_Z^{\infty} \exp(-BiZ) \varphi^{-\frac{1}{2}}(X,Y,Z) dZ;$$

$$\psi_1(X,Y,Z) = 2 \exp(BiZ) \int_Z^{\infty} Z \exp(-BiZ) \varphi^{-\frac{3}{2}}(X,Y,Z) dZ;$$

$$\left. \frac{\partial \theta(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* = \frac{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{4(d+l)^2} + B(D)}{l \left\{ 4\pi + \frac{\Lambda_0}{\lambda_1} \left[ \frac{1}{4(d+l)^3} + B \right] \psi_1(0,0,D) \right\}};$$

$$B(D) = \frac{Bi}{l} \left( \frac{Bi}{l} \psi(0,0,D) - \frac{1}{l+d} \right); B = \frac{Bi}{l} \left( \frac{Bi}{l^2} - \frac{1}{2(d+l)^2} \right).$$

У частковому випадку для  $Bi=0$  співвідношення (31) набуде такого вигляду:

$$T(X,Y,Z) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi^{-1/2}(X,Y,Z) \left[ \frac{1}{2\pi} + Z P_2 \varphi^{-1}(X,Y,Z) \right] + \varphi^{-1/2}(X,Y,Z+D) \left[ \frac{1}{2\pi} - (Z+D) P_2 \varphi^{-1}(X,Y,Z+D) \right] \right\}, \quad (32)$$

де 
$$\left. \frac{\partial \theta(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* = \frac{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{4(d+l)^2}}{l \left( 4\pi + \frac{\Lambda_0}{4\lambda_1(d+l)^3} \psi_1(0,0,D) \right)}.$$

Внаслідок цього шуканий розподіл температури  $t(x,y,z)$  у ізотропному півпросторі з тепловіддачею, спричинений внутрішнім локальним нагріванням неоднорідним елементом, виражено співвідношенням (31), а для часткового випадку, коли межа поверхня півпростору є теплоізолюваною, співвідношенням (32).

4. Розглянемо просторове середовище, описане ізотропним півпростором, який містить на відстані  $l$  паралелепіпедне включення з об'ємом  $V_0 = 8hbd$ . На межовій поверхні півпростору  $K = \{(x,y,-d-l) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$  в точці  $x=y=0$  локально зосереджений тепловий потік потужністю  $q_0$ . На поверхнях включення існує ідеальний тепловий контакт. Наведену структуру віднесено до декартової прямокутної системи координат  $(x,y,z)$  із початком  $O$  в центрі включення.

Оскільки геометричні параметри включення  $b, h, d$  є малими порівняно з відстанню  $l$  від його межевої поверхні  $\Pi = \{(x,y,-d) : |x| \leq h, |y| \leq b\}$  до межевої поверхні  $K$  півпростору, для визначення температурного поля  $\theta(x,y,z)$  у наведеному середовищі скористаємось диференціальним рівнянням другого порядку з частковими

похідними та сингулярними коефіцієнтами (5) і крайовими умовами

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial \theta(x,y,z)}{\partial z} \right|_{z=-d-l} = -q_0 \delta(x,y),$$

$$\theta(x,y,z) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \theta(x,y,z) \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = \theta(x,y,z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (33)$$

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за координатами  $x$  та  $y$  до рівняння (5) та крайових умов (33). Внаслідок цього отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною (6) і крайові умови

$$\left. \frac{d\bar{\theta}(z)}{dz} \right|_{z=-d-l} = P, \quad \bar{\theta}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (34)$$

Розв'язок крайової задачі (6), (34) отримаємо у такому вигляді

$$\bar{\theta}(z) = \frac{1}{2} \left\{ P_2 [F_1(z) \text{sign}(z) - \exp(-\gamma z_1)] - P_1 \frac{\exp(-\gamma z_2)}{\gamma} \right\}, \quad (35)$$

де  $z_1 = z + 2(d+l)$ ;  $z_2 = z + d+l$ .

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (35), знаходимо вираз для шуканої безрозмірної температури  $t(x,y,z)$

$$T(X,Y,Z) = \frac{\lambda_1 h}{Q_0} \theta(x,y,z) = \frac{1}{2} \left[ \varphi^{-1/2}(X,Y,Z) / \pi + P_2 (Z \varphi^{-3/2}(X,Y,Z) - Z_1 \varphi^{-3/2}(X,Y,Z_1)) \right], \quad (36)$$

де  $X=x/h$ ;  $Y=y/h$ ;  $Z=z/h$ ;  $Z_1=z_1/h$ ;  $Z_2=z_2/h$ ;

$$\left. \frac{\partial \theta(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* = \frac{-8(d+l)}{h \left[ \frac{\Lambda_0}{\lambda_1} + 16\pi(d+l)^3 \right]}.$$

Внаслідок цього отримано розподіл безрозмірної температури  $t(x,y,z)$  за просторовими координатами у ізотропному півпросторі з чужорідним включенням, спричинений зовнішнім локальним нагріванням, який виражено співвідношенням (36).

**Обговорення результатів дослідження.** Виконано числові розрахунки зміни температури  $\theta(x,y,z)$  для теплоактивного включення (в області його рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла зі сталою потужністю  $q_0$ ) залежно від координати  $z$  для  $x = y = 0$ . Матеріалом шару вибрано кераміку ВК94-1 ( $\lambda=13,4$  Вт/(град·м)), а матеріалом включення – срібло ( $\lambda=419$  Вт/(град·м)) (крива 1), алюміній ( $\lambda=207$  Вт/(град·м)) (крива 2) і кремній ( $\lambda=154,7$  Вт/(град·м)) (крива 3) [18] (рис. 2,а). Як видно з графіків, матеріал включення істотно впливає на розподіл температури в конструкції "шар-включення".

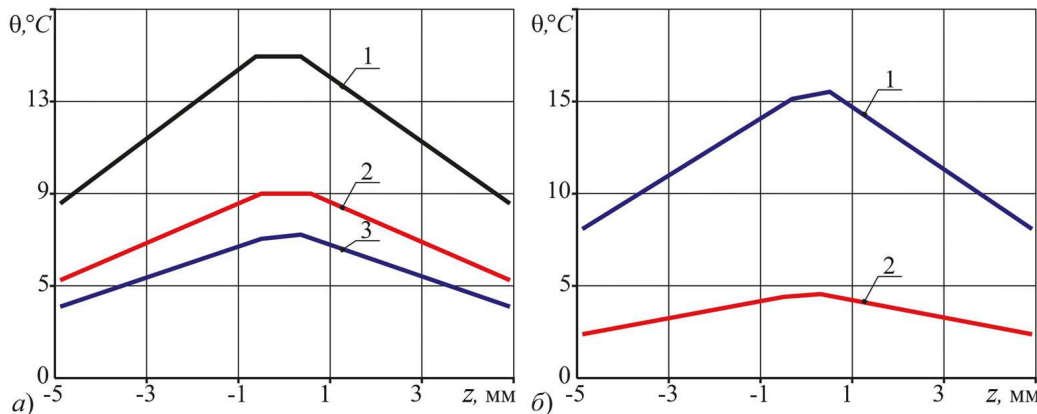


Рис. 2. Залежність температури  $\theta(x,y,z)$  від просторової координати  $z$  / Dependence of temperature  $\theta(x,y,z)$  on the spatial coordinate  $z$

Рис. 2,б ілюструє зміну температури від просторової координати  $z$  для  $x = y = 0$  в конструкції "кераміка ВК94-1 – срібло" (крива 1) і для середнього значення коефіцієнта теплопровідності для цих матеріалів (крива 2). Результати розрахунків, як видно із графіків, свідчать про те, що усереднення коефіцієнта теплопровідності для конструкційних матеріалів наведеного середовища призводить до значної похибки.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

*Наукова новизна отриманих результатів* – удосконалено лінійні та нелінійні математичні моделі визначення температурного поля в просторових неоднорідних середовищах. Наведено спосіб лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отримання в замкнутому вигляді аналітичних розв'язків відповідних лінійних і нелінійних крайових задач для ізотропних просторових неоднорідних середовищ із локальним внутрішнім та зовнішнім нагріванням.

*Практична значущість результатів дослідження* – отримані аналітичні розв'язки лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності для ізотропних просторових неоднорідних середовищ з внутрішнім та зовнішнім нагріванням дає змогу розробляти алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних полів у окремих конструкційних елементах та вузлах пристроїв, що піддаються різної природи тепловим впливам, з метою прогнозувати їхні режими роботи, ідентифікувати невідомі параметри та підвищити термостійкість, що збільшує їх термін експлуатації.

## Висновки / Conclusions

За допомогою перетворення Кірхгофа лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності з сингулярними коефіцієнтами та нелінійні крайові умови (математична модель 2), внаслідок чого застосовано інтегральне перетворення Фур'є за просторовими координатами до отриманої лінеаризованої крайової задачі. У результаті визначено змінну Кірхгофа і для заданих залежностей коефіцієнта теплопровідності від температури матеріалів ізотропного просторового неоднорідного термочутливого середовища визначено аналітичні співвідношення, які цілком описують розподіл температури у цьому середовищі внаслідок його зовнішнього локального нагрівання. Розроблено обчислювальні алгоритми і програмні засоби для визначення температурних полів у наведених середовищах. На цій основі виконано числовий аналіз, який свідчить, що для наведених матеріалів врахування термочутливості приводить до зменшення значень температури. Наведена нелінійна математична модель дає змогу аналізувати температурні режими у просторових неоднорідних термочутливих середовищах, які піддаються зовнішнім локальним тепловим навантаженням щодо їх термостійкості внаслідок інтенсивного нагрівання, а також захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

У процесі розроблення та дослідження лінійних і нелінійних математичних моделей визначення та аналізу температурних полів, обумовлених локально зосередженими як внутрішніми так і зовнішніми тепловими джерелами для конструкцій, які геометрично описано

ізотропними просторовими структурами з чужорідними вклученнями, виявлено, що хоча геометричні параметри вклучень є малими, зате врахування його конструкційного матеріалу є важливим, про що стверджують числові розрахунки. Усереднення значень коефіцієнта теплопровідності для матеріалів шару та вклучення приводить до значної похибки результатів обчислень значень розподілу температури  $t(x,y,z)$ . Тому у таких дослідженнях важливим є врахування локальних неоднорідностей, які містяться у середовищах. Це значно ускладнює процес розв'язування відповідних лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач адекватніше до реального фізичного процесу визначають отримані результати.

## References

- [1] Azarenkov, V. I. (2012). Issledovanie i razrabotka teplovoi modeli i metodov analiza temperaturnikh polei konstrukcii radioelektronnoi apparatury. *Technology audit and production reserves*, 3/1(5), 39–40. [In Russian].
- [2] Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *Journal of Engineering Mathematics*, 61(2–4), 371–384. <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>
- [3] Dovbnia, K. M., & Dundar, O. D. (2016). Stacionarnyi teplobmin tonkykh polohykh izotropnykh obolonok, yaki znakhodiatsia pid diieiu dzhерel tepla, zoseredzhenykh po dvovymirni oblasti. *Visnyk DonNU*. Ser. A: Pryrodnychi nauky, 1–2, 107–112. [In Ukrainian].
- [4] Havrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). Modelling of temperature regimes in piecewise-homogeneous structures. Lviv: Publishing house of Lviv Politechnic National University, 176 p.
- [5] Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio electronics, computer science, management*, 3(46), 7–15. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>
- [6] Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanska, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk NHU*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>
- [7] Hrytsiuk, Yu. I., & Andrushchakevych, O. T. (2018). Means for determining software quality by metric analysis methods. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(6), 159–171. <https://doi.org/10.15421/40280631>
- [8] Hrytsiuk, Yu. I., & Buchkovska, A. Yu. (2018). Visualization of the results of expert evaluation of software quality using polar diagrams. *Scientific Bulletin of UNFU*, 27(10), 137–145. <https://doi.org/10.15421/40271025>
- [9] Hrytsiuk, Yu. I., & Dalyavskyy, V. S. (2018). Using Petal Diagram for Visualizing the Results of Expert Evaluation of Software Quality. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(9), 97–106. <https://doi.org/10.15421/411832>
- [10] Noda, N. (1991). Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397. <https://doi.org/10.1115/1.3119511>
- [11] Otao, Y., Tanigawa, O., & Ishimaru, O. (2000). Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *Journal of Thermal Stresses*, 23, 257–271. <https://doi.org/10.1080/014957300280434>
- [12] Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Nauka, 368 p. [In Russian].
- [13] Tanigawa, Y., & Otao, Y. (2002). Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radi-



- ation. Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu, 2, 133–134. [https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0\\_133](https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0_133)
- [14] Tanigawa, Y., Akai, T., & Kawamura, R. (1996). Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Stresses*, 19(1), 77–102. <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>
- [15] Yangian, Xu, & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. 2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng, Vol. 2, 433–436. <https://doi.org/10.1109/ICICTA.2009.842>
- [16] Koliiano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka, 280 p. <https://doi.org/10.1192/bjp.161.2.280b>
- [17] Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 720 p. [In Russian].
- [18] Kikoina, I. K. (1976). *Tablitsy fizicheskikh velichin*. Spravochnik. Moscow: Atomizdat, 1008 p. [In Russian].

**V. I. Havrysh**

*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## **MATHEMATICAL SPATIAL MODELS OF DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELD FROM LOCALLY CONCENTRATED THERMAL HEATING**

Linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field, and later the analysis of temperature regimes in isotropic spatial inhomogeneous media exposed to internal and external thermal loads have been developed. To do this, the thermal conductivity for such structures is described as a whole using symmetric unit functions, which allows us to consider boundary thermal conductivity problems with one linear and nonlinear differential equation of thermal conductivity with discontinuous coefficients and linear and nonlinear boundary conditions on boundary surfaces. In the case of a nonlinear boundary value problem, the Kirchhoff transform is applied, which linearizes the initial nonlinear equation of thermal conductivity and nonlinear boundary conditions and results in a second-order linear differential equation with partial derivatives and singular coefficients with respect to the Kirchhoff function with linear conditions. To solve the obtained linear boundary value problem, the method of integral Fourier transform was used, as a result of which an analytical solution was obtained, which determines the Kirchhoff linearizing function. As an example, the linear and cubic dependences of the thermal conductivity of structural materials on the structure, which are often used in many practical problems, are chosen. As a result, analytical relations in the form of quadratic and biquadratic equations are obtained to determine the temperature distribution in the thermosensitive layer with foreign inclusion at external local heating. Numerical analysis of temperature behavior as a function of spatial coordinates for given values of geometric and thermophysical parameters is performed. The influence of foreign inclusion on the temperature distribution was studied if the material of the medium was selected ceramics VK94-I, and the inclusion – silver, aluminum and silicon. To determine the numerical values of temperature in these structures, as well as the analysis of heat transfer processes in the middle of these structures due to internal and external heat loads, developed software that uses a geometric representation of temperature distribution depending on spatial coordinates. The obtained numerical values of temperature testify to the correspondence of the developed mathematical models of the analysis of heat exchange processes in spatial inhomogeneous media with internal and external heating to the real physical process. Software also allows you to analyze this type of environment, which are exposed to internal and external heat loads, in terms of their heat resistance. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can lead to the destruction of not only individual elements but also the entire structure.

**Keywords:** temperature field; isotropic spatial inhomogeneous medium; thermal conductivity; convective heat transfer; perfect thermal contact; local internal and external heating; heat flow; thermal sensitivity; foreign inclusion.

---

### **Інформація про автора:**

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. Email: [gavryshvasyl@gmail.com](mailto:gavryshvasyl@gmail.com); <http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І. Математичні просторові моделі визначення температурного поля із локально зосередженим тепловим нагріванням. *Український журнал інформаційних технологій*. 2022, т. 4, № 1. С. 21–28.

**Citation APA:** Havrysh, V. I. (2022). Mathematical spatial models of determination of temperature field from locally concentrated thermal heating. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 4(1), 21–28. <https://doi.org/10.23939/ujit2022.01.021>