

УДК 528.21:551.24

Михайло ФИС¹, Андрій БРИДУН², Мар'яна ЮРКІВ³, Андрій СОГОР⁴, Юрій ГУБАР⁵

^{1,2,3,4} Кафедра картографії та геопросторового моделювання, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: ¹ Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, ² Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, ³ Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua, ⁴ Andrii.R.Sohor@lpnu.ua, ¹ <https://orcid.org/0000-0001-8956-2293>, ² <https://orcid.org/0000-0001-5634-0512>, ³ <https://orcid.org/0000-0002-2180-5583>, ⁴ <https://orcid.org/0000-0002-0084-9552>.

⁵ Кафедра кадастру територій, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: Yuri.P.Hubar@lpnu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-2538-0727>

<https://doi.org/doi.org/10.23939/jgd2022.02.026>

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМЕТРІЇ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ, ПОДАНОГО ПОТЕНЦІАЛАМИ ПЛОСКИХ ДИСКІВ

У роботі розглянуті подання зовнішнього гравітаційного поля Землі, які доповнюють його традиційну апроксимацію рядами за кульовими функціями. Необхідність додаткових засобів опису зовнішнього потенціалу продиктована потребою його вивчення та використання в точках простору, що є близькими до поверхні Землі. Саме в таких областях виникає потреба дослідження збіжності рядів за кульовими функціями та адекватного визначення значення потенціалу. Представлення зовнішнього гравітаційного поля Землі інтегралами простого та подвійного прошарку з залученням апарату апроксимації кусково-неперервної функції в середині еліпса дозволяє розширити для рядів, що подають потенціал, область збіжності до всього простору поза еліпсом інтегрування. Тому, як результат, значення гравітаційного потенціалу співпадає зі значеннями цих рядів поза тілом, що містить маси надр (крім еліпса інтегрування). Це дає можливість оцінювати поведінку гравітаційного поля в приповерхневих областях та виконувати з більшою достовірністю дослідження геодинамічних процесів. Апроксимація гравітаційного поля з допомогою поверхневих інтегралів окреслює також геофізичний аспект задачі. Адже в процесі її розв'язання здійснюється побудова двовимірних підінтегральних функцій, що однозначно визначаються набором стоксових постійних. При цьому коефіцієнти їх розкладів у ряди визначаються за лінійними комбінаціями степеневих моментів їх функцій. Отримані розклади функцій можуть бути використані для дослідження особливостей зовнішнього гравітаційного поля, наприклад, вивчення його асиметрії відносно екваторіальної площини.

Ключові слова: асиметрія гравітаційного поля, Земля, потенціал, сфера Б'єрхамера, стоксові постійні.

Вступ

Історія дослідження теорії притягання налічує сотні літ та продовжує розвиватись як в теоретичному [Axleret al., 2013; Ландкоф, 1966], так і в практичному напрямках [Кондратьєв, 2007; Антонов та ін., 1988]. Сила притягання гравітаційного поля Землі може бути подана різними способами [Антонов та ін., 1982]. Найбільш уживаним є подання компонент цієї сили через часткові похідні деякої функції, яку називають потенціалом, який може визначатись по різному. Практичне використання гравітації в різних сферах впливає спосіб її задання [Антонов та ін., 1988], наприклад, для цілей космічної геодезії доцільно подавати потенціал Землі сумою потенціалів точкових мас, що знаходяться в середині Землі [Марченко та ін., 1985; Остач, Агеева, 1982]. При цьому можливі різні підходи та критерії просторового значення розміщення точкових мас. Особливу нішу займає подання потенціалу, що спричиняється насамперед розкладом оберненого радіус-вектора в ряди [Гобсон, 1953]. Такий підхід, в свою чергу, обумовлює область застосування, що визначається збіжністю. Адже розклад оберненого радіуса в збіжний ряд за сферичними функціями гарантується поза сферою фіксованого радіуса та автоматично переноситься на область збіжності представлення

потенціалу за кульовими функціями [Пеллинен, 1978]. Іншими словами, поза певною сферою, яка називається сферою збіжності, є правомірним зображення гравітаційного поля у вигляді рядів за сферичними функціями. В середині цієї сфери питання збіжності відкрите: ряд може як збігатись, так і бути розбіжним. В теорії фігури Землі навіть введено поняття мінімальної сфери – сфери «Б'єрхамера» [Пеллинен, 1978]. Детальне обговорення цього питання виконано в роботі [Sacerdote & Sanso, 1991], де поряд з теоретичними дослідженнями розглянуто приклади практичного застосування методики та труднощі її реалізації. Тому на практиці питання збіжності ряду в областях, близьких до поверхні Землі, намагаються опускати, мотивуючи це представленням ряду скінченою сумою [Мещеряков, 1991]. Очевидно, це не зовсім коректно, адже при великих порядках розкладу (а саме це має місце в сучасних моделях гравітаційного поля [Pavlis et al., 2008]) вклад високих гармоніків визначається чутливими малими числами. Тим більше, що сучасні моделі потенціалу є змінними в часовому вимірі [Kusche, et al., 2009, Landerer, et al., 2010], що постійно уточнюються [Marchenko, Lopushanskyi, 2018]. Тому, при застосуванні потенціалу в областях, близьких до межі збіжності, слід по можливості розглядати

інші способи подання потенціала, або ж досліджувати можливу збіжність рядів за сферичними функціями.

У сучасних дослідженнях особливу увагу приділяється вивченню структури зовнішнього потенціалу [Шкодров, Иванова, 1988; Fyset al., 2019]. Адже відомо, що вона характеризується своєю анізотропністю насамперед відносно екваторіальної площини в першу чергу через несиметричність фігури Землі. Проте, тривимірність зовнішнього гравітаційного поля обумовлена ще і неоднорідностями розподілу мас в середині Землі, які, на відміну від відхилень фігури від еліпсоїда (сфери), важко ідентифікувати. Цілком очевидно, що однозначний зв'язок між неоднорідностями гравітаційного поля та внутрішньою будовою однозначно встановити неможливо, а наближені методи дають лише можливі орієнтовні зв'язки. Для однозначної інтерпретації необхідно ставити значні обмеження на розподіл мас надр Землі, наприклад, радіальний розподіл мас, тощо. Та навіть при таких обмеженнях далеко не завжди досягається однозначність розв'язку. Одним з можливих варіантів опису потенціалу є його представлення потенціалами точкових мас, що дає спосіб локалізації джерел породження особливостей потенціалу Землі. Однак, при цьому виникає низка додаткових питань: розміщення точкових мас та їх оптимальне представлення гравітаційного поля. За своєю суттю така постановка представляється як основна задача гравіметрії [Грушинский, 1983].

Певним кроком вперед можна вважати перехід від дискретного подання потенціалу [Марченко та ін., 1985; Остач, Агеєва, 1982] до його опису з їх використанням, що приводить до визначення функції двох змінних. Саме такий підхід дозволяє зберегти однозначність розв'язку задачі (єдиність підінтегральної функції) при фіксованій поверхні розміщення. Саме такий підхід покладений в основу концепції гравітаційних дисків, запропонованій в роботі [Мещеряков, 1991]. Її реалізація частково здійснена в роботах [Завізіон, 2000, 2001]. Однак, відсутність апарату апроксимації функції в еліпсі (крузі) не дозволила її реалізувати повністю. Тому, автори обмежились одновимірним випадком (стержем як граничним стисненням еліпса). Якщо скористатись класичними результатами, отриманими рядом математиків [Kampré de Fériet & P. E., 1926; Бейтмен, Эрдейн, 1974], то можна побудувати апарат апроксимації кусково неперервних функцій в еліпсі за аналогією для еліпсоїда [Fyset al., 2018]. Його можна використати для наближення двовимірної кусково-неперервної функції рядами по біортогональних системах. Коефіцієнти розкладу ряду виражаються через степеневі моменти апроксимуючої функції та в двовимірному випадку однозначно подаються лінійною комбінацією стоксових постійних.

Саме такий підхід реалізований в цій роботі, при цьому поверхня інтегрування вибрана як одна з найпростіших та представляє собою еліпс, розміщений в екваторіальній площині. Це дає можливість порівнювати дію гравітаційного поля відносно екватора, тобто виявляти симетрію або її відсутність при обертанні Землі.

Методика

При розв'язуванні задач математичної фізики часто розв'язок подають у вигляді інтегралів простого або подвійного прошарку. Реалізація такого підходу виконана в цій роботі, при цьому поверхнею інтегрування вибрана еліпс, розміщений в екваторіальній площині, як одну з найпростіших фігур. Таке спрощення в подальшому дає змогу порівнювати значення зовнішнього потенціалу відносно екватора, тобто виявляти симетрію або її відсутність.

Традиційно потенціал сили притягання планети подається рядом за кульовими функціями та має такий вигляд:

$$V(P) = \frac{GM}{R} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{n,0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{k=1}^n P_n^r(\cos \vartheta) (C_{n,k} \cos k\lambda + S_{n,k} \sin k\lambda)) \right), \quad (1)$$

де $C_{n,k}, S_{n,k}$ – коефіцієнти розкладу (стоксові постійні).

У науках про Землю приводяться дещо інші величини $A_{n,k}, B_{n,k}$ – так звані нормовані коефіцієнти, пов'язані зі стоксовими постійними так:

$$C_{n,k} = A_{n,k} \sqrt{RR \frac{(n-k)!(2n+1)}{(n+k)!}}, \quad (2)$$

$$RR = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 2, k \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Величини (2) повністю описують зовнішнє гравітаційне поле Землі в області збіжності ряду (1), яке визначається як сфера, що охоплює всі інтегруючі маси. Проте, розкладом (1) на практиці користуються для внутрішньої частини сфери, отримуючи при цьому повністю адекватні результати. Простіше кажучи, ряд (1) може збігатись і в середині сфери. В теоретичній геодезії [Hofmann–Wellenhof, Moritz, 2005] навіть вводиться спеціальний термін: «сфера Бьєрхамера»-мінімальна сфера, поза якою ряд починає збігатись.

Також не просто знайти можливу інтерпретацію формування стоксових постійних та пов'язати її з внутрішньою будовою Землі. Цими питаннями займалися ряд дослідників (геофізиків, геодезистів, гравіметристів), серед яких відзначити відзначити Морітца Г. [Hofmann–Wellenhof, Moritz, 2005],

Пелінена [Пеллинен, 1978], Тараканова Ю. О. [Тараканов, Черевко, 1979].

З вище сказаного випливає необхідність пошуку таких представлень потенціалу, для яких проблема збіжності, хоча б частково була б розв'язана та які несуть якусь геофізичну інформацію. Один з варіантів вирішення задачі пропонується в цій роботі.

В роботі [Мещеряков, 1991] показано, що зовнішній потенціал планети можна, зокрема, представити сумою потенціалів двох плоских фігур (еліпсів) зі змінною густиною, розміщених в площині екватора, а саме:

$$V = V' + V'', \quad (4)$$

де V' і V'' – потенціал простого прошарку і потенціал подвійного прошарку S відповідно, що визначаються так

$$\frac{1}{r_{Q,P}} = \frac{1}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \psi) \right) = \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} \times \left(P_n(\cos \vartheta') P_n(\cos \vartheta) + \sum_{k=0}^n \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \vartheta') P_n^k(\cos \vartheta) (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda') \right), \quad (7)$$

де ψ – кут між векторами \overline{OP} , \overline{OQ} .

Якщо точка знаходиться в екваторіальній площині, то її координати $Q(r', 0, \lambda')$, а радіус-вектор має вигляд:

$$\frac{1}{r_{Q,P}} = \frac{1}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \psi) \right) = \frac{1}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left(P_n(0) P_n(\cos \vartheta) + 2 \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(0) P_n^k(\cos \vartheta) (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda') \right) \right). \quad (8)$$

Значення приєднаних многочленів Лежандра в точці 0 такі:

$$P_n^k(0) = L_{n,k} = \begin{cases} \frac{(n+k-1)!(-1)^m}{m!2^m}, & 2m = n-k - \text{парні} \\ 0, & n-k - \text{непарне} \end{cases}$$

$$P_{2m}(0) = \begin{cases} \frac{(2m-1)!(-1)^m}{m!2^m}, & n = 2m \\ 0, & n - \text{непарне} \end{cases} \quad (9)$$

Тому,

$$\frac{1}{r_{Q,P}} = \frac{1}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left(L_{n,0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{k=0}^n L_{n,k} P_n^k(\cos \vartheta) (\cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda') \right) \right). \quad (10)$$

$$L_{n,0} = \begin{cases} \frac{(2m-1)!(-1)^m}{m!2^m}, & n = 2m \\ 0, & n \neq 2m \end{cases}, \quad L_{n,k} = \begin{cases} \frac{(n+k-1)!(-1)^m}{m!2^m}, & 2m = n-k \\ 0, & 2m \neq n-k \end{cases}, \quad m = \left[\frac{n-k}{2} \right].$$

$$V'(P) = \iint_S \frac{\mu(\xi, \eta)}{r(Q, P)} dS_Q, \quad (5)$$

$$V''(P) = \iint_S \frac{\nu(\xi, \eta) z}{r^3(Q, P)} dS_Q. \quad (6)$$

Для визначення виразів (5) (розкриття (6) описано в [Мещеряков, 1991]) встановимо вигляд функцій розподілів густин плоскої фігури S . Співвідношення (5) можна подати сумою рядів за кульовими функціями [Гобсон Е. В., 1953].

Для цього обернених відстань $\frac{1}{r_{Q,P}}$ між двома точками $Q(r', \vartheta', \lambda')$, $P(R, \vartheta, \lambda)$ подамо у вигляді:

Підстановка (10) у вираз для потенціала (5) дає

$$V' = \frac{GM}{R} \left(a_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{R} \right)^n \left(a_{n,0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{k=0}^n L_{n,k} P_n^k(\cos \vartheta) (a_{n,k} \cos k\lambda + b_{n,k} \sin k\lambda) \right) \right), \quad (11)$$

де
$$a_{n,k} = \frac{1}{a^n M} \iint_S \mu(\xi, \eta) (r)^n \cos k\lambda' dS,$$

$$I_{n,k} = \frac{1}{a^m b^n M} \iint_S \mu(\xi, \eta) x^m y^n dS, \quad (13)$$

$$b_{n,k} = \frac{1}{a^n M} \iint_S \mu(\xi, \eta) (r)^n \sin k\lambda' dS$$
 – аналоги стоксових постійних.

Прирівнюючи традиційний запис потенціалу з отриманим виразом (11), за $n - k$ парного одержуємо зв'язок між коефіцієнтами:

$$C_{n,k} = L_{n,k} a_{n,k}, S_{n,k} = L_{n,k} b_{n,k}, n - k - \text{парні.}$$

Отже, можна вважати відомими коефіцієнти розкладу $a_{n,k}, b_{n,k}$, якщо задані стоксові постійні. Їх можна подати в прямокутній системі координат так:

$$a_{n,k} + i b_{n,k} = \frac{1}{a^n M} \iint_S \mu(\xi, \eta) (x^2 + y^2)^m (x + iy)^k dS, \quad (12)$$

$$0 \leq k \leq n, \quad m = \left[\frac{n-k}{2} \right].$$

Система рівнянь (12) – це лінійна комбінація наступних виразів:

$$\omega_{mn} = \frac{1}{a^m b^n} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}} (-1)^{N-2l} (N-l+1)! \sum_{i+j=l} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-2i} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-2j}}{i! j! (m-2i)! (n-2j)!},$$

$$W_{mn} = \frac{a^{-m} b^{-n}}{m! n! k!} \sum_{l=0}^{\left[\frac{N}{2} \right]} \frac{(-2)^l}{2^N l!} \sum_{t_1+t_2=l}^N \frac{(2t_1-1)!! (2t_2-1)!!}{(2t_1-m)!! (2t_2-n)!!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2-n} = \frac{2^{-N}}{m! n!} \frac{\partial^N}{\partial x^m \partial y^n} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^N, \quad (14)$$

$$l_{mn} = \int_{\tau} W_{mn} \omega_{m_1 n_1} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq m, \text{ або } n \neq n \\ \frac{N! S_e}{(N+1) m! n! a^{2m} b^{2n}}, & \text{якщо } m = m_1, n = n_1 \end{cases}. \quad (15)$$

Можливість апроксимації функції можна сформулювати теоремою, наведеною нижче.

Теорема. Будь-яка інтегрована з квадратом функція ($\mu \in l_2$) може бути представлена у вигляді ряду

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{mn} W_{mn}(\xi, \eta), \quad (16)$$

які називають степеневими моментами [Ахиезер, Крейн, 1938]. Зауважимо що у випадку рівності (12) розпадаються на дві підсистеми відносно $a_{n,k}$ та $b_{n,k}$, з яких визначаються свої моменти (13). Торкнемось визначення функції $\mu(\xi, \eta)$, що також розпадається на два доданки (що відповідають стоксовим постійним $C_{n,k}$ та $S_{n,k}$ парних порядків):

$$\mu(\xi, \eta) = \mu_1(\xi, \eta) + \mu_2(\xi, \eta).$$

Оскільки функція є кусково-неперервною, то її можна розкласти в ряд за біортогональними многочленам $W_{m,n}(\xi, \eta), \omega_{m,n}(\xi, \eta)$, які можна розглядати як спрощений варіант відповідних просторових систем [Мещеряков, 1991]. Детальні викладки та обґрунтування будуть виконані в окремій публікації. Тут же використаємо як по-фактум лише необхідні для апроксимації властивості та формули:

де
$$d_{mn} = \frac{\iint_S \mu W_{mn}(\xi, \eta) dS}{\iint_S \omega_{mn}(\xi, \eta) W_{mn}(\xi, \eta) dS} \quad (17)$$

– коефіцієнти розкладу, який збігається в середньому,

тобто:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \iint_S \left(\mu - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N d_{mn} W_{mn}(\xi, \eta) \right)^2 = 0. \quad (18)$$

Наслідком цієї теореми є рівномірна збіжність наступного ряду:

$$V = G \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{mn} \iint_S \frac{W_{mn}}{r} dS, \quad (19)$$

що представляє зовнішній потенціал V . Таким чином, сукупність функцій

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{Q,P}} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi}} = \frac{1}{R\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi \pm 1}} = \frac{1}{R(\sqrt{r^2 + 1})\sqrt{1 + \frac{\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1}{r^2 + 1}}} = \\ &= \frac{1}{R(\sqrt{r^2 + 1})} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} \left(\frac{\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1}{r^2 + 1} \right)^n \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Ряд (21) абсолютно збіжний, бо модуль його загального члена менший від одиниці, тобто

$$-1 < \frac{\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1}{r^2 + 1} < 1. \quad (22)$$

В цьому легко переконатись, виконуючи наступні перетворення:

$$1) \quad \frac{\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1}{r^2 + 1} < 1,$$

$$\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1 < r^2 + 1,$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{Q,P}} &= \frac{1}{R(\sqrt{r^2 + 1})} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} \left(\frac{\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1}{r^2 + 1} \right)^n \right) = \\ &= \frac{1}{R(\sqrt{r^2 + 1})} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (\rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1)^n \right) = \\ &= \frac{1}{R(\sqrt{r^2 + 1})} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(r^2 + 1)^n} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l} (\zeta^2 + \eta^2 - 2\zeta x - 2\eta y)^l}{l!(n-l)!} \right) = \\ &= \frac{1}{R(\sqrt{r^2 + 1})} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(r^2 + 1)^n} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3+t_4=l} \frac{(-2)^{t_2+t_4} \zeta^{2t_1+t_3} \eta^{2t_2+t_4} x^{t_2} y^{t_4}}{t_1! t_2! t_3! t_4!} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Функції u_{mn} можна привести до такого вигляду, використовуючи формулу Стокса:

$$u_{mn} = \iint_S \frac{W_{mn}}{r} dS = \frac{1}{2^N m! n!} \iint_S \frac{\partial^n}{\partial \xi^m \partial \eta^n} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2 + b^2} - 1 \right)^N dS = \frac{(-1)^N}{2^N m! n!} \iint_S \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right)^N \frac{\partial^n}{\partial \xi^m \partial \eta^n} \left(\frac{1}{r} \right) dS. \quad (24)$$

$$u_{mn} = \iint_S \frac{W_{mn}}{r} dS \quad (20)$$

представляє собою набір гармонічних функцій, що описують частину потенціалу (1) зі стоксовими постійними, індекси яких $k - n$ – парні, при цьому сума цього ряду співпадає зі значенням потенціалу в області, що не включає інтегруючі маси. Для обчислення їхніх виразів (20) виконаємо

наступні перетворення. Обернений радіус $\frac{1}{r_{Q,P}}$

розкладемо в біноміальний ряд так:

$$\begin{aligned} (\rho - r)^2 + 2r\rho(1 + \cos \psi) + 2(1 - \rho^2) &= \\ = -\rho^2 + r^2 + 2r\rho(\cos \psi) + 1 + 1 &\geq 0 \\ \rho^2 - 2r\rho(\cos \psi) - 1 < r^2 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad -r^2 - 1 < \rho^2 - 2r\rho \cos \psi - 1, \\ (\rho - r)^2 + 2r\rho(1 - \cos \psi) > 0. \end{aligned}$$

Тому його можна почленно диференціювати зокрема за змінними ζ, η . Для цього спочатку запишемо його вираз у прямокутній системі координат.

Після підстановки (23) в цю формулу одержимо:

$$\begin{aligned}
 u_{mn} &= \frac{l_{mn}}{2^N} \iint_S (\rho^2 - 1)^N \frac{\partial^n}{\partial \xi^m \partial \eta^n} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(r^2 + 1)^n} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3+t_4=l} \frac{(-2)^{t_2+t_4} \zeta^{2t_1+t_3} \eta^{2t_2+t_4} x^{t_2} y^{t_4}}{t_1! t_2! t_3! t_4!} \right) dS = \\
 &= l_{mn} \left(\frac{1}{S} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(r^2 + 1)^n} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{(n-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3+t_4=l} \frac{\iint_S (\rho^2 - 1)^N \zeta^{2t_1+t_3-m} \eta^{2t_2+t_4-n} dS (-2)^{t_2+t_4} x^{t_2} y^{t_4} (2t_1+t_3)! (2t_2+t_4)!}{(2t_2+t_4-n)! (2t_1+t_3-m)! t_1! t_2! t_3! t_4!} \right) = (25) \\
 &= l_{mn} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(r^2 + 1)^n} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{t_1+t_2+t_3+t_4=l} \frac{N! (-2)^{t_2+t_4} x^{t_2} y^{t_4} (2t_1+t_3)! (2t_2+t_4)!}{(l+N+1)! (2t_2+t_4-n)! (2t_1+t_3-m)! t_1! t_2! t_3! t_4!} \right),
 \end{aligned}$$

де

$$l_{mn} = \frac{S \left(\sqrt{r^2 + 1} \right)^{-1}}{m! n! R}.$$

Остаточно тепер визначаємо потенціал V послідовністю формул (25), (19), (17), (11) та порівнюємо це значення з величиною потенціалу, отриманого за парними степенями сферичних функціями в розкладі (1). Поза сферою безпеки ці значення співпадають, а точки з різними значеннями визначають область розбіжності частини ряду (1). При цьому, на відміну від (1), ми отримуємо функцію, що генерує цю частину значення гравітаційного поля. Отже, можна робити певні висновки на основі цієї функції про ймовірні області, що породжують особливості гравітаційного поля.

Результати

Для перевірки наведеної методики проведені числові експерименти. В якості вихідних даних взяті двадцять перших порядків гравітаційної моделі EGM2008 [Pavlis et al., 2008]. За фігуру Землі еліпсоїд обертання GR-84, рекомендований міжнародним Геофізичним Союзом [NI&MATR, 1984] з параметрами $a=6378137.7$ м, $\alpha=1/298,257223$, $b=6356752,3142$ м. За цими даними вираховані коефіцієнти розкладу функції $\mu_1(\xi, \eta)$ (6) для парних степенів стоксових постійних парних порядків $(n-k - \text{парні})$. Її візуальне представлення наведено на рис. 1 у двох варіантах: об'ємне зображення та подання функції за допомогою ізоліній. Проте, важко з цих рисунків виконати якийсь аналіз, оскільки зміна функції здійснюється не в плановій інтерпретації (по широті та довготі), в

комбінованому вигляді (по довжині та довготі). Тому, для наочності необхідно розробляти інші способи зображення такої інформації, чим зараз і займаються автори цієї публікації. З рисунків можна виділити певні скупчення на глибині $6371 \times 0,6$ км = 3826 км на довготах 180 та 40 градусів, що в географічному розміщенні є проєкціями точок під Африкою та в Тихому океані. Не роблячи ніяких інтерпретацій та висновків, можна лише зауважити про кореляцію цих розміщень з недавно відкритими двома районами особливостей внутрішньої будови Землі також можна виділити особливість на глибині 637 км в районі 180 градусів. На глибинах 0,6–0,8 чітко проявляються позитивні значення підінтегральної функції, а від 0 до 0.02 негативне її значення, що спадає від початку координат. Однак, зробити якусь якісну інтерпретацію та пов'язати з географічним положенням важко, бо ці значення є результатом дії по всій широті.

Потенціал, що визначається за стоксовими постійними до 10-го порядку та враховує парні стоксові постійні, приведено в табл. 1 (стовпчики з назвою «сфера») для різних точок простору по широті та довготі для фіксованого радіуса відносного сфери ($R=3$). Для радіусів, які менші від одиниці, спостерігається розбіжність значень, вирахованих двома способами, яка тут не приводиться. Цю розбіжність можна пояснити невеликим числом урахування членів суми та способом обчислення коефіцієнтів розкладу (17). Підкреслимо, що в лінійні комбінації входять величини стоксових порядків всіх порядків до степені коефіцієнта визначення (17). Цей вплив при збільшенні порядку сумування нівелюється, однак для малих порядків може бути відчутним.

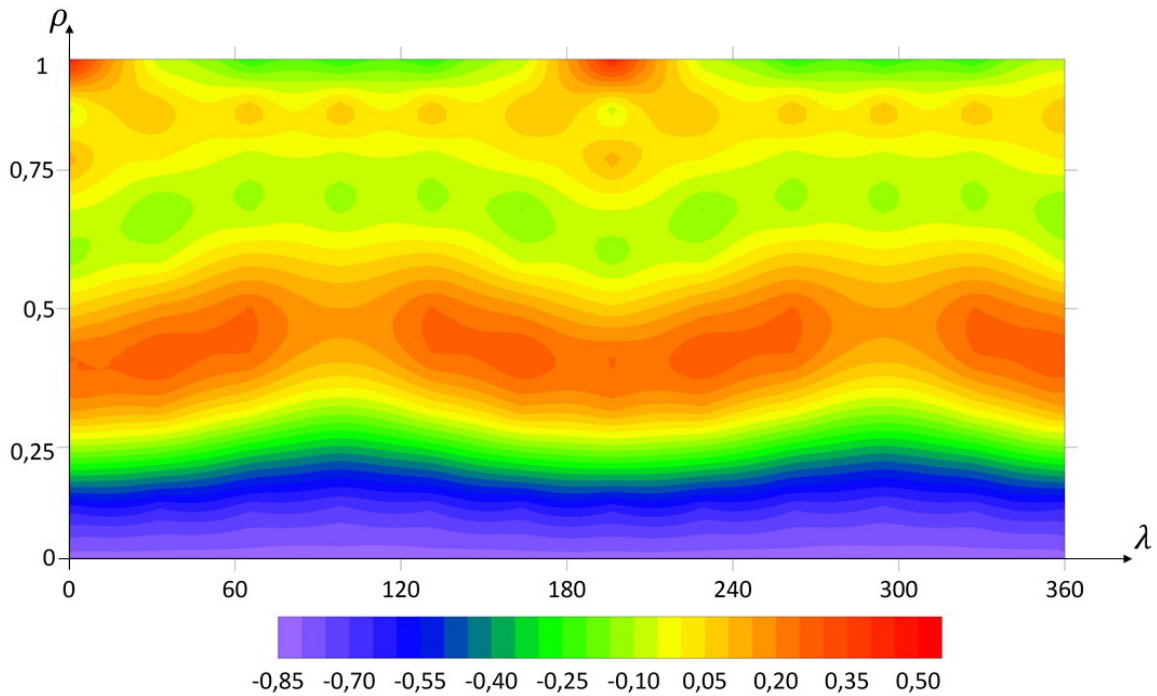


Рис. 1. Функція розподілу густини еліпса (г/см^2), що відповідає стоксовим постійним парних порядків:

ρ – відносний радіус еліпса, λ – полярний кут, $0 \leq \lambda \leq 360^\circ$, ізолінії проведено кожні $0,15 \text{ г/см}^2$

Також, результати табл. 2 наглядно хлюст-рують близькість значень потенціалу для відносного радіуса, більшого за одиницю. Якщо ж відносний радіус менший одиниці, то його поступове зменшення поступове збільшує різницю між вирахованими за двома формулами (1), (19) значень потенціалу.

Ще одне суттєве зауваження. Хоч асиметрія породжується також стоксовими постійними $S_{n,k}$ ($n-k$ – парні), однак їх вплив на значення сумарного потенціалу значно менший, та в цій роботі не досліджується через потребу в додаткових підходах вивчення (введення масштабних множників, можливість проведення обчислень і т. д.).

Таблиця 1

Значення потенціалу, вирахованого для радіуса $R = 3$ за сферичними функціями та з допомогою інтеграла простого прошарку з урахуванням стоксових постійних $C_{n,k}$ ($n-k$ - парні)

	0°	60°	120°	180°	240°	300°
	$V \cdot 106249482,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$					
0°	-2,005	-2,005	-2,005	-2,005	-2,005	-2,005
45°	-0,501	-0,499	-0,502	-0,502	-0,502	-0,502
90°	1,003	1,005	1,002	1,001	1,002	1,001
135°	-0,501	-0,499	-0,502	-0,502	-0,502	-0,502
180°	-2,005	-2,005	-2,005	-2,005	-2,005	-2,005

Таблиця 2

**Значення потенціалу, вирахованого для різних радіусів
при фіксованому куті $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ за сферичними функціями та з допомогою інтеграла простого
прошарку з урахуванням стоксових постійних $C_{n,k}$ ($n-k$ – парні)**

	0°	60°	120°	180°	240°	300°	360°							
	$V \cdot 106249482,0 \cdot 10^8 \frac{M^2}{c^2}$													
0,7	-0,518	-0,392	-0,446	-0,395	-0,446	-0,396	-0,518	-0,395	-0,446	-0,396	-0,446	-0,395	-0,518	-0,392
0,8	-0,315	-0,263	-0,295	-0,264	-0,295	-0,265	-0,315	-0,265	-0,295	-0,265	-0,295	-0,264	-0,315	-0,263
0,9	-0,216	-0,185	-0,211	-0,186	-0,211	-0,186	-0,216	-0,186	-0,211	-0,186	-0,211	-0,186	-0,216	-0,185
1,0	-0,149	-0,135	-0,129	-0,135	-0,129	-0,136	-0,149	-0,135	-0,129	-0,136	-0,129	-0,135	-0,149	-0,135
1,1	-0,108	-0,101	-0,101	-0,102	-0,101	-0,102	-0,108	-0,102	-0,101	-0,102	-0,101	-0,102	-0,108	-0,101
1,2	-0,082	-0,078	-0,076	-0,078	-0,076	-0,079	-0,082	-0,078	-0,076	-0,079	-0,076	-0,078	-0,082	-0,078

Висновки

1. Опис за допомогою інтегралів простих прошарків гравітаційного поля Землі доповнює інші спроби його подання.
2. Обчислення потенціалів простих прошарків можна здійснювати за допомогою збіжних поза областю інтегрування рядів.
3. Значення потенціалу, отримані за різними методиками, є однаковими в просторі, що виключає розміщення мас в середині планети.
4. Двовимірна підінтегральна функція поверхневого інтеграла може бути використана для геофізичної інтерпретації, зокрема для виявлення асиметрії гравітаційного поля.
5. Планується подальше удосконалення наведеної методики з метою її поширення на більш високі порядки та вивчення властивостей, що спричиняються іншими групами стоксових постійних.

Список літератури

Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Сравнительные свойства различных представлений гравитационного поля Земли. Тр. I Орловской конференции. “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики”. К.: Наукова думка, 1982, 93–108.
 Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988, 272 с.

Ахиезер Н., Крейн М. О. Некоторых вопросах теории моментов. Х.: ГНТИУ, 1938, 256 с.
 Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. II. М.: Наука, 1974, 294 с.
 Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1953, 476 с.
 Грушинский Н. П. (1983). Основы гравиметрии. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 352 с.
 Завізіон О. В. Самогравітуючі диски як засоби описання зовнішніх гравітаційних полів небесних тіл. *Кинематика и физика небесных тел.* 2000, 16(5), 477-480. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/150089>.
 Завізіон О. В. Про визначення густини еквігравітуючих стержнів, за допомогою яких опиисується зовнішнє гравітаційне поле планет-гігантів. *Кинематика и физика небесных тел.* 2001, 17(1), 89–92. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/149869>.
 Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007, 512 с. ISBN 978-5-03-003798-1.
 Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала, М., 1966, 515 с.
 Марченко А. Н., Абрикосов О. А., Цюпак И. М. Модели точечных масс и их использование в орбитальном методе спутниковой геодезии. 2. Применение моделей точечных масс при дифференциальном уточнении орбит искусственных спутников Земли (ИСЗ). *Кинематика и физика небесных тел.* 1985, 1(5), 72–80.

- Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991, 216 с.
- Остач О. М., Агеева И. Н. Аппроксимация внешнего гравитационного поля Земли моделью гравитирующих точечных мас. Тр. I Орловской конференции. “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики”. Киев: Наукова думка, 1982, 106–107.
- Пеллинен Л. П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия). М.: Недра, 1978, 264 с.
- Тараканов Ю. А., Черевко Т. Н. Интерпретация крупномасштабных гравитационных аномалий Земли. *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1979, 4, 25–42.
- Шкодров В. Г., Иванова В. Г. Асимметрия гравитационного поля планеты относительно экваториальной плоскости. Тр. II Орловской конференции. “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики”. К.: Наукова думка, 1988, 66–71.
- Axler S., Bourdon P. & W. Ramey (2013). *Harmonic Function Theory* (2nd edition). Springer-Verlag. ISBN 0-387-95218-7. URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_18/HFT.pdf.
- Fys M. M., Brydun A. M. & Yurkiv M. I. (2018). Method for approximate construction of three-dimensional mass distribution function and gradient of an ellipsoidal planet based on external gravitational field parameters. *Geodynamics*, 2(25), 27–36. DOI: <https://doi.org/10.23939/jgdg2018.02.027>.
- Fys M. M., Brydun A. M. & Yurkiv M. I. (2019). Researching the influence of the mass distribution inhomogeneity of the ellipsoidal planet's interior on its stokes constants. *Geodynamics*, 1(26), 17–27. DOI: <https://doi.org/10.23939/jgdg2019.01.017>.
- Hofmann–Wellenhof Dr. B. & Moritz Dr. H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer New York, 403 p.
- Kampé J. de Fériet & P. E. (1926). *Appell Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*. Paris, Gauthier-Villars.
- Kusche J., Schmidt R., Petrovic S. & Rietbroek R. (2009). Decorrelated GRACE time-variable gravity solutions by GFZ and their validation using a hydrological model. *Journal of Geodesy*, 83, 10, 903–913. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00190-009-0308-3>.
- Landerer F., Dickey J., Zlotnicki V. (2010) Terrestrial water budget of the Eurasian pan-Arctic from GRACE satellite measurements during 2003–2009. *J. Geophys Res Atmos*, D 23115. DOI: 10.1029/2010JD014584.
- Marchenko A. N., Lopushanskyi A. N. (2018). Change in the zonal harmonic coefficient C20, Earth's polar flattening, and dynamical ellipticity from SLR data. *Geodynamics* 2(25), 5–14. DOI: <https://doi.org/10.23939/jgd2018.02.005>.
- National Imagery and Mapping Agency Technical Report TR 8350.2 Third Edition, Amendment 1, 1 Jan 2000, «Department of Defense World Geodetic System 1984».
- Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C. & J. K. Factor. (2008). An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. *EGU General Assembly. Geophysical Research Abstracts*. Vol. 10.
- Sacerdote F. & Sanso F. (1991). Holes in Boundary and Out-of-Boundary Data. *1st International Symposium of the International Commission for the Geoid. At: June 11–13, 1990 Milan, Italy. Volume: IAG Symposia no. 106 "Determination of the Geoid, Present and Future"*. Pp. 349–356. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-3104-2_41.

Mykhailo FYS¹, Andrii BRYDUN², Mariana YURKIV³, Andrii SOHOR⁴, Yurii HUBAR⁵

^{1,2,3,4} Department of Cartography and geospatial modeling of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine, e-mail: ¹Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, ²Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, ³Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua,

⁴Andrii.R.Sohor@lpnu.ua, ¹<https://orcid.org/0000-0001-8956-2293>, ²<https://orcid.org/0000-0001-5634-0512>, ³<https://orcid.org/0000-0002-2180-5583>, ⁴<https://orcid.org/0000-0002-0084-9552>.

⁵ Department of Land management of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandera str., Lviv, 79013 Ukraine, e-mail: Yurii.P.Hubar@lpnu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-2538-0727>.

INVESTIGATION OF THE ASYMMETRY OF THE EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD USING THE REPRESENTATION OF POTENTIALS OF DISKS

The paper considers representations of the Earth external gravitational field, supplementing its traditional approximation by series in spherical functions. The necessity for additional means of describing the external potential is dictated by the need to study and use it at points in space close to the Earth's surface. It is in such areas that the need arises to investigate the convergence of series with respect to spherical functions and to adequately determine the value of the potential. The apparatus for approximating a piecewise continuous function in the middle of the ellipse is used for the representation of the Earth external gravitational field by the simple and double layer integrals. This makes it possible to expand the convergence region for the series supplying the potential to the entire space outside the integration ellipse. Therefore, as a result, the value of the gravitational potential coincides with the values of these series outside the body containing the interior masses (except for the integration ellipse). It becomes possible to evaluate the gravitational field behavior in surface areas and to carry out studies of geodynamic processes with greater reliability. Approximation of the gravitational field with the help of surface integrals also determines the geophysical aspect of the problem. Indeed, in the process of solving the problem we constructed two-dimensional integrands, which are uniquely determined by a set of Stokes constants. In this case, their expansion coefficients into series are defined by linear combinations of their function power moments. The resulting function schedules can be used to study the external gravitational field features, e.g., to study its asymmetry with respect to the equatorial plane.

Key words: the gravitational field asymmetry, Earth, potential, Bjerhamer sphere, Stokes constants.

Надійшла 26.02.2022 р.