

## ДО ПИТАННЯ ТОЧНОСТІ ГРАВІМЕТРИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ АСТРОНОМО-ГЕОМЕТРИЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ НА ГЕОДИНАМІЧНИХ І ТЕХНОГЕННИХ ПОЛІГОНАХ

*Мета цієї роботи* – теоретично обґрунтувати вимоги до точності гравіметричного забезпечення астрономічного й астрономо-геометричного нівелювання на геодинамічних і техногенних полігонах, з урахуванням точності сучасного високоточного геометричного нівелювання. Методику досягнення мети забезпечено теоретичними дослідженнями відомих способів астрономо-геометричного нівелювання, сучасних методів прогнозування неотектонічних процесів, точності ГНСС та геометричного нівелювання. Основні результати – визначено вимоги до точності гравіметричного забезпечення високоточного астрономо-геометричного нівелювання висотної мережі геодинамічних та техногенних полігонів. Встановлена теоретична можливість визначення ортометричних і нормально-ортометричних висот практично на 90 % території України з точністю навіть близько 0,2 мм на 1 км подвійного ходу. *Наукова новизна і практична значущість*: доведено, що навіть за максимальних значень аномалій гравіметричного поля Землі можна вважати ортометричні й нормальні висоти відрізками нормалі до референц-еліпсоїда, як і геометричні висоти; якщо під час астрономічного нівелювання визначати відхилення виска з точністю  $m\theta_{cp} = 0,2''$  (точність сучасних зеніт-систем навіть 0,08"), то це внесе похибку у визначення різниці геоїдальних частин геодезичних висот 0,2 мм на 1 км ходу, якщо ж визначати це значення з наявних гравіметричних карт відхилення виска, то ця похибка становитиме 0,5–1 мм на 1 км ходу, що також відповідає нівелюванню навіть першого класу; непаралельність еквіпотенціальних поверхонь під час обчислення висот необхідно враховувати вже тоді, коли різниця сили тяжіння на еквіпотенціальній поверхні початкової точки ходу і в точці перетину цієї поверхні з нормаллю у кінцевій точці ходу перевищує 2 мГал; силу тяжіння на станції нівелювання і на силовій лінії поля в кінці ходу, на висоті, що відповідає висоті відповідної станції нівелювання, треба знати, якщо сума перевищень у ході до 10 м на 1 км ходу з точністю лише 20 мГал, відповідно, за суми перевищень 100 м на 1 км – 2 мГал. Тому навіть модель EIGEN-CG03C (точність оцінюють у межах 8 мГал) на більшій частині рівнинної території України може забезпечити гравіметричними даними високоточне нівелювання під час виконання інженерно-геодезичних робіт та робіт на геодинамічних і техногенних полігонах.

*Ключові слова*: відхилення прямовисних ліній; зеніт-системи; ГНСС; геодезичні та ортометричні висоти; астрономічне нівелювання.

### Вступ

Вплив гравітаційного поля Землі на результати нівелювання, що проявляється в непаралельності рівневих поверхонь, пояснює неможливість безпосереднього використання вимірних перевищень (тільки гіпсометричної частини) для обчислення висот. Розв'язують це питання, застосовуючи різні системи висот, які відповідають певним вимогам.

Безумовною є перша вимога до системи – висоти повинні визначатись однозначно, незалежно від способу нівелювання. Цій властивості відповідає тільки значення інтеграла  $C_M$

$$C_M = W_0 - W_M = \int_0^M g dh = \sum_{i=1}^n g_i h_i, \quad (1)$$

де в правій частині – криволінійний інтеграл, обчислений за лінією нівелювання між точками  $O$  і  $M$  незалежно від траси або між будь-якою точкою на еквіпотенціальній поверхні  $W_0$  (наприклад, точкою  $C$ , розміщеною на силовій лінії поля, яка проходить через точку  $M$  (рис. 1)) і самою точкою  $M$ ;  $g_i$ ,  $h_i$  – виміряні на станції нівелювання значення сили тяжіння і перевищення.

Помилкою від заміни середнього значення  $g$  вимірним на станції знехтувано в усіх випадках (див., наприклад [Barlik, 2007]).

В 1954 р. в Римі прийнято рішення називати інтеграл  $\int_0^M g dh$  геопотенціальною величиною –  $C_M$  (geopotential number).

Геопотенціальні величини широко використовують у світі для зрівнювання високоточних

нівелірних мереж. Наприклад, західноєвропейську мережу – Réseau Européen Unifié de Nivellement (REUN) [https://link.springer.com/article/10.1007] зрівняли французькі й датські геодезисти J. Vignal і O. Simonsen.

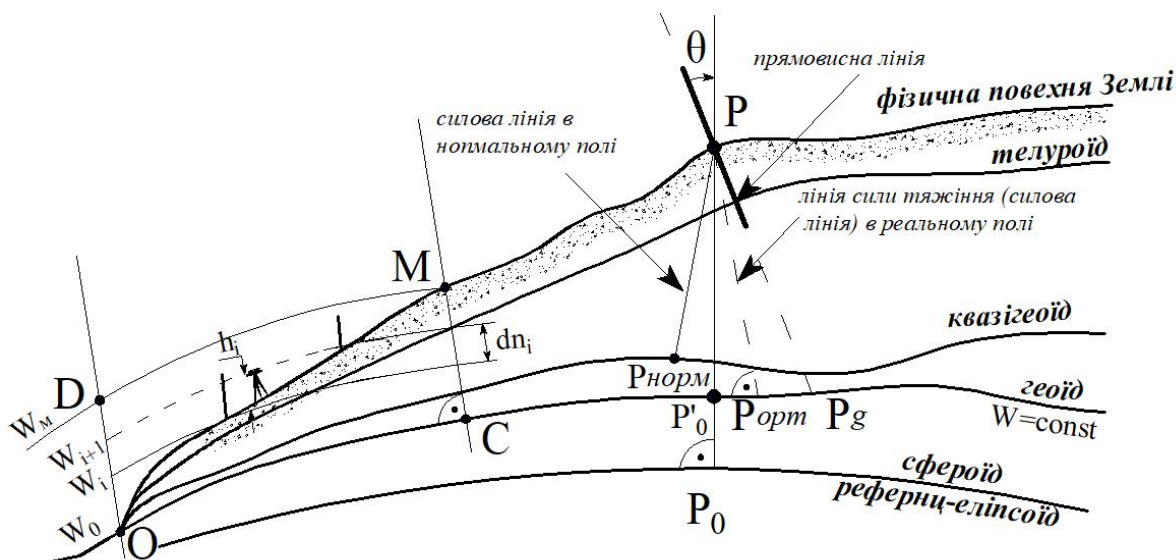


Рис. 1. Висоти: геометричні ГНСС (геодезичні), нормальні, ортометричні

До цієї мережі приєднують мережі високоточного нівелювання Середньої Європи (EUVN)]. Використовується та властивість, що сума геопотенціальних величин у замкненому ході теоретично повинна дорівнювати нулю. Очевидно, що за геопотенціальними величинами необхідно урівнювати в першому наближенні й мережі високоточного нівелювання в Україні для відбракування помилок суто вимірів, як геодезичних, так і гравіметричних.

Значення  $C_M$  використовують в усіх без винятку системах висот для того, щоб одержати однозначний результат. Наприклад, динамічна система висот, яку запропонував Ф. Helmert, [Helmert, 1884], в якій динамічні висоти  $H_{\text{дин}}$  одержують діленням геопотенціальних величин на деяке постійне значення сили тяжіння, яке для інженерно-геодезичних задач доцільно приймати достатньо близьким до реального значення  $g$  (Гал)

$$H_{\text{дин}}^M = \frac{W_M - W_0}{g \text{ (kgal)}} = \frac{1}{g \text{ (kgal)}} \int_0^M g dh. \quad (2)$$

Ділення на  $g$  в кГал виконують для зручності, одержувані величини мають розмірність

довжини (метр) і близькі за значенням до суми виміряних перевищень. Міжнародна асоціація геодезії в 1955 р. запропонувала одне значення сили тяжіння для усієї Землі для GRS 80  $\gamma_0^{45^\circ} = 9.806199203 \text{ мс}^{-2}$ . Відповідно для динамічної висоти замість виразу (2) часто подають тільки вираз

$$H_{\text{дин}}^M = \frac{W_M - W_0}{\gamma_0^{45^\circ}} = \frac{1}{\gamma_0^{45^\circ}} \int_0^M g dh. \quad (3)$$

Але, використовуючи (3), треба урахувати, що в Україні, за різниці широт точок нівелювання від  $44^\circ$  до  $52^\circ$  різниці  $g - \gamma_0^{45^\circ}$  можуть перевищити 250 мГал. Розрахунок показує, що значення динамічної поправки тоді становитиме 0,0002  $\Delta h$ . Тому різниця між значеннями, обчисленими за формулами (2) і (3), практично проявитиметься вже за перевищень, більших за 5 м.

Очевидно, що динамічна, динамічна регіональна (2) і геопотенціальна системи ідеальні для інженерно-геодезичних робіт, коли треба винести в природу еквіпотенціальну поверхню, наприклад, підпирний рівень водосховища чи трасу швидкісної залізничної колії, щоб забезпечити мінімум затрат енергії на пересування тощо.

Висоти динамічні не мають, на жаль, чіткої геометричної інтерпретації, тому їх неможливо використати для визначення фігури Землі. Їй додамо: як і нормальні, вони не мають зв'язку з геометричними висотами, які визначаються з ГНСС-вимірів, хоча ідеально підходять для розв'язання інженерно-геодезичних задач.

Друга умова – висоти повинні визначатись тільки за результатами вимірів на фізичній поверхні Землі, без використання гіпотетичних даних про її внутрішню будову. Оскільки на геодинамічних полігонах, під час інженерних робіт на промайданчиках, у районах гірничих робіт переважно є детальна, реальна, а не гіпотетична інформація про геологічну будову на глибинах до геоїда, а розподіл сили тяжіння по висоті нам треба знати, підкреслюємо, тільки у вузлових точках нівелірної мережі, до того ж тільки до геоїда, ця вимога видається не такою вже і безсумнівною. Розглянемо це детальніше нижче, викладаючи матеріал, який стосується ортометричних висот. Тут наведемо тільки цитату з роботи нашого вчителя – професора М. К. Мигалья “..Однако, более глубокое изучение вопроса показывает....С привлечением даже скудных сведений о плотностях верхних слоев Земли ортометрическая высота в тех же худших условиях определяется с ошибкой менее 1 м” [Мигаль, 1969].

Третя умова – прийнятій системі висот повинен відповідати достатньо строгий спосіб визначення геоїдальної складової геометричної чи геодезичної висоти.

Щодо останньої умови, то виконання, хоча і не зовсім строге, другої умови, покладене в основу нормальної системи висот М. С. Молоденського, привело до того, що нині геоїдальна складова щодо навіть теоретичної поверхні – квазігеоїда визначається з точністю близько дециметра [Двуліт, Голубінка, 2009; Czarneski, 2010], що переважно не задовольняє вимоги навіть гідрографічних [Остроумов, 2011], а тим більше високоточних інженерно-геодезичних робіт. Разом з тим, різниці геоїдальних складових – профіль реальної фізичної поверхні геоїда в ході астрономічного нівелювання можна визначати на суходолі теоретично з точністю до 1–2 мм [Hirt, Bürki, 2005]. Це навіть дає змогу за

результатами повторного астрономо-геометричного нівелювання (комбінації астрономічного й високоточного геометричного нівелювання) визначати зміни положення і форми геоїда. Сучасні наукові гіпотези саме з цими змінами пов'язують катастрофічні деформації земної поверхні – землетруси. Це також, за умови визначення ортометричної поправки з точністю, яка відповідає точності визначення гіпсометричної частини, надає змогу контролювати результати ГНСС нівелювання і навпаки, контролювати результати визначення ортометричних висот, що, на нашу думку, надає істотну перевагу використанню цих висот замість нормальних на геодинамічних і техногенних полігонах. Хоча, справді, розрахунки, наведені й у цій статті, показують, що на 90 % території України різниці в сумах ортометричних і нормальних висот в ходах повинні бути менші за міліметр. Тому в ситуації, яка склалася на практиці, використання нормальних висот для картографічних робіт можливе і виправдане.

### Виклад основного матеріалу

До 60-х років в Україні використовували ортометричні висоти, які, і тільки в усіх країнах соціалістичного табору, були замінені на нормальні висоти, зокрема в Україні в 1958 р. Цю заміну на той час ще можна було чимось пояснити, крім ідеологічних аргументів, які, звичайно, також були. Проте із розвитком ГНСС-нівелювання і досягнення ним сучасної точності ця заміна, яка для картографічних робіт не має істотного значення, для високоточних, особливо на геодинамічних полігонах, невиправдана. Хоча б тільки тому, що геодезичні висоти, які визначають за результатами ГНСС вимірів, складаються із двох частин: гіпсометричної частини – ортометричної висоти –  $H_{\text{орт}}$ . (на рис. 1 –  $PP'_0$ ) і геоїдальної частини, висоти геоїда над прийнятим референц-еліпсоїдом –  $P'_0P_0$ , яку можна, підкреслимо, незалежно визначити з точністю близько міліметр [Hirt, et al., 2006], тим самим надійно і незалежно проконтролювавши весь комплекс вимірювань.

Для обґрунтування необхідності такої заміни ортометричних висот нормальними наводили дві причини.

Перша причина – це те, що в найзагальнішу формулу ортометричної висоти –

$$H_{\text{орт.}} = \frac{C_M}{g_{\text{ср.}}} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i h_i}{g_{\text{ср.}}}$$

входить значення  $g_{\text{ср}}$  – середнє значення сили тяжіння на відрізьку  $PP_{\text{орт.}}$ , яке залежить від вертикального градієнта сили тяжіння на відрізьку  $PP_{\text{орт.}}$  і яке, справді, вимірюваннями тільки на фізичній поверхні Землі точно знайти неможливо. Відзначали, що воно пов'язано складною залежністю із розподілом густини всередині Землі, але чомусь не брали до уваги вимог до точності визначення  $g_{\text{ср}}$  і того факту, що  $g_{\text{ср}}$  нам потрібно знати тільки у вузлових точках нівелірних ходів і лише на відрізьку від репера до геоїда (на 99 % ДГМ України – це висоти до 300 м). Надалі покажемо, що в сучасних умовах, особливо на геодинамічних і техногенних полігонах, можливі декілька способів знаходження  $g_{\text{ср}}$  і  $g_i$  – сили тяжіння на станціях нівелірного ходу із точністю, яка задовольняє вимоги не тільки нівелювання першого класу, але і високоточного нівелювання коротким променем із максимально досяжною сьогодні точністю 0,2 мм на 1 км подвійного ходу. Тобто ортометричні висоти, які, на відміну від нормальних, мають чіткий як геометричний, так і фізичний зміст, і тому придатні для визначення фігури Землі – геоїда, теоретично можна знайти на всій території України із точністю, яка визначається здебільшого максимальною нині точністю саме геометричного нівелювання,

$$\theta_i = \frac{1}{2} [(\xi_{i-1,i} - \xi_i) \cos \alpha_{i-1,i} + (\eta_{i-1,i} - \eta_i) \cos \alpha_{i-1,i}]. \quad (5)$$

Точність визначення  $\xi$  і  $\eta$  із використанням зеніт-систем і ГНСС-вимірів –  $0,1''$  досягається за 20 хв спостережень. А це забезпечує точність побудову профілю геоїда з точністю 1–2 мм, що, своєю чергою, дає можливість з використанням формули (4) оцінювати і точність як визначення ортометричних поправок, так і ГНСС висот на порівняно малих кілометрових віддальх.

Визнаючи, що ортометричні висоти мають чіткий, однозначний геометричний зміст, ідеально підходять для визначення фігури Землі – геоїда, більшість наукових джерел на території СРСР, навіть таке авторитетне, як [Пеллинен, 1978], констатували “.... геометрически ясное понятие ортометрической высоты на самом деле

навіть 0,2–0,3 мм на 1 км подвійного ходу. Точність сучасного ГНСС-нівелювання відповідає точності геометричного нівелювання принаймні другого класу. Такої точності досягнуто ще в минулому столітті не тільки в США, а й у Польщі [Сасон, 1999], сьогодні вона вища, хоча і немає інших інструментальних засобів (крім того ж ГНСС), щоб її підтвердити на великих віддальх. Тому навіть з формули (4) різницю висот геоїда ( $N_M - N_A$ ) ми можемо знайти, принаймні, із сантиметровою точністю, якщо відома з ГНСС-нівелювання  $\Delta H_{AM}^{\text{геом}}$  – різниця геометричних висот (висот відносно геоцентричного еліпсоїда й ортометрична поправка  $p_{\text{орт}}$  з точністю, яка відповідає точності визначення суми перевищень  $[h]_{AM}$  із геометричного нівелювання:

$$\Delta H_{AM}^{\text{геом.}} = \Delta H_{AM}^{\text{орт.}} + (N_M - N_A) = [h]_{AM} + p_{\text{орт.}} - (N_M - N_A), \quad (4)$$

де  $\Delta H_{AM}^{\text{орт.}}$  – різниця ортометричних висот (гіпсометрична частина, яку одержуємо за даними геометричного нівелювання від т. А до т. М як суму виміряних перевищень  $-[h]_{AM}$ , виправлених ортометричною поправкою  $-p_{\text{орт.}}$ .

Крім того, принаймні, на геодинамічних і техногенних полігонах є можливість виміряти на спеціально створених профілях  $\xi$  і  $\eta$  – складові відхилення виска в меридіані та у першому вертикалі й за результатами астрономічного нівелювання обчислити  $(N_M - N_A) = \frac{1}{\rho} \int_A^M \theta dl$  – геоїдальну частину, проінтегрувавши складові відхилення виска –  $\theta$  вздовж лінії профілю, які знаходять за формулою:

оказується строго нереалізуемым...”. Обґрунтовується це тією ж неможливістю визначити із достатньою точністю значення  $g_{\text{ср}}$ . Хоча питання, якою повинна бути ця точність, як ми вже зауважили вище, не обговорювали. І навіть більше, є сучасні роботи, в яких пропонують взагалі відмовитись через цю ж причину від такого поняття, як геоїд, замінивши його квазі-геоїдом, який не є еквіпотенціальною поверхнею.

Висоти, пов'язані із квазігеоїдом, називають нормальними –  $PP_{\text{норм}}$  (рис. 1). Їх офіційно використовують лише на територіях колишнього соціалістичного табору. Квазігеоїд, – це поверхня, яка практично збігається із поверхнею

геоїда на морях і океанах, незначно відрізняється від неї (за літературними даними) до 2 см на рівнині й до 2 м у горах, хоча, здебільшого, це визначається прийнятою висотою початкового футштока, а на рівнині – суми ортометричних і нормальних перевищень у ходах, як ми покажемо далі, різняться на міліметри і навіть менше, чого не можна сказати про океани і моря. Квазі-геоїд – це така сама складна поверхня, як геоїд, її також неможливо описати точно відомими математичними функціями, як і геоїд. Але, на відміну від геоїда, квазігеоїд не є еквіпотенціальною поверхнею, тому нормальні висоти непридатні для інженерного використання, коли необхідна найвища точність. І навіть більше, деякі авторитетні дослідники [Czarnecki, 2010] не вважають нормальні висоти придатними і для вивчення фігури Землі. Як ми вже зазначали, досягнута точність визначення висот квазігеоїда над референц-еліпсоїдом, знову ж таки за наявними науковими публікаціями, нині – приблизно дециметр. Звернемо ще увагу на те, що за результатами ГНСС-вимірювань на рівнині (до висот менше ніж 1 км) можна врахувати геометричні висоти і, використовуючи сучасні цифрові карти висот геоїда, як ми покажемо далі, визначити ортометричні, а не нормальні висоти. Хоча зауважимо ще раз, що дуже авторитетні дослідники не тільки в СРСР, але, наприклад, і в Польщі [Szpunar, 1962], із сучасних [Двуліт, 2014] погоджувались з можливістю використання нормальних висот, що цілком правильно, коли йдеться про роботи не з міліметровою точністю. Розуміємо, хоча і не погоджуємося з проф. W. Szpunar, бо якби він написав, навпаки, що нормальні висоти за прийнятою методикою їх підрахунку насправді ближчі до ортометричних, його працю, в умовах тоталітарної на той час ПНР, швидше за все, не опублікували б. Це ще більше стосується і робіт Л. П. Пеллінена [Пеллінен, 1978] і професора М. К. Мігалья [Мігаль, 1969].

Враховуючи дискусійність питання вибору системи висот, зупинимося на ньому докладніше. Почнемо з того, що, за прийнятими визначеннями, геометричні висоти – це, однозначно, віддаль по нормалі до референц-еліпсоїда –  $PP_0$  (див. рис. 1), водночас у науковій літературі трапляються неоднозначні визначення нормальних і ортометричних висот: ортометричні висоти – віддалі по прямовисній лінії  $PP_g$  або по силовій

лінії реального ГПЗ –  $PP_{орт.}$ , нормальні – по силовій лінії нормального поля  $PP_{норм}$  або по нормалі  $PP'_0$  тощо. Детальніше це питання розглянуто в статті [Куреньов, 2010], хоча остаточного рішення у цій роботі немає. Звичайно, це утруднює виклад матеріалу, тому покажемо, що за досягнутої точності визначення висот навіть із високоточного геометричного нівелювання, заміна силової лінії чи прямовисної нормаллю до референс-еліпсоїда не приводить до помилки, яку потрібно враховувати, а це істотно спростить викладення подальшого матеріалу.

По-перше, неважко елементарним розрахунком встановити, що навіть за відхилення прямої лінії –  $\theta$ , що дорівнює  $40''$ , і висоти точки 8 км різниця між віддаллю по нормалі  $PP'_0$  і прямовисною лінією  $PP_g$  до геоїда (див. рис. 1) становитиме лише 1 мікрон, тобто різниці немає. Справді, різницю можна виразити формулою:

$$\Delta H = 2H \sin^2 \frac{\theta}{2} =$$

$$= 2 \times 8 \text{ km} \times \sin^2 20'' \leq 0.001 \text{ mm.} \quad (6)$$

Звернемо увагу на те, що ключовими у визначенні є “на фізичній поверхні Землі”, хоча, якщо об’єкт перебуває навіть у ближньому космосі, й у цьому випадку розрахунком за (6) можна встановити, що різниця лише  $10^{-9}$  Н.

Щоб переконатись і в можливості заміни силових ліній гравіметричного поля  $PP_{орт.}$  напрямком нормалі  $PP'_0$  до референс-еліпсоїда під час обчислення висот, розглянемо одну ідею [Мігаль, 1969], яка порівняно просто і дуже наочно в геометричному змісті дає змогу вирішити проблему, приводячи до формул, які одержані суто математично [Мориц, 1979]. Звернемо увагу на те, що одержаний розв’язок дає змогу врахувати і вплив можливих аномалій ГПЗ, на те, що рис. 2, на відміну від наведеного в [Czarnecki, 2010], відповідає нашій східній півкулі та враховує факт зменшення віддалей між еквіпотенціальними поверхнями з широтою. Його легко зрозуміти, якщо згадати, що еквіпотенціальна поверхня (геоїд) – об’ємна фігура. На рис. 2 зображено переріз двох близьких еквіпотенціальних поверхонь (із різними значеннями потенціалу), площиною меридіана. На рис. 2  $A$  і  $B$  – точки на одній еквіпотенціальній поверхні  $W$  і  $A'$  і  $B'$  – на іншій поверхні  $W + dW$ . Для кривизни

силової лінії –  $K$  (детальні пояснення наведено в [Мігаль, 1969; Czarnicki, 2010] – відома формула:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \frac{\sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}}{g} = \frac{\partial g}{g \partial s}, \quad (7)$$

де  $W_{xz}$ ,  $W_{yz}$  – відповідні складові горизонтального градієнта сили тяжіння.

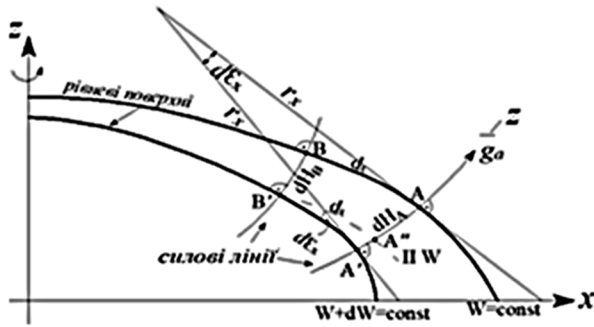


Рис. 2. Кривизна рівневих поверхонь ГПЗ

Визначимо максимальні можливі значення кривизни силової лінії за формулою (7). Значення  $g$ , з урахуванням того, що воно в знаменнику, можемо (без втрати точності обчислень, яку можна не брати до уваги) прийємо  $9,8 \times 10^5$  мГал. За максимальних змін горизонтального градієнта від 1 мГал на 1 км на рівнині до 10 мГал на 1 км у горах радіус кривизни силової лінії згідно із (7) змінюватиметься у межах мінімально від 9000 км на рівнині до 900 км у горах. Для розв'язання задачі у цьому випадку апроксимуємо силову лінію коловою кривою, а нормаль – хордою, яка стягує колову криву довжиною  $S$  і має довжину  $l$ :

$$l = 2r_x \sin\left(\frac{S}{2R}\right). \quad (8)$$

Розрахунок за формулою (8), якщо радіуси силової лінії ГПЗ  $-r_x$  від 900 до 9000 км (максимально можливі значення, які ми вище обґрунтували), показує, що заміна довжини колової кривої (силової лінії) довжиною хорди (нормалі) максимально може привести до зміни висоти в межах від 0,2 мм на рівнині до 2 мм в горах за максимально можливих значень горизонтального градієнта на 1 км від 1 мГал на рівнині до 10 мГал у горах за висот до 2 км). Тобто під час нівелювання навіть першого класу кривизною силової лінії можна нехтувати і вважати висоту

(нормальну й ортометричну) віддалю по нормалі до референц-еліпсоїда, як і геометричну висоту.

Звернемо також увагу і на те, що в інших літературних джерелах можемо знайти результати визначення кривизни силової лінії, які відрізняються (ще менші) від наведеного вище на порядки. Для прикладу, в уже згадуваній роботі [Czarnicki, 2010] для визначення кривизни силової лінії також наведено теоретичну формулу

$$k = -\frac{e'^2}{2v} \sin 2\phi, \quad (9)$$

де  $e'^2 = 6,7394967755 \times 10^{-3}$ ;

$$v = \sqrt{x^2 + y^2 + (1 - e'^2)z^2};$$

$$\phi = \arctg \frac{\tau z}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\tau = 1 + e'^2.$$

Прийнявши для середньої точки України координати:  $x = 3500000$  м,  $y = 2100000$  м,  $z = 4700000$  м, обчисленнями за формулою (9) встановимо, що  $r_x = 1/k = 3,8 \text{ E}+15$  м. Для такого великого значення радіуса кривизни різниця між довжиною силової лінії навіть 8 км і хордою, що їй відповідає, становить лише 0,002 мм.

У роботі [Бровар та ін., 1961] для різниці висот по нормалі й силовій лінії  $-\Delta H$  наведено формулу:

$$\Delta H = \frac{\beta^2 H^3}{6R^2} \sin^2 2B, \quad (10)$$

де  $\beta = 0,005302$ . Ця величина –  $\Delta H$  у середніх широтах навіть за висоти 10 км не перевищує 0,01 мм.

Розходження між результатами, одержаними за формулою (10) і (9) та (8), пояснюється, на нашу думку, тим, що (8) відповідає максимальним (аномальним) значенням горизонтального градієнта сили тяжіння, які ми прийняли, а формули (9) і (8) – нормальному ГПЗ.

Тобто можна зробити висновок, що заміна відрізка силової лінії відрізком нормалі не призводить до недопустимих помилок у визначенні висоти, водночас істотно спрощує викладення матеріалу, оскільки із результатів ГНСС ми одержуємо планові координати і висоти, пов'язані саме з нормальними до геоцентричного ЗЗРЕ GRS-80 (WGS-84).

Встановимо вимоги до гравіметричного забезпечення робіт із визначення ортометричних висот.

Запишемо загальну формулу астрономо-геометричного нівелювання, яку одержують інтегруванням вздовж лінії  $AM$  (рис. 4) [Пеллинен, 1978]:

$$\Delta H_{AM} = \sum_1^n dh - \int_1^n \frac{\theta dl}{\rho} = \sum_1^n dh - \frac{dl}{\rho} \int_1^n \theta, \quad (11)$$

де  $n$  – кількість станцій у ході;  $dl$  – довжина прольоту на станції нівелювання;  $\theta$  – проєкція відхилення виска на напрямок лінії нівелювання, яка визначається з (5).

Зауважимо, що за формулою (11) ми знаходимо  $\Delta H_{AM}$  – перевищення між точками  $A$  і  $M$ . Щоб перейти до геодезичних висот, нам треба врахувати ще і непаралельність рівневих поверхонь на силових лініях у точках  $A$  і  $M$ .

З формули (11) знайдемо, чому повинна дорівнювати точність визначення  $\theta$  –  $m\theta$ . Для досягнення максимально можливої точності, яку забезпечує нівелір, із практичних міркувань, значення, звичайно, повинно бути меншим від точності компенсатора рівня нівеліра, за допомогою якого ми приводимо візирну вісь в робоче положення. Тепер можемо прийняти  $0,5''$ .

Для апріорного розрахунку точності СКП, з якою можна визначити  $\sum_1^n dh$  на 1 км подвійного ходу, приймемо, що СКП дорівнює  $0,2$  мм. Знову ж, для апріорної оцінки точності приймемо, що вздовж лінії  $AM$  відхилення виска не змінюється і дорівнює  $\theta_{cp}$ , у цьому випадку:

$$\Delta \xi = \frac{dl}{\rho} \int_1^n \theta = \frac{dl}{\rho} n \theta_{cp}. \quad (12)$$

Переходячи до СКП, знайдемо:

$$m\theta_{cp} = \frac{m\Delta \xi \rho}{dl\sqrt{n}}. \quad (13)$$

Прирівнюючи СКП гіпсометричної частини –  $0,2$  мм і геоїдальної та прийнявши для розрахунку  $dl = 50$  м і  $n = 20$ , одержимо  $m\theta_{cp} = 0,2''$ . Такої і навіть більшої точності можна досягти (і досягнуто) тільки із використанням сучасних зенітних камер [Hirt, et al., 2006; Hirt, & Bürki, 2005]

Якщо ж використовувати наявні карти відхилень виска, які забезпечують точність, наприклад, на території Росії [Серапинас, 2012], визначення  $m\theta_{cp} = 0,5 \div 1''$ , то з тієї самої формули (13) знайдемо, що  $m\Delta \xi$  і, відповідно, точність геоїдальної

частини астрономо-геометричним нівелюванням забезпечимо  $0,5 \div 1$  мм на 1 км ходу. За такого самого визначення гіпсометричної частини (з урахуванням ортометричної поправки) це вже відповідає нівелюванню першого класу.

Якщо ж взагалі не враховувати відхилення виска, то навіть на рівнині за відхилення виска лише  $\theta = 5 \div 10''$  геоїдальна частина становитиме  $5 \div 10$  мм на 1 км ходу, що може не задовольняти навіть вимоги нівелювання третього класу.

Отже, якщо під час астрономо-геометричного нівелювання визначати відхилення виска із точністю  $m\theta_{cp} = 0,2''$ , то це внесе похибку в визначення різниці геоїдальних висот  $0,2$  мм на 1 км ходу. Якщо ж знаходити це значення за наявними гравіметричними картами відхилення виска, то ця похибка дорівнюватиме  $0,5-1$  мм на 1 км ходу, що відповідає нівелюванню першого класу.

Астрономо-геометричне нівелювання широко використовували у Західній Європі та США навіть до появи ГНСС та інерційно-гравіметричного методу для визначення різниці відхилення виска на сусідніх пунктах і зеніт-приладів. Астрономічне нівелювання потрібно, на нашу думку, використовувати для розвитку висотної основи на геодинамічних і технологічних полігонах, як незалежний метод разом із ГНСС нівелюванням.

Ортометричні висоти були відомі вже в 1878 р., назву запропоновано в 1887 р. (Goullier). Нагадаємо, що наш підвищений інтерес до них зумовлений тим, що, знаючи геоїдальну складову геометричних висот (а в наш час є можливість визначити її з точністю, не меншою, ніж гіпсометрична), можна від висот, виміряних за допомогою ГНСС, перейти до ортометричних, і навпаки. Це дає змогу контролювати достатньо протяжні нівелірні ходи навіть першого класу за результатами ГНСС-нівелювання, на що ми вже вказували. Враховуючи це, розглянемо теорію ортометричних висот дуже детально, намагаючись одержати теоретично найстрогішу формулу, що дасть змогу оцінити вплив на точність результату спрощень, які допускають у відомих способах обчислення ортометричних висот. Це необхідно, оскільки точність геометричного нівелювання з часу, коли ці формули були запропоновані, істотно підвищилась, навіть до  $0,2$  мм на 1 км подвійного ходу.

Безпосередньо з рис. 1, враховуючи незалежність приросту потенціалу від шляху інтегрування, можемо записати

$$C_M = \int_0^M g_i dh_i = W_0 - W_m = \int_0^C g_i dh_{\text{вим}} + \int_C^M g_n dn_i = \int_C^M g_n dn_i \quad (14)$$

(т. С лежить на геоїді й на одній силовій лінії з т. М);  $g_n$  – середнє значення сили тяжіння між сусідніми  $i$ -ми еквіпотенціальними поверхнями на силовій лінії  $CM$ .

Останній інтеграл у формулі (14) подають так:  $\int_C^M g_n dn_i = g_{\text{ср}} H_{\text{орт.}}$ . Зауважимо, що остання рівність теоретично строго справедлива тільки у випадку, коли значення  $dn$  від т. С до т. М (рис. 1) рівні.

Звідси, беручи до уваги (14), одержують відомий вираз для визначення ортометричної висоти:

$$H_{\text{орт.}} = \frac{C_M}{g_{\text{ср}}} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i h_i}{g_{\text{ср}}} \quad (15)$$

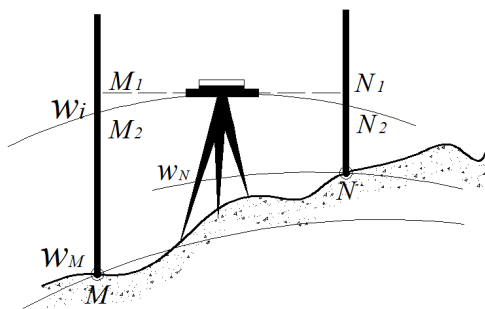


Рис. 3. Геометричне нівелювання із середини

Зважаючи на дискусійність питання вибору системи висот, розглянемо дуже детально (див. рис. 3) процес високоточного геометричного нівелювання із середини на станції. На рис. 3 прийнято такі позначення:

$M_1, N_1$  – відліки за рейками, встановленими на точках  $M$  і  $N$ ;

$W_M, W_N, W_i = W_{M_2} = W_{N_2}$  – значення потенціалу сили тяжіння, відповідно, в точках  $M, N, M_2, N_2$ .

Унаслідок залежності  $dW = gdh$ ;  $W_M - W_{M_2} = g_M MM_2$ ;  $W_N - W_{N_2} = g_N NN_2$ ,

$g = 0,5(g_M + g_N)$  і  $\delta_g = (g_M - g_N)$

$g_M = g - 0,5\delta_g$ ,  $g_N = g + 0,5\delta_g$ .

Прийнявши  $W_i = W_{M_2} = W_{N_2}$ , одержимо

$$W_M - W_N = g(MM_2 - NN_2) + \delta_g 0,5(MM_2 + NN_2) = g((MM_2 - NN_2) + (\delta_g 0,5(MM_2 + NN_2))/g),$$

де  $MM_2 - NN_2 = \Delta h = MM_1 - NN_1$  – виміряне на станції перевищення. Нехтуючи  $\delta_g 0,5(MM_2 + NN_2)/g$ , одержимо відому фундаментальну формулу:

$$W_M - W_N = g \Delta h, \quad (16)$$

де  $g$  – середнє значення сили тяжіння зі значень на точках, де встановлено рейки.

Оскільки для підрахунку різниці ортометричних висот у ході ми користуємося формулою (16), то оцінимо, яку максимальну помилку через нехтування останнім членом у формулі (16) можна допустити. Врахуємо, що максимальна довжина рейок – 3 м. Відповідно  $\delta_g$  зміна сили тяжіння у разі зміни висоти на 3 м  $0,5(MM_2 + NN_2)$  також менша за 3 м. Із виразу для редуції Фая

$$\delta_g \approx \delta_{gF} (\text{мГал}) = 0,3086 \Delta h (\text{км}) = 0,001 \text{ мГал}. \quad (17)$$

Тому значення знехтуваного члена формули (16) дорівнює  $0,001 \text{ мГал} \times 3000 \text{ мм} / 10000 \text{ мГал} = 3 \times 10^{-4} \text{ мм}$ , що практично не впливає на точність нівелювання в ході.

Детальніше оцінимо знаходження середнього значення сили тяжіння на прямовисній лінії в кінцевому репері ходу, на відріжку від геоїда до репера. Спочатку поставимо питання: якою ж повинна бути точність визначення  $g_{\text{ср}}$ , щоб помилка не перевищувала точності визначення гіпсометричної складової у ході. Для цього продиференціюємо (15) і, переходячи до СКП, одержимо в найзагальнішому випадку:

$$m_H = \frac{C_M}{g_{\text{ср}}^2} m_g,$$

звідки, з урахуванням (17), отримаємо, після незначних перетворень:

$$m_g = \frac{m_H}{H} g_{\text{ср}}. \quad (18)$$

Прийнявши знехтуване значення  $m_H = 0,2 \text{ мм}$  і  $g_{\text{ср}} = 10^6 \text{ мГал}$ , знайдемо, що за висот 10 м, 100 м і 1000 м нам потрібно забезпечити точність визначення  $g_{\text{ср}} - m_g$ , яка дорівнює лише, відповідно, 20, 2 і 0,2 мГал.



Тепер розглянемо дуже детально, на яких точках потрібно визначати величини сили тяжіння. Це допоможе нам одержати загальну формулу ортометричної поправки – різниці між вимірним перевищенням на станції та різницею ортометричних висот, й оцінити відомі способи її визначення. Звернемося до рис. 4.

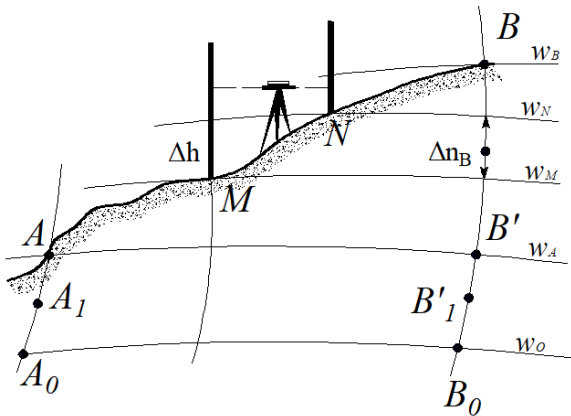


Рис. 4. До виведення формули ортометричної поправки

На силевій лінії в точці B, у кінці ходу  $W_M - W_B = g_{B'} \times \Delta n_B$ , де  $g_{B'}$  – значення прискорення у середній точці відрізка  $\Delta n_B$ . Відповідно, на силевій лінії задньої точки станції  $W_M - W_N = g_M \times \Delta h$ . З рівності  $g_{B'} \times \Delta n_B = g_M \times \Delta h$  випливає:

$$\frac{\Delta n_B}{\Delta h} = \frac{g_M}{g_{B'}}$$

Звідси

$$\Delta n_B = \frac{g_M}{g_{B'}} \Delta h = \Delta h + \frac{g_M - g_{B'}}{g_{B'}} \Delta h.$$

Ортометричне перевищення між точками A і B подамо як:

$$\sum_A^B \Delta h_B = \sum_A^B \Delta h + \sum_A^B \frac{g_M - g_{B'}}{g_{B'}} \Delta h. \quad (19)$$

Вираз

$$p_{орт.} = \sum_A^B \frac{g_M - g_{B'}}{g_{B'}} \Delta h. \quad (20)$$

ортометрична поправка у виміряну суму перевищень у ході від точки A до кінцевої точки ходу в найточнішому вигляді. Як бачимо, для її точного визначення нам необхідно виконати вимірювання сили тяжіння на кожній точці, де встановлено рейки  $-g_M$ , і у відповідних їм точках на

перетині еквіпотенціальної поверхні точки M і силової лінії кінцевої точки ходу  $-g_{B'}$ .

Переходячи до ортометричних висот з рис. 4, запишемо:

$$H_B = H_A + \sum_A^B \Delta h_B + (B_0B' - A_0A), \quad (21)$$

тобто необхідно врахувати непаралельність еквіпотенціальних поверхонь у точці A з відомою висотою на початку ходу і в точці B у кінці ходу.

Прийнявши, із допустимим припущенням, що  $W_0 - W_A = g_{A_1} A_0A = g_{B'_1} B_0B'$ ;

де  $A_1, B'_1$  – середні пункти  $A_0A$  і  $B_0B'$ , одержимо:

$$\frac{B_0B'}{A_0A} = \frac{g_{A_1}}{g_{B'_1}},$$

звідки, після очевидних перетворень

$$(B_0B' - A_0A) = \left( \frac{g_{A_1}}{g_{B'_1}} - 1 \right) H_A. \quad (22)$$

Тоді найточніша формула ортометричних висот матиме вигляд:

$$H_B = H_A + \sum_A^B \Delta h + \sum_A^B \frac{g_M - g_{B'}}{g_{B'}} \Delta h + \left( \frac{g_{A_1}}{g_{B'_1}} - 1 \right) H_A. \quad (23)$$

Проаналізуємо вплив останнього члена виразу (23) (ортометричної поправки) на результат визначення ортометричної висоти.

Прийнявши,  $g_{B'_1} = g_{A_1} + \Delta g$ , де  $\Delta g = g_{A_1} - g_{B'_1}$ , одержимо після очевидних перетворень:

$$p_{орт.}^{\Delta g} = \left( \frac{g_{A_1}}{g_{B'_1}} - 1 \right) H_A = \frac{\Delta g}{g_{B'_1}} H. \quad (24)$$

Прийнявши  $\frac{p_{орт.}^{\Delta g}}{H} = \frac{0,2 \text{ мм}}{1 \text{ км}} = 2 \times 10^{-6}$  і  $g_{B'_1} = 1000$  Гал, згідно із (24) отримаємо, що з останнім виразом у формулі (23) вже потрібно рахуватись, якщо  $\Delta g$  більше за  $2\text{мГал}$ .

Визначимо вплив на значення СКП ортометричної поправки  $m_{p_{орт.}}$  СКП похибок визначення сили тяжіння на станції нівелювання  $m_{g_M}$  і ще раз із найдетальнішої формули (23) визначення сили тяжіння на силевій лінії у кінцевій точці ходу на висоті, яка відповідає висоті станції  $m_{g_B}$ .

Після нескладних перетворень подамо третій доданок із (23) у вигляді:

$$\sum_A^B \left( \frac{g_M}{g_{B'}} \Delta h - \Delta h \right).$$

Прийнявши для оцінки точності в ході постійними значення  $\frac{g_M}{g_{B'}}$  і  $\Delta h$ , замінимо у виразі суму добутком:

$$\frac{g_M}{g_{B'}} \Delta h \times n - \Delta h \times n = \frac{g_M}{g_{B'}} H - H.$$

Продиференціювавши останній вираз і переходячи до СКП, одержимо після очевидних перетворень:

$$m_{\text{орт.}}^{g_M} = \frac{m_{g_M}}{g_{B'}} H, \quad (25)$$

$$m_{\text{орт.}}^{g_{B'}} = \frac{g_M H m_{g_B}}{g_B^2}. \quad (26)$$

Прийнявши  $m_{\text{орт.}}^{g_M} = 0,2$  мм, одержимо з (25), що якщо забезпечити точність визначення сили тяжіння на станції  $m_{g_M}$  2 мГал за різниці перевищень у ході 100 м, то за довжини ходу 1 км спричинена цим похибка в сумі виміряних перевищень дорівнюватиме інструментальній похибці вимірювань нівеліром. Якщо хід прокладено на рівнині й різниця висот не перевищує 10 м, то відповідне значення становить 20 мГал. Розрахунки за формулою (18) дають аналогічні результати. Тобто, якщо змінено перевищення між початковою точкою ходу і кінцевою в інтервалі  $10 \div 100$  м на 1 км ходу, то для того, щоб похибки, які вносяться гравіметричними вимірюваннями сили тяжіння, не перевищували інструментальну точність нівелювання, силу тяжіння на станції нівелювання і на силовій лінії поля в кінці ходу, на висоті, що відповідає висоті відповідної станції нівелювання, треба знати з точністю, відповідно, в інтервалі  $20 \div 2$  мГал.

Якщо врахувати, що похибки у визначенні аномалій сили тяжіння сучасної моделі EIGEN-CG03C оцінюють у межах 8 мГал [Bihter Erol, 2012], то на більшій частині рівнинної території України модель може забезпечити гравіметричними даними створення державних нівелірних мереж, а також високоточне нівелювання під час виконання інженерно-геодезичних робіт та робіт на техногенних полігонах.

Враховуючи одержані вимоги до методики і точності визначення  $g_{B'}$ , розглянемо відомі методики визначення ортометричних висот. Спочатку зазначимо, що практично строго розв'язати цю задачу можливо, якщо поблизу вузлових точок нівелірної мережі є свердловини, для яких побудовано графіки зміни сили тяжіння

на відрізьку від геоїда (еквіпотенціальної поверхні початкового репера) до вузлової точки. Гравіметри для таких вимірювань є у світі, в СРСР розроблені ще в 60-ті роки. На 1 січня 2019 р. в Україні налічувалося 2233 розвіданих родовищ тільки горючих корисних копалин. Якщо поглянути на карту їх розміщення, то вибір свердловин, у яких можна виконати гравіметричні спостереження, на ділянці до геоїда (переважно вся територія України розміщена на висотах до 300 м) можливий в більшості районів навіть менше ніж через 25 км.

Друга можливість строгого теоретичного розв'язання задачі із використанням значення розподілу густин осадкових порід – обчислити значення сили тяжіння в потрібних нам точках (з висотами, що відповідають висотам зв'язаних точок нівелірної мережі) силовій лінії. В гравіметрії цю задачу називають прямою гравіметричною задачею, вона достатньо теоретично обґрунтована й експериментально випробувана. В геодезичній гравіметрії цю задачу вперше розв'язали ще Гельмерт [Helmert, 1884] і Нетхаммер [Niethammer, 1939, 1947] із використанням відомої редукції Пуанкаре – Прея (Poincare – Preya). З огляду на обмеження розміру статті тут тільки зазначимо, що досягнення потрібної точності не повинно спричинити особливих труднощів, оскільки найбільша різниця в густині шарів земної поверхні до геоїда характеризується значенням до  $0,6$  г/см<sup>3</sup>, що згідно із [Czarnecki, 2010] може призвести на висотах 10 м, 100 м і 1000 м до максимальних помилок у визначенні сили тяжіння на відповідних точках силовій лінії 0,2 мГал, 2 мГал і 20 мГал, відповідно, що ще раз збігається із розрахунками за формулами (18) і (25).

Третя реалізована можливість визначити ортометричну поправку, приймаючи  $g \cong Y$ , наприклад, на підставі гіпотези Клеро про сфероїдичний розподіл значень нормальної сили тяжіння –  $Y$  з широтою і висотою, що описується відомою формулою:

$$g \cong Y = Y_0^{45^\circ} (1 - 0,5\beta \cos 2B) \left(1 - \frac{2H}{R}\right), \quad (27)$$

тобто в цьому випадку ми можемо обійтись взагалі без гравіметричних вимірів. Покажемо, що це можливо на рівнині. Справді, максимальні похибки, які можуть виникнути, приблизно можна оцінити, виконавши диференціювання виразу

(24) і приймаючи, що точність заміни значення сили тяжіння нормальним значенням  $m_g$  дорівнює максимальним значенням аномалій. Прийmemo їх для рівнини 20 мГал, а для гірських районів – 150 мГал.

Розрахунок за формулою  $m_{max} = m_g \times H$  дасть такі результати. Для гірських районів  $m_{max}$  за суми перевищень у ході від 1 м до 100 м буде в межах 0,15÷15 мм, а на рівнині 0,02÷2 мм. Тобто на рівнині методи, за яких замість дійсних значень сили тяжіння застосовують значення нормальної сили тяжіння, задовольняють вимоги до виконання нівелювання навіть першого класу.

Хоча способи не передбачають необхідності виконання гравіметричних робіт, проте, на нашу думку, вони становлять інтерес хіба що як контрольні, тому що реальні значення сили тяжіння можна одержати навіть, як ми вже зазначали, з похибкою до 8 мГал, використовуючи загальнодоступну модель EIGEN-CG03C.

На завершення розглянемо нормальні висоти, щоб переконатись, що перевищення, обчислені за нормальними висотами, ми можемо використати для обчислення ортометричних висот, причому на рівнині взагалі без змін, і навпаки.

Якщо в рівнянні (15) прийняти, що  $g_{cp}$  дорівнює  $\gamma_{cp}$  – нормальному прискоренню, обчисленому для середнього пункту на силовій лінії в кінці ходу, то одержимо рівняння, яке запропонував М. Молоденський для нормальної висоти точки В у кінці нівелірного ходу:

$$H_{норм.}^B = \frac{1}{\gamma_{cp}} \int_0^B g_i h_i, \quad (28)$$

де  $\gamma_{cp} = \gamma_0 - \frac{H_B}{2} \left( 2 \frac{g}{R} \right) = \gamma_0 - 0.1543 H_B$ ,

$\gamma_0$  – значення нормальної сили тяжіння на геоїді в пункті В.

Знайдемо спочатку максимально можливі різниці між ортометричними висотами і наявними нормальними висотами на рівнинній території України. Із порівняння (28) і (15) випливає:

$$H_{норм.}^B - H_{орт.}^B = \frac{g_{cp} - \gamma_{cp}}{\gamma_{cp}} H_{орт.}^B \quad (29)$$

Прийmemo  $g_{cp} - \gamma_{cp} = 30$  мГал,  $H_{орт.}^B = 250$  м,  $\gamma_{cp} = 10^6$  мГал. Підставивши в (29), одержимо:

$$H_{норм.}^B - H_{орт.}^B = \frac{30 \text{ мГал} \times 250000 \text{ мм}}{1000000 \text{ мГал}} = 6 \text{ мм.}$$

Аналогічний розрахунок для гірських районів України, якщо  $g_{cp} - \gamma_{cp} = 130$  мГал,  $H_{орт.}^B = 2000$  м, покаже, що  $H_{норм.}^B - H_{орт.}^B = 250$  мм.

Оскільки  $P \cdot N_{\Delta h}$  – поправка нормальна, перевищення в ході АВ знаходимо за формулою:

$$P \cdot N_{\Delta h} = \frac{1}{\gamma_{cp}} (\gamma_0^B - \gamma_0^A) H_m + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g_0 - \gamma_0)_{AB} \Delta h. \quad (30)$$

то аналіз виразу (30) показує: для того, щоб перейти від нормальних висот до ортометричних на території України, можна для підрахунку ортометричної поправки скористатись виразом:

$$P_{орт.} = P \cdot N_{\Delta h} - \frac{1}{\gamma_{cp}} (g_0 - \gamma_0)_{AB} \Delta h. \quad (31)$$

і наявними картами аномалій Фая.

Для попередніх розрахунків скористаємося формулою (17) для редуції Фая, прийнявши  $\gamma_{cp} = 1000000$  мГал. Одержимо для  $\Delta h = 10$  м, 100 м, 1 км, 2 км різниці між ортометричним і нормальним перевищеннями відповідно  $3 \times 10^{-5}$  мм,  $3 \times 10^{-3}$  мм, 0,3 мм, 1,2 мм. Тобто, якщо правильно обчислено перевищення нормальних висот у ходах на території України за формулами (28)–(31), за винятком районів з висотами понад 1 км, ці перевищення можна використовувати і для обчислення ортометричних висот.

### Висновки

1. За максимальних змін горизонтального градієнта від 1 мГал на 1 км на рівнині до 10 мГал на 1 км у горах радіус кривизни силової лінії ГПЗ змінюватиметься у межах від 9000 км на рівнині до 900 км у горах. За таких радіусів силової лінії, у разі заміни довжини колової кривої (силової лінії) її хордою (нормаллю), максимально це може призвести до зміни висоти у межах від 0,2 мм на рівнині до 2 мм в горах. Тому можна вважати висоту (нормальну й ортометричну) віддаллю по нормалі до референц-еліпсоїда, як і геометричну висоту. Розходження між цими результатами і наведеними в інших джерелах пояснюється тим, що вони відповідають максимальним (аномальним) значенням горизонтального градієнта сили тяжіння, а не нормальному ГПЗ.

2. Якщо під час астрономо-геометричного нівелювання визначати відхилення виска з

точністю  $m\theta_{\text{ср}} = 0,2''$  (точність сучасних зеніт-систем навіть  $0,08''$ ), то це внесе похибку у визначення різниці геометричних висот  $0,2$  мм на  $1$  км ходу. Якщо ж знаходити це значення з наявних гравіметричних карт відхилення виска, то ця похибка становитиме  $0,5\text{--}1$  мм на  $1$  км ходу, що також відповідає нівелюванню навіть першого класу.

У разі визначення висот непаралельність екіпотенціальних поверхонь у точці на початку ходу і в кінцевій точці ходу необхідно враховувати вже тоді, коли різниця сили тяжіння на екіпотенціальній поверхні початкової точки ходу і в точці перетину цієї поверхні з нормаллю у кінцевій точці ходу перевищує  $2$  мГал.

3. Теоретично для точного визначення ортометричних висот необхідно знати значення сили тяжіння на кожній точці, де встановлені рейки, і у відповідних їм точках на перетині екіпотенціальних поверхонь цих точок із силовою лінією у кінцевій точці ходу.

4. Для того щоб похибки, які вносяться гравіметричними вимірами й обчисленими значеннями сили тяжіння, не перевищували інструментальну точність нівелювання, силу тяжіння на станції нівелювання і на силовій лінії поля у кінці ходу на висоті, що відповідає висоті відповідної станції нівелювання, треба знати, якщо сума перевищень в ході до  $10$  м на  $1$  км ходу, з точністю лише  $20$  мГал, відповідно, якщо сума перевищень  $100$  м на  $1$  км –  $2$  мГал. Якщо врахувати, що похибки у визначенні аномалій сили тяжіння сучасної моделі EIGEN-CG03C оцінюють у межах  $8$  мГал, то на більшій частині рівнинної території України модель може забезпечити гравіметричними даними високоточне нівелювання під час виконання інженерно-геодезичних робіт та робіт на геодинамічних і техногенних полігонах.

5. Перша можливість практично строго з необхідною точністю визначити значення сили тяжіння у будь-якій точці силовій лінії на кінцевій точці нівелірного ходу полягає у використанні вимірювань у свердловинах поблизу цих точок спеціальним гравіметром, який розроблений ще в 60-ті роки. Аналіз розміщення закон-

сервованих свердловин тільки на родовищах горючих копалин України показує, що це цілком реальний спосіб.

Друга можливість – розв'язання прямої геофізичної задачі із використанням поправки Пуанкаре – Прея. Оскільки шари земної кори до геоїда характеризуються максимальними різницями густин до  $0,6$  г/см<sup>3</sup>, то навіть якщо приймати це значення як помилку у визначенні  $g_{\text{ср}}$ , це може привести на висотах  $10$  м,  $100$  м і  $1000$  м до помилок у визначенні сили тяжіння на відповідних точках силовій лінії  $0,2$  мГала,  $2$  мГала і  $20$  мГал відповідно, тому це також цілком реальний спосіб.

6. На рівнинній території України були відомі ще два століття тому сферично-ортометричні або нормальні методи, у яких замість дійсних значень сили тяжіння застосовують значення нормальної сили тяжіння. Вони задовольняють вимоги до виконання нівелювання навіть першого класу. Для гірських районів найточнішими є відомі формули Нетхаммера.

7. За умови правильного обчислення перевищень нормальних висот у ходах на території України, за винятком районів з висотами понад  $1$  км, ці перевищення можна використовувати і для обчислення ортометричних висот.

8. Сумісне виконання астрономо-геометричного і ГНСС-нівелювання, із дотриманням рекомендованих у статті вимог до гравіметричного забезпечення, дасть змогу контролювати як результати ГНСС-нівелювання на невеликих віддалях, так і геометричне нівелювання за результатами ГНСС-вимірювань на значних віддалях, що потрібно врахувати, розробляючи методику спостережень на геодинамічних та техногенних полігонах.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Бровар В. В., Мазницький, В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. Москва: Геодезиздат, 1961. 256 с.
- Двуліт П. Д., Голубінка Ю. І. Порівняльна характеристика визначення висот квазігеоїда території України з використанням моделей геоїда/квазігеоїда та гравітаційного поля Землі. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*. 2009. Вип. 72. С. 27–34. <https://science.lpnu.ua/>

- istcgcap/all-volumes-and-issues/volume-72-2009/comparative-characteristics-determining-heights
- Двуліт П. Д. Фізична геодезія. Київ: ВПЦ "Експрес", 2014.
- Куреньов Ю. П., Малік Т. М. Щодо трактування терміна "нормальна висота". *Вісник геодезії та картографії*. 2010. Вип. 6 (69). С. 6–9.
- Мигаль М. К. Лекции по теории фигуры Земли. Ленинград: ФООП УЭМ ЛОЛПИ, 1969. 133 с.
- Мориц Г. Современная физическая геодезия. Москва: Недра, 1979. 200 с.
- Остроумов В. З. Разработка и исследование новых методов расчета параметров квазигеоида на основе применения глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS для обеспечения мониторинга уровня морей. 2011. [http://www.rfbr.ru/rffi/ru/project\\_search/o\\_44310](http://www.rfbr.ru/rffi/ru/project_search/o_44310)
- Пеллинен Л. П. *Высшая геодезия (Теоретическая геодезия)*. М.: Недра, 1978. 264 с.
- Серапинас Б. Б. *Геодезические основы карт. Гравитационное поле. Высоты. Лекция 7*. 2012. [http://www.geogr.msu.ru/cafedra/karta/docs/GOK/gok\\_lecture\\_7.pdf](http://www.geogr.msu.ru/cafedra/karta/docs/GOK/gok_lecture_7.pdf)
- Barlik, M., Pachuta, A. (2007). *Geodezja fizyczna i grawimetria geodezyjna. Teoria i praktyka*. Warszawa, OWPW.
- Cacoń, S., Bosy, J., & Kontny, B. (1999). The GPS levelling network in the conurbation of Wrocław. *Artificial Satellites*, 34(3), 163–170. [https://scholar.google.com.ua/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=uk&user=X11Z9rIAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation\\_for\\_view=X11Z9rIAAAAJ:wvYxNZNCP7wC](https://scholar.google.com.ua/citations?view_op=view_citation&hl=uk&user=X11Z9rIAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation_for_view=X11Z9rIAAAAJ:wvYxNZNCP7wC)
- Czarnecki, K. *Geodezja wspolczesna* (2010). Katowice, Wydawnictwo Gall, 487 p. <https://smp.am.szczecin.pl/dlibra/publication/2376>.
- Erol, Bihter. (2012). Spectral evaluation of Earth geopotential models and an experiment on its regional improvement for geoid modelling. *Journal of Earth System Science*, 121, 823–835. <https://doi.org/10.1007/s12040-012-0190-x>
- Helmert, F. R. (1884). *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. BG Teubner. [https://books.google.com.ua/books?hl=uk&lr=&id=YjteAAAAcAAJ&oi=fnd&pg=PR14&dq=Helmert+F.R.+&ots=0zawsj69oz&sig=iO4kfxb10Zim35\\_BXHLpwunGIA&redir\\_esc=y#v=onepage&q=Helmert%20F.R.&f=false](https://books.google.com.ua/books?hl=uk&lr=&id=YjteAAAAcAAJ&oi=fnd&pg=PR14&dq=Helmert+F.R.+&ots=0zawsj69oz&sig=iO4kfxb10Zim35_BXHLpwunGIA&redir_esc=y#v=onepage&q=Helmert%20F.R.&f=false)
- Hirt, C., & Burki, B. (2006). Status of Geodetic Astronomy at the Beginning of the 21st Century. [http://www.ife.uni-hannover.de/mitarbeiter/seeber/seeber\\_65/pdf\\_65/hirt8.pdf](http://www.ife.uni-hannover.de/mitarbeiter/seeber/seeber_65/pdf_65/hirt8.pdf)
- Hirt, C., Seeber, G., Bürki, B., & Müller, A. (2006). *Die digitalen Zenitkammersysteme TZK2-D und DIADEM zur hochpräzisen Geoidbestimmung*. na. [https://ddfe.curtin.edu.au/gravitymodels/ERTM2160/pdf/Hirt2005\\_etal\\_obergurgl.pdf](https://ddfe.curtin.edu.au/gravitymodels/ERTM2160/pdf/Hirt2005_etal_obergurgl.pdf)
- Niethammer, T. (1947). *Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung*. Basel Birkhauser. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6811-2>
- Niethammer, T. (1939). *Das astronomische Nivellement in Meridian des St. Gotthard*. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz. Schweiz. Geod. Kommiss, Band 20, Bern, S. 48.
- Szpunar, W. (1962). *Geodezja wyższa i astronomia geodezyjna*. Warszawa. Państwowe wydawnictwo naukowe. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1962gwag.book.....S/abstract>.

Kostyantyn BURAK

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 15, Karpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine, e-mail: burak4111945@gmail.com

ON THE ACCURACY OF GRAVIMETRIC PROVISION  
OF ASTRONOMO-GEOMETRIC LEVELING ON GEODYNAMIC  
AND TECHNOGENIC POLYGONS

The purpose of this work is to prove the necessity and possibility of returning to the orthometric system of heights in Ukraine and to substantiate the ways of solving this problem. The method of achieving the goal is provided by theoretical studies of existing methods of astronomical and geodetic leveling, modern methods of forecasting neotectonic processes, GNSS accuracy and geometric leveling. The main results – the requirements for the accuracy of gravimetric support of high-precision geometric leveling, both DGM of Ukraine and high-altitude network of

geodynamic and man-made landfills. The theoretical possibility of determining orthometric heights for almost 90 % of the territory of Ukraine with an accuracy of even 0.2 mm per 1 km of double stroke has been established. Scientific novelty and practical significance: it is proved that even at the maximum values of GPP anomalies it is possible to consider orthometric and normal heights as segments of normal to the reference ellipsoid, as well as geometrical heights; if at astronomical and geodetic leveling to define a deviation of a temple with accuracy  $m\theta_{sr} = 0,2''$  (accuracy of modern zenith systems even  $0,08''$ ), it will bring an error in definition of a difference of orthometric heights of 0,2 mm on 1 km of the course if to determine this value from the available gravimetric maps of the deviation of the temple, this error will be 0.5–1 mm per 1 km of travel, which also corresponds to the leveling of even the first class; ; non-parallelism of equipotential surfaces should be taken into account when the difference between the force of gravity on the equipotential surface of the initial point of travel and at the point of intersection of this surface with the normal at the end point of travel exceeds 2 mGal; the force of gravity at the leveling station and on the force line of the field at the end of the course, at a height corresponding to the height of the corresponding leveling station, must be known at the sum of excesses during 10 m per 1 km with an accuracy of only 20 mGal. m per 1 km – 2 mGala, therefore, the modern model EIGEN-CG03C (accuracy is estimated within 8 Mgal) in most of the plains of Ukraine can provide gravimetric data for the creation of state leveling networks and high-precision leveling during engineering and geodetic works and works on geodynamic and man-made landfills.

*Key words:* deviation of steep lines; zenith systems; GNSS; geodetic and orthometric heights; astronomical leveling.

Надійшла 03.04.2022 р.