

І. Р. Гавдьо

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра електромехатроніки та комп’ютеризованих електромеханічних систем,  
Ihor.r.havdo@lpnu.ua

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАГНІТНОГО СТАНУ ОДНОФАЗНОГО КОЛЕКТОРНОГО ДВИГУНА

<http://doi.org/10.23939/sepes2022.01.048>

© Гавдьо І. Р., 2022

Однофазні колекторні двигуни (ОКД) із послідовним збудженням мають просту конструкцію та невелику вартість, тому перспективні щодо застосування для приводу приладів побутової техніки та електричного ручного інструменту. Це зумовлює необхідність створення математичних моделей ОКД, які дали б змогу як розробляти нові, так і модернізувати наявні зразки таких двигунів. Мета статті – створення інженерної математичної моделі магнітного стану ОКД із використанням колових методів. Вихідними параметрами для цієї моделі є розміри магнітного кола, обмоткові дані та миттєві значення струмів статора і якоря. Розроблена модель дає змогу визначити криву поля у повітряному проміжку ОКД, а також розрахувати магнітні індукції на всіх інших ділянках магнітного кола ОКД. Математичну модель магнітного стану ОКД розглянуто на прикладі найпоширенішої двополюсної конструкції. Магнітний стан ОКД подано вичерпною заступною схемою магнітопроводу із зосередженими параметрами. Окремі ділянки магнітопроводу, в межах яких магнітне поле вважається однорідним, замінені магнітними опорами. Нелінійні магнітні опори (НМО) відповідають феромагнітним ділянкам магнітопроводу та зубцевій зоні якоря, а постійні магнітні опори (ПМО) – ділянкам повітряного проміжку та ділянкам, де протікають потоки розсіяння. НМО представлені нелінійними характеристиками як залежностями намагнічувальних сил (НС) від магнітного потоку –  $F$  [Ф]. Активний шар якоря ОКД під полюсами в площині, яка перпендикулярна до осі обертання двигуна, поділено на  $m$  рівномірних секторів. Заступна схема магнітного кола ОКД містить НМО ділянок ярма статора, полюсів статора, зубцевого шару якоря, ярма якоря, а також ПМО ділянок повітряного проміжку і можливих шляхів замикання потоків розсіяння. Для складання системи рівнянь, яка описує заступну схему, використано метод контурних потоків. Систему нелінійних алгебричних рівнянь можна розв’язати, зокрема, ітераційним методом Ньютона. Запропонована математична модель магнітного стану ОКД може бути основою для розроблення математичних моделей розрахунку перехідних режимів та статичних характеристик цього типу двигуна.

*Ключові слова: однофазний колекторний двигун, математична модель, магнітопровід, заступна схема, система нелінійних рівнянь.*

### Постановка проблеми

Однофазні колекторні двигуни із послідовним збудженням широко застосовують для приводу приладів побутової техніки (порохотягів, подрібнювачів, міксерів тощо) та електричного ручного інструменту. Ці двигуни живляться від однофазної мережі змінного струму, проектуються на великі

частоти обертання (до 20000–30000 об./хв) і характеризуються порівняно малою масою. Основним недоліком колекторних двигунів є наявність щітково-колекторного вузла, який зменшує надійність їх роботи. Безщіткові двигуни постійного струму порівняно з ОКД дорожчі, бо мають складнішу конструкцію і потребують застосування схеми керування. Для приладів побутової техніки та ручного інструменту вартість є визначальним чинником, що й зумовлює перспективність використання у них ОКД.

### **Актуальність дослідження**

Актуальність дослідження зумовлена доцільністю створення математичних моделей ОКД, які дали б змогу як розробляти нові, так і модернізувати наявні зразки двигунів цього типу.

### **Формулювання мети та завдань статті**

Метою статті є створення інженерної математичної моделі магнітного стану ОКД з використанням колових методів. Вихідні параметри для цієї моделі – розміри магнітного кола, обмоткові дані та миттєві значення струмів статора і якоря. Розроблена модель дає змогу визначити криву поля у повітряному проміжку ОКД, а також розрахувати магнітні індукції у всіх інших ділянках магнітного кола ОКД.

Завдання статті: розроблення заступної схеми магнітного кола, складання системи рівнянь, які відображають заступну схему, а також вибір математичного апарату для розв'язання системи рівнянь.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

У [1] наведено основні рівняння та характеристики ОКД, отримані методами класичної теорії електричних машин. У [2] використано Matlab/Simulink для інтегрування диференціальних рівнянь напруг ОКД, а також JMag для моделювання магнітного поля цього двигуна методом скінченних елементів. У [3] описано математичне моделювання високошвидкісного ОКД для приводу порохотяга із використанням методу скінченних елементів. Нову конструкцію ОКД із кігтеподібним статором і неперехресною обмоткою якоря запропоновано в [4]. Осердя виготовлено із магнітом'якого композитного матеріалу. Запропонована конструкція дає змогу вдвічі зменшити витрату міді, однак коефіцієнт корисної дії такого ОКД дещо поступається ОКД традиційної шихтованої конструкції. Праці [5–8] стосуються проектування ОКД на основі генетичного та комбінованого алгоритмів оптимізації, а також із використанням узагальненого і векторного показників якості.

Застосування польових методів [2, 3] для аналізу ОКД забезпечує найвищу точність, однак є трудомістким і не завжди доцільним для інженерних розрахунків. Упровадження у виробництво нової конструкції ОКД [4] потребує додаткових витрат і повинно бути обґрунтоване економічно. У [5–8] запропоновано підходи до оптимального проектування ОКД, однак не вказано, яким способом отримано результати розрахунків.

Магнітний стан ОКД, на нашу думку, з достатньою для інженерної практики точністю можна розглядати методами електричного і магнітного кіл, як це зроблено в [9, 10] для однофазного асинхронного двигуна з екранованими полюсами та колекторного двигуна зі збудженням від постійних магнітів.

### **Виклад основного матеріалу**

Розглянемо побудову математичної моделі магнітного стану ОКД на прикладі найпоширенішої двополюсної конструкції цього типу двигуна (рис. 1). На осерді статора 1 розташована зосереджена обмотка збудження 2; у пазах осердя якоря 3 – розподілена обмотка якоря 4.

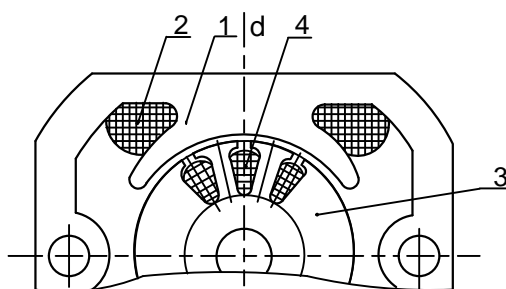


Рис. 1. Ескіз магнітного кола двополюсного ОКД

Для побудови математичної моделі магнітного стану ОКД приймемо такі допущення:

- а) основне магнітне поле ОКД є плоско-паралельним;
- б) індукція основного магнітного поля під суміжними полюсами для довільної пари точок, віддалених одна від одної на полюсну поділку, відрізняється лише знаком;
- в) основний магнітний потік та потік розсіяння обмотки якоря не впливають один на одного;
- г) приймаємо, що поверхня якоря є гладкою, і секції обмотки якоря зі струмом подамо еквівалентним шаром струму, що є нескінченно тонким і рівномірно розподіленим по поверхні;
- д) під час розрахунку характеристик намагнічування окремих ділянок магнітопроводу ОКД використовуємо основну криву намагнічування електротехнічної сталі;
- е) зубцеву зону якоря заміняємо розрахунковою зоною із характеристикою намагнічування, яка в радіальному напрямі тотожна із характеристикою намагнічування реальної зубцевої зони;
- є) котушки обмотки збудження, розташовані на полюсах статора, заміняємо зосередженою намагнічувальною силою (НС), яку подано характеристикою  $F_n = F_n [\Phi_n]$ ;
- ж) нехтуємо комутаційною реакцією якоря, а також поздовжньою реакцією якоря, вважаючи щітки розташованими на геометричній нейтралі.

Магнітний стан ОКД подамо вичерпною заступною схемою магнітопроводу із зосередженими параметрами (рис. 2). Окремі ділянки магнітопроводу, в межах яких магнітне поле вважатимемо однорідним, заміняємо магнітними опорами. НМО відповідають феромагнітним ділянкам магнітопроводу та зубцевій зоні якоря, а ПМО – ділянкам повітряного проміжку та ділянкам, на яких протікають потоки розсіяння. НМО представлені нелінійними характеристиками як залежностями НС від магнітного потоку –  $F [\Phi]$ . Поділимо активний шар якоря ОКД під полюсами в площині, яка перпендикулярна до осі обертання двигуна, на  $m$  рівномірних секторів лініями, що проходять через можливі шляхи протікання робочих магнітних потоків.

Отже, активний шар якоря, який є розподіленим магнітним опором, заміняємо сукупністю паралельно з'єднаних гілок, кожна із яких складається з послідовно з'єднаних ПМО повітряного проміжку  $R_\delta$ , НС сектора якоря  $T_j$  та НМО зубцевої зони  $R_{zj}$  ( $j = 1-2 m$ ). Виразимо  $R_{zj}$  залежністю спаду НС ділянки зубцевої зони від магнітного потоку для цієї зони –  $F_{zj} [\Phi_{zj}]$ . Між гілками, які відповідають активному шару якоря, розташовані поперечні НМО ділянок ярма якоря  $R_{ar1}, R_{a1}, R_{a2}, \dots, R_{a(m-1)}, R_{ar2}, R_{a(m+1)}, \dots, R_{a(2m-1)}$ . НМО  $R_{aj}$  відповідають ділянкам ярма якоря, розташованим у просторі між полюсами, і виражені залежністю спаду НС ділянки ярма якоря від магнітного потоку цієї ділянки –  $F_{aj} [\Phi_{aj}]$  ( $j = 1, \dots, m-1, m+1, \dots, 2m-1$ ). Ділянкам ярма якоря, розташованим під полюсами, відповідають НМО  $R_{ar1}, R_{ar2}$  виражені аналогічними залежностями  $F_{arj} [\Phi_{arj}]$  ( $j = 1, 2$ ).

Полюсам статора відповідають гілки із послідовним сполученням НС котушки статора  $T_{fj}$  та НМО статора  $R_{nj}$ , які виражені залежністю спаду НС полюса статора від магнітного потоку полюса –  $F_{nj} [\Phi_{nj}]$  ( $j = 1, 2$ ). Ділянкам ярма статора, які розташовані між полюсами, відповідають НМО  $R_{яs1}, R_{яs2}$ , а ділянкам від осі полюсів до умовної зони замикання потоків розсіяння обмотки статора – НМО  $R_{s1}, R_{s2}, R_{s3}, R_{s4}$ . Виразимо  $R_{sj}$  залежністю спаду НС ділянки ярма статора від магнітного потоку цієї ділянки –  $F_{sj} [\Phi_{sj}]$  ( $j = 1, 2, \dots, 4$ ), а  $R_{яs1}, R_{яs2}$  – аналогічними залежностями  $F_{яsj} [\Phi_{яsj}]$  ( $j = 1, 2$ ). ПМО  $R_\sigma$  відповідає потокам розсіяння котушок обмотки статора.

На рис. 2 наведено кількість рівномірних секторів  $m = 5$ .

Заступна схема містить всього  $4m + 12$  віток,  $2m + 8$  вузлів та  $2(m - 1) + 6$  незалежних контурів. Отже, для будь-якого значення  $m$  кількість незалежних контурів менша від кількості вузлів:  $2(m - 1) + 6 < 2m + 8$ . Внаслідок цього для складання системи рівнянь, що описує заступну схему, використовуємо метод контурних потоків.

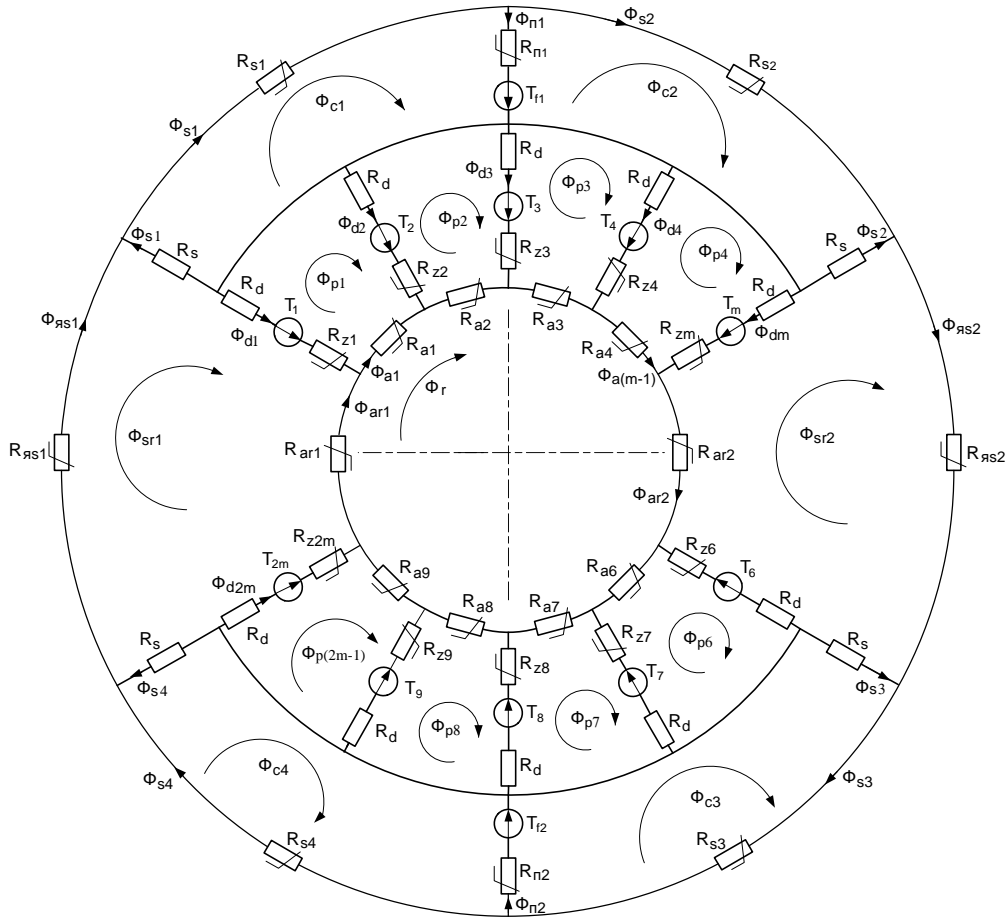


Рис. 2. Заступна схема магнітного кола ОКД

Згідно із допущенням  $\delta$  з умов симетрії схеми можемо записати:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\delta(m+j)} &= -\Phi_{\delta j}; & F_{z(m+j)} [\Phi_{\delta(m+j)}] &= -F_{zj} [\Phi_{\delta j}]; & T_{m+j} &= -T_j; & j &= 1, \dots, m; \\
 \Phi_{a(m+j)} &= -\Phi_{aj}; & F_{a(m+j)} [\Phi_{a(m+j)}] &= -F_{aj} [\Phi_{aj}]; & & & j &= 1, \dots, (m-1); \\
 \Phi_{ar2} &= -\Phi_{ar1}; & F_{ar2} [\Phi_{ar2}] &= -F_{ar1} [\Phi_{ar1}]; & \Phi_{rs2} &= -\Phi_{rs1}; & F_{rs2} [\Phi_{rs2}] &= -F_{rs1} [\Phi_{rs1}]; \\
 \Phi_{n2} &= -\Phi_{n1}; & F_{n2} [\Phi_{n2}] &= -F_{n1} [\Phi_{n1}]; & T_{f2} &= -T_{f1}; & & (1) \\
 \Phi_{s3} &= -\Phi_{s1}; & F_{s3} [\Phi_{s3}] &= -F_{s1} [\Phi_{s1}]; & \Phi_{s4} &= -\Phi_{s2}; & F_{s4} [\Phi_{s4}] &= -F_{s2} [\Phi_{s2}]; \\
 \Phi_{\sigma3} &= -\Phi_{\sigma1}; & \Phi_{\sigma4} &= -\Phi_{\sigma2}; & \Phi_{sr2} &= -\Phi_{sr1}; & \Phi_{c3} &= -\Phi_{c1}; & \Phi_{c4} &= -\Phi_{c2}; \\
 \Phi_{sr2} &= -\Phi_{sr1}; & \Phi_{c3} &= -\Phi_{c1}; & \Phi_{c4} &= -\Phi_{c2}; & & & & \\
 \Phi_{p(m+j)} &= -\Phi_{pj}; & j &= 1, \dots, (m-1); & \Phi_r &= 0 & & & & 
 \end{aligned}$$

Отже, для математичного описання заступної схеми достатньо використати  $(m - 1) + 3$  контури, які стосуються однієї полюсної поділки.



## Математична модель магнітного стану однофазного колекторного двигуна

5. Пуйло Г. В., Пирковский С. Н., Бабийчук О. Б. Проектный синтез однофазных коллекторных двигателей с адаптацией обобщенного показателя качества. *Lviv Polytechnic National University Institutional Repository*, 2003, С. 176–181. URL: <http://ena.lp.edu.ua>.

6. Пуйло Г. В., Пирковский С. Н., Процына З. П. Оптимальный параметрический синтез однофазных коллекторных двигателей на основе генетического алгоритма. *Електромашинобудування та електрообладнання*, 2004, Вип. 62, С. 129–132.

7. Пирковский С. Н. Проектный синтез однофазного коллекторного двигателя на основе комбинированного алгоритма оптимизации. *Електротехнічні та комп'ютерні системи*, 2015, № 17 (93), С. 35–41. URL: <http://dspace.opu.ua> > jspui > bitstream.

8. Пирковский С. Н., Бабийчук О. Б., Процына З. П. Проектный синтез однофазных коллекторных двигателей на основе векторного показателя качества. *Електромашинобудування та електрообладнання*, 2005, Вип. 64, С. 67–71. URL: <http://irbis-nbuv.gov.ua> > irbis\_nbuv > cgiirbis\_64.

9. Маляр В. С., Глухивский Л. И., Маляр А. В., Гречин Д. П., Гавдьо И. Р. Расчет магнитной цепи однофазного асинхронного двигателя с расщепленными полюсами. *Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ*, Минск, 2003, № 3, С. 17–25. URL: <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2003-0-3-17-25>.

10. Гавдьо І. Р. Математична модель магнітного стану колекторного двигуна з магнітоелектричним збудженням. *Електроенергетичні та електромеханічні системи*, 2019, Вип. 1, № 1, С. 10–16.

URL: <https://science.lpnu.ua> > maketno12019zdoi1-10-16

### References

1. Pustola J. *Maszyny komutatorowe dla automatyki*. Warszawa: Wydawnictwa naukowo-techniczne, 1971, 316 s. (Pol.).

2. Karaliūnas B. Computer modeling of the characteristics and magnetic field of single-phase commutator motor. *Proc. of the XV Int. Conf. on Electromagnetic Disturbances, EMD. Technologija. Kaunas – Bialystok*, 2005, pp. 61–64. <http://www.actawm.pb.edu.pl/vol2no3karaliunas.pdf>

3. Dmitrievskii V., Prakht V., Kazakbaev V., Sarapulov S. Optimal design of a high-speed single-phase flux reversal motor for vacuum cleaners. *Energies* 2018, 11, 3334, 13 p. DOI: 10.3390/en11123334; [www.mdpi.com/journal/energies](http://www.mdpi.com/journal/energies).

4. Cros J., Viarouge P., Chalifour Y., Figueroa J. A new structure of universal motor using soft magnetic composites. *IEEE transactions on industry applications*. Vol. 40, No. 2, march/april 2004, pp. 550–557. [https://www.researchgate.net/publication/3171746\\_A\\_New\\_Structure\\_of\\_Universal\\_Motor](https://www.researchgate.net/publication/3171746_A_New_Structure_of_Universal_Motor).

5. Pujlo H. V., Pirkovskiy S. N., Babijczuk O. B. Proektnyi syntez odnofaznykh kolektornykh dvigatelej s adaptatsiej obobschenoho pokazatelja kaczestva. *Lviv Polytechnic National University Institutional Repository*, 2003, S. 176–181. <http://ena.lp.edu.ua>. (Rus.).

6. Pujlo H. V., Pirkovskiy S. N., Protsyna Z. P. Optimalnyi parametriceskij sintez odnofaznykh kolektornykh dvigatelej na osnove geneticheskoho alhoritma. *Elektromashynobuduvania ta elektroobladnania*, 2004, Vyp. 62, S. 129–132. (Rus.)

7. Pirkovskiy S. N. Proektnyi syntez odnofaznoho kolektornoho dvihatelia na osnove kombinirovanoho alhoritma optimizatsii. *Elektrotechnicheskie i kompjuternye sistemy*, 2015, 17 (93), S. 35–41. <http://dspace.opu.ua> > jspui > bitstream. (Rus.).

8. Pirkovskiy S. N., Babijczuk O. B., Protsyna Z. P. Proektnyi syntez odnofaznykh kolektornykh dvigatelej na osnove vektornoho pokazatelja kaczestva. *Elektromashynobuduvania ta elektroobladnania*, 2005, Vyp. 64, S. 67–71 <http://irbis-nbuv.gov.ua> > irbis\_nbuv > cgiirbis\_64. (Rus.).

9. Maljar V. S., Hluchivskiy L. J., Maljar A. V., Hreczyn D. P., Havdo I. R. Raschet magnitnoj tsepi odnofaznoho asinkronoho dvihatelia s rasshceplenyimi poliუსami. *Energetika. Izvestija vysshikh uchebnykh zavedenij i energeticheskich objedinenij SNH*, Minsk, 2003, 3, С. 17–25. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2003-0-3-17-25> (Rus.).

10. Havdo I. R. Matematychna model mahnitnoho stanу kolektornoho dvyhuna z mahnitoelektrycznym zbudzheniam. *Elektroenerhetyczni ta elektromechaniczni systemy*, 2019, Vyp. 1, 1. S. 10–16. <https://science.lpnu.ua> > maketno12019zdoi1-10-16. (Ukr)

**MATHEMATICAL MODEL OF MAGNETIC STATE  
OF SINGLE-PHASE COMMUTATOR MOTOR**

© Havdo I., 2022

Single-phase commutator motors (SPCM) with sequential excitation have a simple design and low cost, and therefore promising for use in the drive of household appliances and electric hand tools. This necessitates the creation of mathematical models of SPCM, which would allow both the development of new and modernization of existing models of such motors. The aim of the article is to create an engineering mathematical model of the magnetic state of SPCM using circular methods. The initial parameters for this model are the size of the magnetic circuit, the winding data and the instantaneous values of the stator and armature currents. The developed model makes it possible to determine the field curve in the air gap of the SPCM, as well as to calculate the flux density in all other parts of the magnetic circuit of the SPCM. The mathematical model of the magnetic state of SPCM is considered on the example of the most common bipolar structure. The magnetic state of the SPCM is represented by an exhaustive replacement circuit of the magnetic core with concentrated parameters. Some sections of the magnetic circuit, within which the magnetic field is considered homogeneous, are replaced by magnetic resistances. Nonlinear magnetic resistance (NMR) correspond to the ferromagnetic sections of the magnetic core and the toothed zone of the armature. Permanent magnetic resistance (PMR) corresponds to the areas of the air gap and the areas of leakage flux. NMR are represented by nonlinear characteristics as dependences of magnetic forces (MF) on magnetic flux –  $F[\Phi]$ . The active layer of the SPCM armature under the poles in the plane perpendicular to the axis of rotation of the motor is divided into  $m$  uniform sectors. The equivalent circuit of the SPCM magnetic circuit contains the NMR sections of the stator yoke, stator poles, armature toothed layer, armature yoke, as well as PMR sections of the air gap and areas of leakage flux. The method of contour flux is used to compile a system of equations that describes the equivalent circuit. The system of nonlinear algebraic equations can be solved, in particular, by the iterative method of Newton. The proposed mathematical model of the magnetic state of SPCM can be the basis for the development of mathematical models for calculating transient modes and static characteristics of this type of motor.

*Key words: single-phase commutator motor; mathematical model; magnetic core; equivalent circuit; system of nonlinear equations.*