

Михайло ФИС¹, Анатолій ВІВАТ^{2*}, Анатолій ЦЕРКЛЕВИЧ³, Віктор ЛОЗИНСЬКИЙ⁴^{1,4} Кафедра картографії та геопросторового моделювання, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: ¹ Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, ¹ <https://orcid.org/0000-0001-8956-2293>^{2*,3} Кафедра інженерної геодезії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери<https://doi.org/10.23939/istcgcap2023.97.079>

ПРО МЕТРИЧНІ ТА КУТОВІ ЗАЛЕЖНОСТІ ПРОСТОРОВОЇ ПРЯМОЇ ЗАСІЧКИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ІНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧНИХ РОБОТАХ

У прикладних задачах геодезії може виникати потреба у визначенні просторових кутів. При виносі 3D проекту будівель і споруд в природу за просторовими координатами їх характерних точок з використанням електронного тахеометра (ЕТ) також з'являється необхідність у перевірці просторових кутів між різними елементами будівельних конструкцій (наприклад, конструкцій, які формують перекриття дахів, нахилених анкерів тощо). Сучасні геодезичні прилади забезпечують, достатньо високу точність вимірювання (до 1" та 1 мм відповідно). Проте не завжди можна здійснити вимірювання необхідних кутів за допомогою геодезичних приладів з різних причин. Насамперед неможливо розмістити прилад у вершині кута, якщо місце його положення недоступне. Метою цієї роботи є розробка методу визначення просторового кута, вершина якого недоступна для вимірювань. Методика та результати. Для реалізації мети розглянуто один із варіантів його визначення через застосування теореми косинусів з попереднім вимірюванням або обчисленням примикаючих сторін і вертикальних кутів. Алгоритм вирішення поставленої задачі з оцінкою точності визначення необхідних параметрів також наведений в цій статті. Запропоновані основні формули для визначення кутів просторового трикутника з оцінкою їх точності. Виконано дослідження впливу значень лінійних вимірів довжин сторін на величини кутів просторового трикутника з відповідною оцінкою точності. Зокрема, на основі цих обчислень та математичного моделювання, а саме відношення сторін трикутника, було встановлено середньоквадратичні похибки обчислення кутів. На прикладі визначення нахилу стріли баштового крана до основи та визначення кута шпильо даху покриття собору отримані відповідні значення просторового кута: $\alpha=910.712\pm 51''$ та $\alpha=150.109\pm 35''$ за результатами опосередкованих вимірювань елементів, пов'язаних з цим кутом. Наукова новизна та практична значущість. На основі запропонованої методики та проведених числових експериментів визначено просторові кути та проведено аналіз їх апріорної оцінки точності, який підтверджує вплив значень лінійних вимірів довжин сторін на величини просторових кутів. Отримані результати надають можливість застосувати запропонований метод в інженерно-геодезичних роботах із використанням ВІМ технологій в 3D просторі. Цей метод може бути використаний в прикладному програмному забезпеченні виробників електронних тахеометрів для визначення просторових кутів у просторі при вирішенні інженерних задач.

Ключові слова: кутові вимірювання, просторовий кут, похибка, електронний тахеометр, точність.

Вступ

До основних завдань в інженерно-геодезичних роботах належить визначення геометричних параметрів будівельних конструкцій (виконання технічних вимірювань). Це – лінійна або кутова величина об'єкта будівництва, що підлягає геодезичному контролю. Під цей контроль підпадає: вивірення прямолінійності, співвісності, горизонтальності, висотного положення, нахилу, вертикальності, паралельності, площинності, перпендикулярності, кривини, яке традиційно здійснюється в 2D просторі. За цього використовують такі прилади: індикатори, автоколіма-

тори, теодоліти, рулетки, нівеліри, оптичні квадранти, нутроміри, фотокамери, ЕТ [Баран, 2012; Vivat et al., 2018]. На сьогодні все більше використовують лазерні сканери та роботизовані електронні тахеометри для моделювання в 3D просторі [Тревого & Баландюк, 2009; Тревого, 2016; Віват & Назарчук, 2019]. Використання ЕТ ефективно застосовується під час визначення геометричних параметрів інженерних споруд [Баран, 2012; Vivat et al., 2018], прямолінійності обертання великогабаритних агрегатів безперервної дії [Мороз та інші, 2011], спостереження за гідротехнічними спорудами [Староверов, 2020; Баран, 2011], а також для

моніторингу лінійних об'єктів в зонах впливу підземних гірничих робіт із використанням ЕТ та наземних лазерних сканерів [Намінат, 2020]. Методики та необхідну точність регламентують ДСТУ та ДБН. Згідно з нормативними документами, визначається точність виконання робіт, яка коливається від десятих значень міліметрів до одного сантиметра, залежно від елементів контролю геометричних параметрів чи взагалі встановлення деформацій споруд [ДСТУ-Н БВ.1.3-1:2009, ДБН В.1.3-2:2010, ISO 17123-1, ISO 17123-5].

Визначення кута між двома напрямками у пункті спостереження є важливим елементом як для технічних вимірювань, так і для завдань геодезичного моніторингу, для яких визначають лінійні величини горизонтального та вертикального зміщення, а також кутові елементи траєкторії та дирекційний кут напрямку руху робочого знаку [Горяинов, 2018; Gargula, 2009]. В практиці виконавського знімання побудованих елементів будівельних конструкцій також може виникати необхідність у визначенні просторових координат характерних точок для оцінки їх геометричних розмірів (зокрема, просторові кути). Такі задачі найкраще вирішуються із застосуванням сканерів і 3D моделювання. При виносі 3D проекту будівель і споруд в натуру за просторовими координатами їх характерних точок з використанням (ЕТ) також може виникати необхідність у перевірці просторових кутів між різними елементами будівельних конструкцій (наприклад, конструкцій, які формують перекриття дахів, нахилених анкерів тощо). Практично всі задачі технічних вимірювань та інженерно-геодезичного моніторингу можна виконувати (ЕТ) [Баран, 2011; Староверов, 2020]. Світові виробники геодезичного обладнання розробляють прикладне програмне забезпечення для (ЕТ), що вирішує задачі координатної геометрії та посередніх вимірів [Тревого, 2016]. Зазначимо, що вимірювання кутів та ліній за допомогою (ЕТ) можна виконати з точністю (до 1" та 1 мм відповідно), тобто ці виміри можуть використовуватись для обчислення залежних від них величин з великою точністю. Однією із актуальних практичних задач, що потребує вирішення у контексті впровадження ВІМ тех-

нологій, є визначення довільного кута в просторі. Очевидно, що виміряти такий кут за допомогою (ЕТ) безпосередньо неможливо. Винятком може бути лише випадок, коли його вершина розміщена в горизонтальній площині і потрібно виміряти горизонтальний напрямок чи вертикальний кут на точку наведення оптичного променя.

В теорії сферичних функцій описується метод обчислення такого кута. Наприклад, теорема про суму сферичних функцій використовує поняття сферичного кута, який за своєю суттю визначає просторовий кут. Однак застосування просторового кута в практиці інженерно-геодезичних робіт залишилось поза увагою геодезистів.

Мета

Запропонувати метод для обчислення просторового кута, вершина якого є недоступною і, як наслідок, його визначення ускладнюється через неможливість будь-яких безпосередніх вимірювань.

Метод

Для реалізації мети розглянемо один із варіантів його визначення через застосування теореми косинусів з попереднім вимірюванням або обчисленням сторін. Алгоритм вирішення поставленої задачі з оцінкою точності визначення необхідних параметрів також буде наведений в цій статті. Отже, відстані між двома недоступними точками в просторі можна знайти тільки за посередніми вимірами додаткових елементів з їх подальшим використанням у відповідних математичних формулах. На рис. 1 подано геометричну ілюстрацію до вирішення задачі.

Нехай перехрестя вертикальної та горизонтальної осі знаходиться у точці M , а у точках A і C встановлено візирні цілі. Необхідно визначити кут x між цими двома точками. На рисунку також показано горизонтальний кут – γ як відображення проєкції кута x на горизонтальну площину, а також два вертикальні кути – V_1 і V_2 , та виміряні віддалі – S_1 , S_2 та два горизонтальні напрями – β_1 , β_2 (ЕТ).

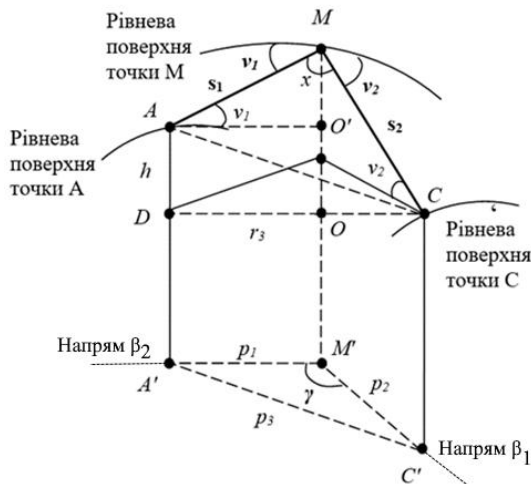


Рис. 1. Характеристики просторового положення точки

Користуючись позначеннями на рис. 1, послідовно визначимо такі лінійні елементи:

$$p_1 = S_1 \cos v_1, p_2 = S_2 \cos v_2; \quad (1)$$

$$h = MO - MO', MO' = S_1 \sin v_1, \quad (2)$$

$$MO = S_2 \sin v_2, h = S_2 \sin v - S_1 \sin v_1.$$

З трикутника A'M'C' отримуємо:

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \gamma. \quad (3)$$

Підставивши значення проєкцій з (1), маємо:

$$p_3^2 = S_1^2 (\cos v_1)^2 + S_2^2 (\cos v_2)^2 - 2S_1S_2 \cos v_1 \cos v_2 \cos \gamma, \quad (4)$$

а з трикутника ACD:

$$(AC)^2 = h^2 + r_3^2. \quad (5)$$

$$m_x^2 = \frac{((\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2 m_a^2 + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)^2 m_b^2 + (\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)^2 m_c^2)}{1 - ((\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma))^2}. \quad (12)$$

Цікавим є також питання оцінки діапазону зміни цієї похибки. Зразу відзначимо, що якщо $\cos x \rightarrow 0$, значення похибки безмежно збільшується, тобто присутня сингулярність. З'ясуємо, для яких випадків це справедливо. Отже, якщо прийняти до уваги вираз:

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1, \quad (13)$$

то тоді виконавши перетворення:

$$(tg \alpha)_{1,2} = \frac{\sin \beta \cos \beta \cos \gamma \pm \sqrt{(\sin \beta \cos \beta \cos \gamma)^2 + \cos^2 \beta (\cos^2 \beta \cos^2 \gamma - 1)}}{\cos^2 \beta},$$

Вираз (5) з врахуванням (2) і (4) матиме вигляд:

$$(AC)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \gamma + (S_2 \sin v_2 - S_1 \sin v_1)^2, \quad (6)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 (\cos v_1 \cos v_2 \cos \gamma + \sin v_1 \sin v_2). \quad (7)$$

Оскільки

$$(AC)^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos x, \quad (8)$$

то

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 (\cos v_1 \cos v_2 \cos \gamma + \sin v_1 \sin v_2) = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos x. \quad (9)$$

З виразу (9) отримуємо:

$$\cos x = \sin v_1 \sin v_2 + \cos v_1 \cos v_2 \cos \gamma \quad (10)$$

та відповідно формулу для обчислення значення шуканого кута:

$$x = \arccos(\sin v_1 \sin v_2 + \cos v_1 \cos v_2 \cos \gamma). \quad (11)$$

Зауважимо, що формулу (10) можна також отримати, використовуючи методи векторної алгебри, але на цьому ми не будемо зосереджуватись.

Виникає однак питання, наскільки точно визначається кут за формулою (11). Для цього визначимо апіорну оцінку точності. Нескладне диференціювання із заміною кутів v_1 на α , а v_2 на β для традиційного сприйняття дає таке:

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha, \quad (14)$$

$$(tg \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \gamma)^2 = tg^2 \alpha + 1,$$

отримаємо остаточно квадратне рівняння і його розв'язок:

$$tg^2 \alpha (\sin^2 \beta - 1) + 2tg \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - 1 = 0, \quad (15)$$

$$+ \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - 1 = 0,$$

$$tg^2 \alpha (\cos^2 \beta) - 2tg \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \gamma -$$

$$-(\cos^2 \beta \cos^2 \gamma - 1) = 0,$$

$$(tg\alpha)_{1,2} = \frac{\sin\beta \cos\beta \cos\gamma \pm \cos\beta \sqrt{(\sin\beta \cos\gamma)^2 + (\cos^2\beta \cos^2\gamma - 1)}}{\cos^2\beta}, \quad (16)$$

$$(tg\alpha)_{1,2} = \frac{\sin\beta \cos\gamma \pm \sqrt{\cos^2\gamma - 1}}{\cos\beta}.$$

Отже, розв'язок може існувати, коли $\cos\gamma = \pm 1, \gamma = 0^\circ, 180^\circ$.

Тоді $tg\alpha = tg\beta, \alpha = \beta + k\pi$. Зазначимо, що при цьому завжди виконується нерівність, якщо $\cos\gamma = \pm 1$, що є наслідком форми параболи з від'ємним детермінантом. Подальші дослідження полягають в отриманні умов для оптимальних значень. Для цього спочатку підтвердимо висновок про необмежене зростання похибки обчислення кута для точок, що знаходяться в одній вертикальній площині. Результати обчислень подамо в табл. 1 для однієї чверті кола, тобто у діапазоні зміни кута від 0° до 90° .

Як видно з табл. 1, при співпадінні точок (за однакових горизонтальних напрямів β_1 та β_2), похибка обчислення кутів суттєво збільшується, а тому такі випадки слід виключати з розгляду. Але в таких ситуаціях немає жодної потреби застосовувати формулу (11).

Неточність обчислень, однак, може проявитись для точок, що лежать в близьких вертикальних площинах. Виконаємо також дослідження варіацій похибок обчислення кутів для різних значень горизонтальних кутів γ та наведемо результати обчислень в табл. 2.

Таблиця 1

СКП обчислення величини кута між двома напрямками в просторі для різних положень точок

$\beta_2,^\circ \backslash \beta_1,^\circ$	0	20	40	60	80
0	0,0	1,0	1,2	1,3	1,4
20	1,4	61876,3	1,1	1,3	1,4
40	1,4	1,7	33915,9	1,6	1,7
60	1,4	1,5	1,2	135695,7	2,6
80	1,4	1,4	1,1	1,2	418820,2

Таблиця 2

СКП обчислення величини кута між двома напрямками в просторі для різних положень точок та кута γ у різних чвертях

$\beta_2,^\circ \backslash \beta_1,^\circ$	$\gamma = 30^\circ$					$\gamma = 60^\circ$				
	0	20	40	60	80	0	20	40	60	80
0	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1
20	1,1	1,1	1,0	1,2	1,3	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1
40	1,2	1,2	0,8	1,2	1,5	1,1	1,0	0,9	0,9	1,1
60	1,3	1,3	1,0	1,0	2,1	1,1	1,1	0,9	0,6	1,2
80	1,3	1,3	1,0	0,9	7,5	1,1	1,1	0,9	0,4	1,9
$\gamma = 120^\circ$						$\gamma = 150^\circ$				
0	1,0	1,1	1,0	1,1	1,1	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3
20	1,0	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4
40	1,1	1,3	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,4	1,5
60	1,1	1,4	1,2	1,4	1,5	1,3	1,3	1,4	1,6	1,9
80	1,1	1,2	1,3	1,6	2,4	1,3	1,4	1,6	2,0	3,2

Результати обчислень, наведені в табл. 1 і 2, підтверджують, що найбільші похибки у визначенні просторового кута отримуються за розміщення точок в одній вертикалі та прямують до безмежності за їх наближення одна до одної. Тому під час вимірювання, за можливості, слід виключати такі випадки. З табл. 2 також помічаємо, що похибки обчислень співрозмірні з похибками вимірювань, а в деяких випадках навіть є меншими за них. Тому формулу для знаходження кута в просторі можна рекомендувати для застосування в прикладних інженерних задачах.

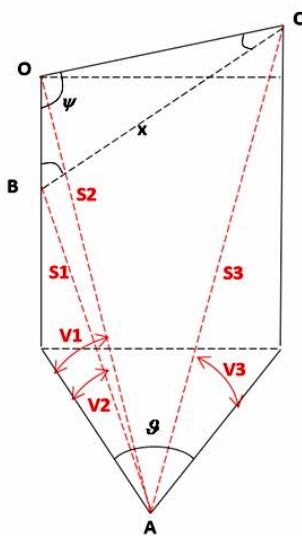


Рис. 2. Схема та основні позначення для визначення кутів просторового трикутника

Розглянемо тепер основні формули для визначення кутів трикутника в просторі. Якщо вершини трикутника розміщені в просторі, то далеко не завжди можна безпосередньо виміряти його сторони. Розглянемо ситуацію, коли тахеометр розміщений поза площиною трикутника. Тоді можна виконати вимірювання кутових елементів між кінцями сторін, тобто кутів протилежних до базисних сторін та горизонтального кута між ними і відстаней від точок кінців сторін до приладу. Визначивши кут між двома точками в точці стояння ET і вимірявши відповідні відстані до цих точок, лише тоді зможемо обчислити довжину до недоступного відрізка.

Опишемо алгоритм визначення кута. Всі необхідні елементи зобразимо на рис. 2. Тут S_1, S_2, S_3 – виміряні нахиленні віддалі, V_1, V_2, V_3 – виміряні вертикальні кути, ϑ – виміряний горизонтальний кут. Отже, для реалізації запропонованого методу приймемо таку послідовність вимірювань. З точки А (розміщення приладу) виміряємо відстані S_1, S_2, S_3 до трьох точок (точки В, О, С) та вертикальні кути V_1, V_2, V_3 до них. Крім того, виміряємо горизонтальний кут ϑ . Для простоти будемо вважати, що точки В, О знаходяться в одній вертикальній площині. За виміряними вертикальними кутами на точки В, О, С обчислюємо кути $\angle BAO, \angle OAC, \angle CAB$ і похибки їх обчислень за формулами (18). Для зручності поряд з розрахунковими формулами подаємо оцінку точності визначення шуканих змінних.

$$\mu_1 = \arccos(\sin v_1 \sin v_2 + \cos v_1 \cos v_2), \vartheta = 0,$$

$$m_{\mu_1}^2 = \frac{(\cos v_1 \sin v_2 - \sin v_1 \cos v_2)^2 m_{v_1}^2 + (\sin v_1 \cos v_2 - \cos v_1 \sin v_2)^2 m_{v_2}^2}{1 - (\sin v_1 \sin v_2 + \cos v_1 \cos v_2)^2},$$

$$\mu_2 = \arccos(\sin v_2 \sin v_3 + \cos v_2 \cos v_3 \cos \vartheta),$$

$$m_{\mu_2}^2 = \frac{(\cos v_2 \sin v_3 - \sin v_2 \cos v_3 \cos \vartheta)^2 m_{v_2}^2 + (\sin v_2 \cos v_3 - \cos v_2 \sin v_3 \cos \vartheta)^2 m_{v_3}^2 + \cos^2 v_2 \cos^2 v_3 \sin^2 \vartheta m_{\vartheta}^2}{1 - (\sin v_3 \sin v_2 + \cos v_3 \cos v_2 \cos \vartheta)^2}, \quad (18)$$

$$\mu_3 = \arccos(\sin v_1 \sin v_3 + \cos v_1 \cos v_3 \cos \vartheta),$$

$$m_{\mu_3}^2 = \frac{(\cos v_1 \sin v_3 - \sin v_1 \cos v_3 \cos \vartheta)^2 m_{v_1}^2 + (\sin v_1 \cos v_3 - \cos v_1 \sin v_3 \cos \vartheta)^2 m_{v_3}^2 + \cos^2 v_1 \cos^2 v_3 \sin^2 \vartheta m_{\vartheta}^2}{1 - (\sin v_1 \sin v_2 + \cos v_1 \cos v_2 \cos \vartheta)^2}.$$

За обчисленими кутами та виміряними сторонами з трикутників $\triangle BAO, \triangle CAO, \triangle OAC$

вираховуємо за теоремою косинусів значення відрізків $|BO|, |CO|, |BC|$:

$$a = |BO| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos \mu_1}, m_a = \frac{1}{a} \sqrt{(S_1 - S_2 \cos \mu_1)^2 m_{S_1}^2 + (S_2 - S_1 \cos \mu_1)^2 m_{S_2}^2 + (S_1 S_2 \sin \mu_1) m_{\mu_1}^2},$$

$$b = |OC| = \sqrt{S_3^2 + S_2^2 - 2S_3S_2 \cos \mu_3}, m_b = \frac{1}{b} \sqrt{(S_3 - S_2 \cos \mu_3)^2 m_{S_3}^2 + (S_2 - S_3 \cos \mu_3)^2 m_{S_2}^2 + (S_3S_2 \sin \mu_3)^2 m_{\mu_3}^2},$$

$$c = |BC| = \sqrt{S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3 \cos \mu_3}, m_c = \frac{1}{c} \sqrt{(S_1 - S_3 \cos \mu_3)^2 m_{S_1}^2 + (S_3 - S_1 \cos \mu_3)^2 m_{S_3}^2 + (S_1S_3 \sin \mu_3)^2 m_{\mu_3}^2}. \quad (19)$$

Використовуючи знову теорему косинусів, остаточно визначаємо шукане значення кута та похибку його обчислення:

$$\psi = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right), m_\psi = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2 m_a^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2 m_b^2 + a^2 b^2 c^2 m_c^2}{\sqrt{c^4 - (a^2 - b^2)^2}}. \quad (20)$$

Перевірку алгоритму виконаємо на моделі просторового трикутника з вхідними даними показаними в табл. 3.

При цьому вимірний горизонтальний кут становив $\vartheta = 90^\circ$, а його похибка 1'.

Таблиця 3

Значення вимірних величин та похибки їх вимірювань

	S_1	S_2	S_3	ν_1	ν_2	ν_3
Значення	34,641 м	48,990	73,655	35°15'50.4"	35°15'50.4"	67°25'4.3"
Похибка	1 мм	1 мм	1 мм	1"	1"	1"

Таблиця 4

Вирахувані значення лінійних та кутових елементів трикутника ΔBOC та похибки їх обчислення

	a	b	c	μ_1	μ_2	μ_3
Значення	20 м	48,831 м	62,488 м	19°28'16"	41°41'05"	57°47'10"
Похибка	1 мм	0,8 мм	0,9 мм	1.4"	1"	1"

За значеннями табл. 4 та формулами (20) визначаємо спочатку значення кута нахилу для модельних значень вхідних параметрів, а далі похибку його обчислення. Остаточний результат такий: $\psi = 125^\circ 00' 00'' \pm 18''$. Отже, похибка обчислення кута значно переважає похибки вимірювань кутів. Це можна пояснити методом обчислення кута з використанням теореми косинусів. Для цього способу характерна невелика точність обчислення кутових елементів. Проте, для даної задачі така точність є цілком прийнятною. Мабуть, для інших прикладних задач слід вибирати визначення кутів з більш високою точністю обчислень. Наприклад, можна скористатись формулою Герона для обчислення площі, яка може зв'язати кутові та лінійні елементи. Але це вже окрема тема для дослідження.

В технічному описі деяких баштових кранів, крім горизонтального розміщення стріли, розглядаються й інші можливі варіанти. Очевидно, що під час установки та обслуговування баштових кранів існують свої методи, що гарантують надійну їх експлуатацію. Не применшуючи вагомості цих методів, запропонуємо ще один спосіб визначення та, найголовніше, контролю за кутом нахилу стріли до горизонту, що ґрунтується на геодезичних вимірюваннях.

Наприклад, для баштового крану потрібно визначити кут нахилу стріли до несучої його основи, що диктується правилами техніки його експлуатації.

Ілюстрація вимірювань на майданчику із встановленим баштовим краном подана на рис. 3. Виконані вимірювання для визначення нахилу

стріли до основи крану внесені у табл. 5. Подальші обчислення для визначення кута нахилу стріли до несучої основи крану подані у табл. 6 і 7.



Рис. 3. Ілюстрація вимірювань ЕТ кутів і ліній до точок на баштовому крані

За даними табл. 7 остаточно обчислюємо кут нахилу стріли баштового крану та значення похибки $\alpha = 91.0712 \pm 50''$. Результат визначення характеризується порівняно невеликою точністю, що однак для цієї задачі є цілком достатнім. Для збільшення точності, як вже наголо-

шувалось, необхідно використовувати сторони з більшою довжиною або виконувати додаткові вимірювання з одночасною зміною методики визначення кута.

Розглянемо ще один приклад з визначення кута шпилью покриття дахом костелу. На рис. 4 показано точки, на які здійснювалось візування ЕТ та відповідні виміряні віддалі і вертикальні кути. В табл. 8 та 9 подані, відповідно, вхідні виміри та результати обчислень.

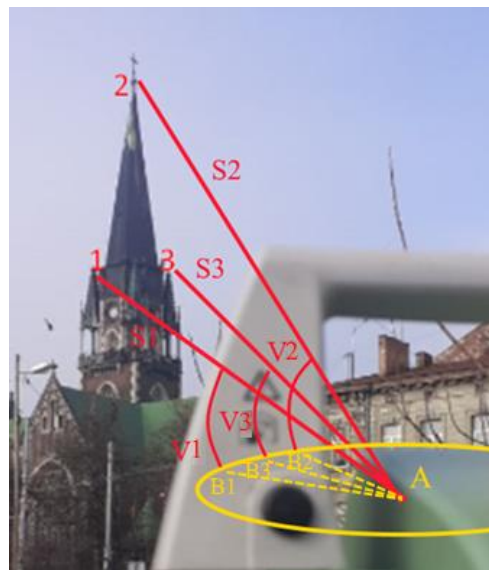


Рис. 4. Ілюстрація вимірювань ЕТ

Таблиця 5

Виміряні сторони та вертикальні кути опорних точок та похибки їх вимірювань

Номер точки	Виміряні горизонтальні і вертикальні кути		Виміряні довжини від ЕТ до точки S, м	СКП вимірювання кутів та віддалей		
	$\beta, \text{ }^\circ$	Z, $^\circ$		$m_\beta, \text{ ''}$	$m_v, \text{ ''}$	$m_s, \text{ мм}$
1	221,80045	94,159672	23,8982	2,0	2,0	2,0
2	221,80340	65,140425	26,3878	2,0	2,0	2,0
3	328,89003	47,172961	18,0047	2,0	2,0	2,0

Таблиця 6

Підготовка даних для обчислення сторін трикутника

Номер точки	Назва гориз. кута	Значення гориз. кута, $^\circ$	Значення кута нахилу, $^\circ$	Віддаль від ЕТ до точки, м	СКП вимірювань		
					$m_\beta, \text{ ''}$	$m_v, \text{ ''}$	$m_s, \text{ мм}$
1	1–2	0,002953	-4,15967	23,898	2,8	2,0	2,0
2	1–3	107,08958	24,85958	26,388	2,8	2,0	2,0
3	2–3	107,08663	42,82704	18,005	2,8	2,0	2,0

Таблиця 7

Обчислення сторін та кутів трикутника $\Delta 123$ та похибки їх обчислення

Номер точки, вершина кута	Обчислені кути просторового трикутника, °	СКП визначення кута, "	Визначена віддаль, м	СКП віддалі, мм
1	29,019	2,8	12,827	0,9
2	105,323	2,1	33,507	2,2
3	84,822	2,2	30,574	2,0

Таблиця 8

Підготовка даних для обчислення сторін трикутника

Номер точки	Назва гориз. кута	Значення гориз. кута, °	Значення кута нахилу, °	Віддаль від ЕТ до точки, м	СКП вимірювань		
					мв, "	мв, "	мв, "
1	1–2	1,26800	16,57277	159,168	2,9	3,0	4,4
2	1–3	2,51454	24,86767	159,926	6,0	0,1	7,4
3	2–3	1,27355	16,65889	169,521	5,8	2,9	2,9

Таблиця 9

Обчислення сторін та кутів трикутника $\Delta 123$ та похибка їх обчислення

Номер точки, вершина кута	Обчислені кути просторового трикутника, °	СКП визначення кута, "	Визначена віддаль, м	СКП віддалі, мм
1–2	8,379	2,986	26,138	2,6
1–3	2,437	5,747	6,828	4,4
2–3	8,294	2,407	25,676	1,3

За даними табл. 9 остаточно обчислюємо просторовий кут $\alpha = 15.0^{109} \pm 36''$ та значення його похибки для шпилью костелу.

Наукова новизна і практична значущість

На основі проведених числових модельних експериментів визначені просторові кути на та проведено аналіз апріорної оцінки їх точності, який підтверджує вплив значень лінійних вимірів довжин сторін до точок, які утворюють просторовий трикутник з визначуванним просторовим кутом. Отримані співвідношення сторін просторового трикутника дають можливість застосувати запропоновані методи для визначення просторових кутів, використовуючи вимірювання ЕТ додаткових елементів в інженерно-геодезичних роботах. На двох прикладах з визначення просторового кута нахилу баштового

крану та просторового кута у вершині шпилью покриття дахом костелу показано практичне застосування запропонованого методу. Проведення таких вимірів може виникати з потреб перевірки елементів будівельних конструкцій в їх просторовому розміщенні.

Висновки

1. Використовуючи апарат математичного моделювання, встановлені похибки обчислень визначення просторового кута, залежно від значень довжин вимірюваних сторін.

2. Висока точність вимірювань віддалей забезпечує достатню точність обчислення кутових елементів.

3. Цей метод може бути використаний у прикладному програмному забезпеченні виробників електронних тахеометрів для визначення

просторових кутів при вирішенні інженерних задач, пов'язаних з монтажем/демонтажем технологічного обладнання.

4. Такий алгоритм можна запрограмувати також у спеціальні пристрої, наприклад, у сучасні лазерні рулетки для вирішення задач архітектурних обмірів та встановлення архітектурних деталей у проектне положення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Антонюк, В., Астаф'єв, В., Савчук С., Віват А., & Шевченко, Т. (2006). Комплексна реалізація методу встановлення обладнання в проектне положення з використанням сучасного та традиційного геодезичного обладнання. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*, (67), 10–16. URL: <https://science.lpnu.ua/istcgcap/all-volumes-and-issues/volume-67-2006/complete-realization-method-installation-equipment>.
- Баран, П. І. (2012). Інженерна геодезія. К.: ПАТ “ВІПОЛ”, 2012.
- Баран, П. І., Бурак, К. О., Ковтун, В. Я., Сухіна, А. П., & Третяк, К. Р. (2011). Інженерно-геодезичні роботи в Україні. *Вісник геодезії та картографії*, (5), 19–26. URL: [file:///C:/Users/Admin/Downloads/vgtk_2011_5_6%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/Admin/Downloads/vgtk_2011_5_6%20(2).pdf).
- Боровий, В., & Бурачек, В. (2017). *Високоточні інженерно-геодезичні вимірювання*. Вінниця: ТОВ “Нілан-ЛТД”.
- Віват А., Назарчук Н. (2019). Дослідження методики застосування скануючого тахеометра topcon IS 301 для побудови просторових моделей архітектурних форм. *Інженерна геодезія*, (67), 35–45. URL: <https://doi.org/10.32347/0130-6014.2019.67.35-45>.
- Горяинов И. В. (2018). Экспериментальные исследования применения обратной линейно-угловой засечки для оценки стабильности пунктов плановой деформационной геодезической сети. *Вестник СГУГиТ*, Т. 23, № 1, 28–39. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/eksperimentalnye-issledovaniya-primeneniya-obratnoy-lineynoy-uglovoyy-zasechki-dlya-otsenki-stabilnosti-punktov-planovoy>.
- ДБН Б В.1.3-2:2010. Система забезпечення точності геометричних параметрів у будівництві. Геодезичні роботи у будівництві. URL: http://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id_doc=25911.
- ДСТУ-Н Б В.1.3-1:2009 Виконання вимірювань, розрахунків та контроль точності геометричних параметрів. Настанова. URL: http://online.budstandart.com/ua/catalog/docpage?id_doc=25920.
- Мороз, О. І., Приступа, О. Д., Шевченко, Т. Г., & Шевченко, Г. Т. (2011). Інженерно-геодезичний контроль прямолінійності осі обертання обертової печі. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*, 74, 47–49. URL: <https://science.lpnu.ua/istcgcap/all-volumes-and-issues/volume-74-2011/engineering-and-geodetic-control-rotation-axis>.
- Намінат, О. С. (2020). Удосконалення методів геодезичного забезпечення моніторингу лінійних об'єктів в зонах впливу підземних гірничих робіт : дис. на здобуття наукового ступеня канд. техн. наук. Львів, 197. URL: <lpnu.ua/sites/default/files/2020/dissertation/3806/disnaminatos.pdf>.
- Смолий, К. (2015). Аналіз сучасних геодезичних та геотехнічних методів моніторингу за деформаціями інженерних споруд. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. Вип. 1, 87–89. URL: <http://zgt.com.ua/%d0%b2%d0%b8%d0%bf%d1%83%d1%81%d0%ba-i-29-2015/>.
- Староверов, В. С., & Гайкін, Д. В. (2020). Геодезичний моніторинг гідротехнічних споруд за допомогою автоматизованої системи спостереження. *Містобудування та територіальне планування* : наук.-техн. зб., К. : КНУБА. Вип. 74, 298–307. URL: <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2020.74.298-307>.
- Тревого, І., Баландюк, А. (2009). Сучасні тенденції розвитку та класифікації електронних тахеометрів. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. Вип. I (170), 109–115. URL: vlp.com.ua/files/20_57.pdf.
- Тревого, І., Горб, А., & Мелешко, О. (2016). Застосування мультистанції Leica MS60 з метою проведення високоточного геопросторового моніторингу. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, (1), 28–32. URL: <http://zgt.com.ua/%d0%b2%d0%b8%d0%bf%d1%83%d1%81%d0%ba-%d1%96-31-2016/>.
- Gargula, T. (2009). A special case of the triangle solution with the law of sines in geodetic application. *Modern achievements of geodesic science and production*, 1(17), 85–91.
- Vivat, A., Tserklevych, A., & Smirnova, O. (2018). A study of devices used for geometric parameter measurement of engineering building construction. *Geodesy, Cartography, and Aerial Photography*, 87, 21–29. URL: <https://doi.org/10.23939/istcgcap2018.01.021>.

Mykhailo FYS¹, Anatolii VIVAT², Anatolii TSERKLEVYCH³, Viktor LOZYNSKYI⁴

^{1,4}Department of Cartography and Geospatial Modelling, Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery Str., 79013, Lviv, Ukraine, e-mail: ¹ Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, ¹ <https://orcid.org/0000-0001-8956-2293>

^{2,3}Department Engineering geodesy, Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine, tel. +38(032)2582387, e-mail: anatolii.y.vivat@lpnu.ua, ³<https://orcid.org/0000-0002-8398-3860/>

ABOUT METRIC AND ANGULAR DEPENDENCIES OF SPATIAL STRAIGHT LINE NOTCHES AND THEIR USE IN ENGINEERING AND GEODETIC WORKS

In applied geodesy tasks, it may be necessary to determine spatial angles. When bringing a 3D design of buildings and structures to the field with the help of an electronic total station (ES), it is important to verify the spatial angles between different elements of building structures such as roof overlaps, inclined anchors, and more, using the characteristic points' spatial coordinates. Modern geodetic instruments provide sufficiently high measurement accuracy (up to 1" and 1 mm, respectively). However, measuring the required angles with surveying instruments is not always possible for various reasons. First of all, it is impossible to place the device at the vertex of an angle if the location is not accessible. This paper develops a method for determining a spatial angle whose vertex is not available for measurement. Methods and results. To achieve this goal, we consider one of the options for its determination through the application of the cosine theorem with preliminary measurement or calculation of adjacent sides and vertical angles. This article also presents an algorithm for solving the problem with an estimation of the accuracy of establishing the required parameters. The basic formulas for determining the angles of a spatial triangle with an estimate of their accuracy are proposed. The paper studies the influence of the linear measurement values of the lengths of the sides on the values of the angles of a spatial triangle with the corresponding accuracy assessment. In particular, the root mean square errors of angle calculation were determined based on these calculations and mathematical modeling, namely, the ratio of the sides of the triangle. Through indirect measurements of the tower crane boom and roof spire, the spatial angle values were determined. The inclination of the crane boom to the base resulted in $\alpha=910.712\pm 51''$, while the angle of the roof spire was $\alpha=150.109\pm 35''$. Scientific novelty and practical significance. On the basis of the proposed methodology and numerical experiments, spatial angles were determined and their a priori accuracy was analyzed. This confirms the influence of linear measurements of side lengths on the values of spatial angles. The obtained results make it possible to apply the proposed method in engineering and geodetic works using BIM technologies in 3D space. This method can be used in the application software of electronic total station manufacturers to determine spatial angles in space when solving engineering problems.

Key words: angular measurements, spatial angle, error, electronic total station, accuracy.

Надійшла 12.04.2023 р.