



✉ Correspondence author

V. I. Havrysh
gavryshvasyl@gmail.com

Article received 26.04.2023 p.

Article accepted 02.05.2023 p.

UDK 004.422:536.24

В. І. Гавриш, Р. Р. Шкраб

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У НЕОДНОРІДНИХ ЕЛЕМЕНТАХ ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЇВ ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а згодом і аналізу температурних режимів у ізотропних просторових середовищах із напівнаскрізними чужорідними включеннями, які піддаються внутрішнім та зовнішнім тепловим навантаженням. Для цього коефіцієнт теплопровідності для таких структур описано єдиним цілим за допомогою асиметричних одиничних функцій, що дає змогу розглядати крайові задачі теплопровідності з одним лінійним та нелінійним диференціальними рівняннями теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами та лінійними і нелінійними крайовими умовами на межових поверхнях середовищ. У випадку нелінійної крайової задачі запроваджено лінеаризуючу функцію, із використанням якої лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови і внаслідок цього отримано частково лінеаризоване диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними та розривними і сингулярними коефіцієнтами відносно лінеаризуючої функції з частково лінеаризованими крайовими умовами. Для остаточної лінеаризації частково лінеаризованих диференціального рівняння та крайових умов виконано апроксимацію температури за однією з просторових координат на межових поверхнях включення кусково-сталими функціями, внаслідок чого як диференціальне рівняння, так і крайові умови стають цілком лінеаризованими. Для розв'язування отриманої лінійної крайової задачі використано метод інтегрального перетворення Ганкеля, внаслідок чого отримано аналітичний розв'язок, який визначає запроваджену лінеаризуючу функцію. Як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів структури від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. Внаслідок цього отримано аналітичні співвідношення у вигляді квадратних рівнянь для визначення розподілу температури у термочутливому шарі з чужорідним напівнаскрізним включенням при зовнішньому нагріванні у вигляді теплового потоку. Виконано числовий аналіз поведінки температури як функції просторових координат для заданих значень геометричних і теплофізичних параметрів. Досліджено вплив чужорідного включення на розподіл температури, якщо матеріалом середовища вибрано кераміку ВК94-І, а включення – срібло. Для визначення числових значень температури в наведених конструкціях, а також аналізу теплообмінних процесів у середині цих конструкцій, зумовлених внутрішніми та зовнішніми тепловими навантаженнями, розроблено програмні засоби, із використанням яких виконано геометричне зображення розподілу температури, залежно від просторових координат. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність розроблених математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у просторових неоднорідних середовищах із внутрішнім та зовнішнім нагріванням реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати такого роду середовища, які піддаються внутрішнім та зовнішнім тепловим навантаженням щодо їх термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле, ізотропне просторове неоднорідне середовище, теплопровідність, конвективний теплообмін, ідеальний тепловий контакт, внутрішнє та зовнішнє нагрівання, тепловий потік, термочутливість, напівнаскрізне чужорідне включення.

Вступ / Introduction

Сучасне суспільство характеризується високим рівнем використання електронних пристроїв сучасної техніки для різноманітних потреб. Їх експлуатують у певних температурних режимах, що вимагають забезпечення надійної роботи, зменшення ваги та габаритів (мініатюризації), збільшення терміну використання. Вимога до компактності пристроїв та їх елементів призводить до концентрації високої потужності тепловиділення. Водночас, постійна експлуатація мікроелектронних пристроїв піддається впливу як внутрішніх теплових потоків, так і зовнішніх. Тому залишається актуальним завданням визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у окремих елементах і вузлах цих пристроїв, оскільки саме температура є вагомим чинником, який значно впливає на їх ефективну роботу.

Нагадаємо, що мікроелектронний пристрій – це технічний засіб цифрових технологій, призначений для отримання та опрацювання інформації. Фізично такі пристрої виготовляють на певних елементних платформах, зокрема електромеханічній (із використанням електромагнітних реле), електронній (із використанням діодів і транзисторів), мікроелектронній (із використанням мікросхем), оптичній. Останнім часом, зважаючи на досягнення мікро- і наноелектроніки, широкого поширення набули цифрові пристрої на мікроелектронній елементній платформі. Це дискретні цифрові автомати, виконані із використанням інтегральних мікросхем і призначені для аналізу даних, поданих у вигляді цифрових кодів. Їх використовують для розроблення цифрових, інформаційних, вимірювальних і систем керування. Зокрема, широко розповсюдженими є стільни-

кові телефони, цифрові фотоапарати, відеокамери та веб-камери, комп'ютери, цифрове телебачення, DVD-програвачі тощо.

Особливого значення для виробництва пристроїв сучасної техніки набувають композитні матеріали, серед яких важливе місце посідають кусково-однорідні структури (шаруваті структури, однорідні та шаруваті структури з чужорідними включеннями), які широко застосовують в інтегральних сенсорах для моніторингу температури та вологості, світловипромінювальних елементах для динамічних світлодіодних підсвіток, температурних перетворювачах, селективних оптичних фільтрах тощо. Проектування наведених складних електронних, оптичних і електромеханічних систем кусково-однорідної структури, які часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, полягає не тільки в покращенні структурних параметрів, але й у забезпеченні їхньої стабільної роботи, високої надійності та теплової стійкості. Із ростом потужностей та інтеграції таких систем ускладнюється проблема термостійкості до теплових навантажень їх конструкцій, які частково або повністю виходять із ладу внаслідок теплових перевантажень.

Об'єкт дослідження – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в ізотропних просторових середовищах, які піддаються внутрішньому та зовнішньому нагріванню та містять чужорідні включення.

Предмет дослідження – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних і аналітично-числових розв'язків відповідних крайових задач для ізотропних просторових неоднорідних середовищ із внутрішнім і зовнішнім нагріванням.

Мета роботи – розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових середовищ із чужорідними включеннями, які піддаються внутрішньому та зовнішньому нагріванню, внаслідок чого є можливість підвищити точність визначення температурних полів, що згодом вплине на ефективність методів проектування пристроїв, окремі елементи та вузли яких є неоднорідної структури і піддаються різної природи тепловим впливам.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямку розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- навести об'єкти дослідження та їх лінійні і нелінійні математичні моделі;
- навести спосіб лінеаризації нелінійної моделі;
- отримати аналітично-числові розв'язки лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності;
- розробити алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних полів у ізотропних просторових середовищах із напівнаскрізними включеннями.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях, привертає увагу багатьох дослідників. Температура відіграє важливу роль для визначення фізичних і хімічних характеристик матеріалів. Цей вплив стає особливо значним, коли є великі коливання температури, як це спостерігається в процесах теплопровідності. Температурні перепади призводять

до певних змін властивостей матеріалу, що ускладнює визначення розподілу температури та термічної напружки. У наслідку, визначення термопружного стану конструкцій стає значно складнішим.

У роботі [1] за допомогою узагальненого методу комплексної змінної досліджено термопружну задачу еліптичної порожнини в нескінченному середовищі. У результаті аналізу термопружного стану середовища враховано температурну залежність коефіцієнта теплопровідності, модуля пружності та коефіцієнта теплового розширення. Із урахуванням цих залежностей, отримано аналітичні вирази для температури, теплового потоку та термопружних полів. Наведено аналітичні вирази розподілу температури, переміщень і напружень у шаруватих прямокутних пластинах із простою опорою, які піддаються термомеханічним навантаженням. Властивості матеріалу шарів залежать від температури [2]. Досліджено термопружні параметри функціонально градуєваних пористих пластин із різним розподілом матеріалу та виявлено, що термічні напруження чутливіші до розподілу матеріалу, ніж температура та деформації [3]. У роботі [4] дослідження спрямовані на визначення впливу температурної залежності властивостей матеріалу та показників композиційного градієнта у функціонально градуєваних прямокутних пластинах щодо температури, деформацій та напружень. Наведено розв'язок для сталого стану реакції товстих циліндрів, які піддаються тиску та зовнішньому тепловому потоку на внутрішній поверхні [5]. Виконано термічний аналіз циліндрів різної товщини, виготовлених із функціонально градуєваних матеріалів, які перебувають під впливом неоднорідних теплових потоків, зосереджених на внутрішніх і зовнішніх шарах [6, 7]. Робота [8] присвячена визначенню розв'язку нестационарної задачі теплопровідності та термоеластичності для функціонально-градієнтних товстих сфер. Теплофізичні та термоеластичні параметри матеріалів, за винятком коефіцієнта Пуассона, є довільними функціями радіальної координати. Розглянуто осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності та термоеластичності для порожнистих функціонально-градієнтних областей відносно джерела тепла.

У працях [9–11] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних і аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних і шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми. У роботах [12, 13] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі. Розглянемо ізотропний шар, який містить чужорідне напівнаскрізне циліндричне включення з радіусом R ,

віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$. В області включення $\Omega_0 = \{(R, \varphi, h) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ зосереджено рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = const$. На межовій поверхні шару $L_+ = \{(r, \varphi, h) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем із температурою $t_c = const$, згідно з законом Ньютона, а інша поверхня шару $L_- = \{(r, \varphi, -l) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ є теплоізоляованою. На межовій поверхні включення $K_R = \{(R, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| \leq h\}$ існує ідеальний тепловий контакт $t_0 = t_1$, $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r}$ для $r = R$ (0 – для включення, 1 – для шару) (рис. 1).

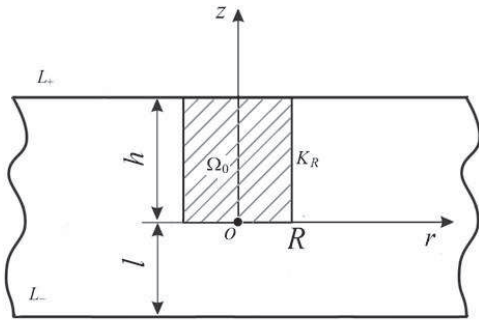


Рис. 1. Переріз ізотропного шару з теплоактивним напівнаскрізним включенням площиною $\varphi = 0$ / Cross-section of an isotropic layer with a thermally active half-through inclusion by a plane

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z , який отримуюмо, розв'язавши рівняння теплопровідності [12, 13].

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r\lambda(r, z) \operatorname{grad} \theta(r, z)] = -q_0 S_-(R-r) S_-(z), \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\alpha \theta(r, z) \Big|_{z=h}; \quad \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0, \quad (2)$$

де $\theta(r, z) = t(r, z) - t_c$;

$$\lambda(r, z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) S_-(R-r) S_-(z), \quad (3)$$

до $\lambda(r, z)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; λ_1, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення, відповідно; α – коефіцієнт тепловіддачі з межової поверхні шару L_+ .

Введемо функцію:

$$T(r, z) = \lambda(r, z) \theta(r, z), \quad (4)$$

і продиференціюємо її за змінними r та z , врахувавши вираз для коефіцієнта теплопровідності $\lambda(r, z)$ (3). Внаслідок цього отримаємо:

$$\lambda(r, z) \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + (\lambda_0 - \lambda_1) \theta(r, z) \Big|_{r=R} \delta_+(r-R) S_-(z),$$

$$\lambda(r, z) \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} - (\lambda_0 - \lambda_1) \theta(r, z) \Big|_{z=0} S_-(R-r) \delta_-(z). \quad (5)$$

$$\text{Тут } S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0, \end{cases}$$

де $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака; $S_{\pm}(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції [14].

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), одержимо диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтам:

$$\Delta T + (\lambda_0 - \lambda_1) F(r, z) = -q_0 S_-(R-r) S_-(z), \quad (6)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат;

$$F(r, z) = \frac{R}{r} \theta(r, z) \Big|_{r=R} \delta'_+(r-R) S_-(z) - \theta(r, z) \Big|_{z=0} S_-(R-r) \delta'_-(z). \quad (7)$$

Внаслідок цього, шукане температурне поле в наведеній системі повністю визначено рівнянням (6) із крайовими умовами (3).

Аналітично-числовий розв'язок. Апроксимуємо функції $\theta(R, z)$, $\theta(r, 0)$ за змінними z та r виразами, відповідно:

$$\theta(R, z) = \theta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) S_-(z - z_i),$$

$$\theta(r, 0) = \theta_1 + \sum_{j=1}^{k-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) S_-(r - r_j), \quad (8)$$

де $z_i \in (0; h)$; $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1}$; $r_j \in (0; R)$; $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{k-1}$; n, k – кількості поділу інтервалів $(0; h)$, $(0; R)$; θ_i ($i = \overline{1, n}$), θ_j ($j = \overline{1, k}$) – невідомі апроксимаційні значення температури $\theta(R, z)$, $\theta(r, 0)$.

Підставивши вирази (8) у співвідношення (6), із урахуванням виразу (7), отримуємо:

$$\Delta T = (\lambda_0 - \lambda_1) F_1(r, z) - q_0 S_-(R-r) S_-(z). \quad (9)$$

Тут

$$F_1(r, z) = \theta(r, 0) S_-(R-r) \delta'_-(z) - \frac{R}{r} \theta(R, z) \delta'_+(r-R) S_-(z).$$

Застосувавши інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (9) та крайових умов (2), із урахуванням співвідношення (4), одержимо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і розривною та сингулярною правою частиною:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \xi^2 \bar{T} = (\lambda_0 - \lambda_1) \left[A \frac{\delta'_-(z)}{\xi} - A(z) S_-(z) \right] - \frac{Rq_0}{\xi} J_1(R\xi) S_-(z) \quad (10)$$

$$\text{і крайових умов } \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=-l} = 0, \quad \frac{d\bar{T}}{dz} \Big|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda_1} \bar{T} \Big|_{z=h}, \quad (11)$$

де $A = R\theta_k J_1(R\xi) - \sum_{j=1}^{k-1} r_j (\theta_{j+1} - \theta_j) J_1(r_j \xi)$;

$$A(z) = R\xi J_1(R\xi) \left[\theta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) S_-(z - z_i) \right];$$

$\bar{T}(\xi, z) = \int_0^{\infty} r J_0(r\xi) T(r, z) dr$ – трансформанта функції T

(r, z) ; $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!(\nu+n)!}$ – функція Бесселя пер-

шого роду ν -го порядку; ξ – параметр інтегрального перетворення Генкеля.

Загальний розв’язок рівняння (10) визначимо методом варіації сталих:

$$\bar{T}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} + (\lambda_0 - \lambda_1) A_3(z) - \frac{Rq_0}{\xi^3} J_1(R\xi) A_1(z),$$

$$\text{де } A_3(z) = A \frac{ch\xi z}{\xi} S_-(z) - \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) [\theta_1 A_1(z) + A_2(z)];$$

$$A_1(z) = (ch\xi z - 1) S_-(z);$$

$$A_2(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) (ch\xi(z - z_i) - 1) S_-(z - z_i).$$

Використавши крайові умови (11), отримаємо розв’язок задачі (10), (11) у вигляді:

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{\xi} \left\{ (\lambda_0 - \lambda_1) [AB_1(z) - RJ_1(R\xi)(B_2(z) + B_3(z))] - \frac{Rq_0}{\xi^2} J_1(R\xi) B_4(z) \right\}. \quad (12)$$

$$\text{Тут } B_1(z) = ch\xi z S_-(z) + B_1 E(z);$$

$$B_2(z) = \theta_1 [(ch\xi z - 1) S_-(z) + B_2 E(z)];$$

$$B_3(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) [(ch\xi(z - z_i) - 1) S_-(z - z_i) + D_i E(z)];$$

$$B_4(z) = (ch\xi z - 1) S_-(z) + B_1 E(z);$$

$$B_1 = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi h + \alpha ch\xi h}{(\lambda_1 \xi + \alpha) e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha) e^{-\xi h}};$$

$$B_2 = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi h + \alpha (ch\xi h - 1)}{(\lambda_1 \xi + \alpha) e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha) e^{-\xi h}};$$

$$E(z) = e^{\xi(z+2l)} - e^{-\xi z};$$

$$D_i = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi(h - z_i) + \alpha (ch\xi(h - z_i) - 1)}{(\lambda_1 \xi + \alpha) e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha) e^{-\xi h}}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (12), одержимо:

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi J_0(r\xi) \bar{T}(\xi, z) d\xi. \quad (13)$$

Невідомі апроксимаційні значення θ_i ($i = \overline{1, n}$) та θ_j ($j = \overline{1, k}$) температури $\theta(R, z)$ і $\theta(r, 0)$ знаходимо, розв’язавши систему $n+k$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (13).

Внаслідок цього, шукаємо температурне поле в шарі з напівнаскрізним теплоактивним циліндричним включенням виражено формулою (13), з якої отримуємо значення температури в довільній точці конструкції “шар-включення”.

Розглянемо ізотропний термочутливий шар, який містить чужорідне напівнаскрізне циліндричне включення з радіусом R , віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$. На межовій поверхні шару в області включення $L_+ = \{(r, \varphi, h): 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ наведену структуру нагрівають зосередженим тепловим потоком, поверхнева густина якого становить $q_0 = const$, а інша поверхня шару $L_- = \{(r, \varphi, -l): 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ є теплоізолюваною. На межовій поверхні включення $K_R = \{(R, \varphi, z): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| \leq h\}$ існує ідеальний тепловий контакт $t_0(R, z) = t_1(R, z)$, $\lambda_0(t) \frac{\partial t_0(r, z)}{\partial r} =$

$= \lambda_1(t) \frac{\partial t_1(r, z)}{\partial r}$ для $r = R$ (0 – для включення, 1 – для шару) (рис. 2).

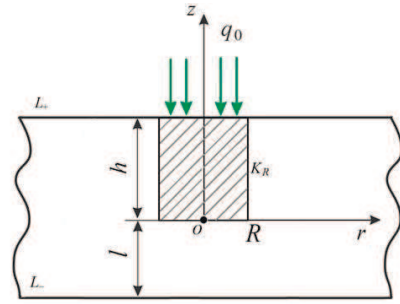


Рис. 2. Переріз ізотропного термочутливого шару з напівнаскрізним включенням площиною $\varphi = 0$, який нагрівається тепловим потоком / Cross-section of an isotropic thermosensitive layer with a half-through inclusion of a plane, which is heated by a heat flow

Із урахуванням термочутливості, розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z у наведеній конструкції отримаємо, розв’язавши нелінійне рівняння теплопровідності [12, 13]:

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r\lambda(r, z, t) \operatorname{grad} t(r, z)] = 0, \quad (14)$$

з крайовими умовами;

$$t(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0, \\ \lambda_0(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = q_0 S_-(R-r), \quad (15)$$

де $\lambda(r, z, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] S_-(R-r) S_-(z)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного термочутливого шару; $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення та шару, відповідно.

Введемо лінеаризуючу функцію:

$$\mathcal{G}(r, z) = \int_0^{t(r, z)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + \left\{ \int_{t(R, z)}^{t(r, z)} [\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta - \int_{t(R, 0)}^{t(r, 0)} [\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta \right\} S_-(R-r) S_-(z), \quad (16)$$

продиференціювавши яку за змінними r та z , отримаємо:

$$\lambda(r, z, t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial r} + \left\{ [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \right\} \Big|_{z=0} S_-(R-r) S_-(z), \\ \lambda(r, z, t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial z} + \left\{ [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t}{\partial z} \right\} \Big|_{r=R} S_-(R-r) S_-(z). \quad (17)$$

Із урахуванням виразів (17), вихідне рівняння (14) набуде такого вигляду:

$$\Delta \mathcal{G} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} S_-(R-r) \right\} \Big|_{z=0} S_-(z) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t}{\partial z} S_-(z) \right\} \Big|_{r=R} S_-(R-r) = 0 \quad (18)$$

Крайові умови (15), із використанням співвідношення, (16) переписемо так:

$$\vartheta(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = \left\{ q_0 - [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right\} \Big|_{z=h}^{r=R} S_-(R-r). \quad (20)$$

Лінеаризуюча функція (16) дала змогу звести нелінійну крайову задачу (14), (15) до частково лінеаризованого диференціального рівняння з частковими похідними другого порядку з розривними коефіцієнтами (18), лінеаризованих крайових умов (19) та частково лінеаризованої крайової умови (20).

Аналітично-числовий розв'язок. Апроксимуємо функції $t(R, z)$ та $t(r, 0)$ виразами:

$$t(R, z) = t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) S_-(z - z_i), \quad (21)$$

$$t(r, 0) = t_1 + \sum_{j=1}^{k-1} (t_{j+1} - t_j) S_-(r - r_j),$$

де $z_i \in (0; h)$; $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1}$; $r_j \in (0; R)$; $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{k-1}$; n, k – кількості поділу інтервалів $(0; h)$, $(0; R)$; $t_i (i = \overline{1, n})$, $t_j (j = \overline{1, k})$ – невідомі апроксимаційні значення температури $t(R, z)$, $t(r, 0)$.

Продиференціюємо співвідношення (21) за змінними z та r , відповідно. Внаслідок отримаємо:

$$\frac{\partial t(R, z)}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \delta_-(z - z_i);$$

$$\frac{\partial t(r, 0)}{\partial r} = \sum_{j=1}^{k-1} (t_{j+1} - t_j) \delta_-(r - r_j).$$

Підставимо ці вирази у співвідношення (18) та (20) і внаслідок цього отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними і розривною та сингулярною правою частиною відносно лінеаризуючої функції (r, z) :

$$\Delta \vartheta = -\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{k-1} r_j (t_{j+1} - t_j) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})] S_-(z) \delta'_-(r - r_j) - \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})] S_-(R-r) \delta'_-(z - z_i), \quad (22)$$

з лінійною крайовою умовою:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=h} = -q_0 S_-(R-r). \quad (23)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (22) та крайових умов (19) і (23), отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною:

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \sum_{i=1}^{n-1} A_i \delta'_-(z - z_i) - \xi A S_-(z) \quad (24)$$

і крайові умови $\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \Big|_{z=-l} = 0, \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \Big|_{z=h} = \frac{R}{\xi} q_0 J_1(R\xi), \quad (25)$

де $\bar{\vartheta}(\xi, z) = \int_0^\infty r \vartheta(\xi, z) J_0(r\xi) dr$ – трансформанта функції $\vartheta(r, z)$;

$$A_i = (t_{i+1} - t_i) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})];$$

$$A = \sum_{j=1}^{k-1} r_j J_1(r_j \xi) (t_{j+1} - t_j) [\lambda_0(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1})].$$

Загальний розв'язок рівняння (24) визначимо у вигляді:

$$\bar{\vartheta}(z) = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z} - \frac{1}{\xi} \left[R J_1(R\xi) \sum_{i=1}^{n-1} A_i ch\xi(z - z_i) S_-(z - z_i) + A(ch\xi z - 1) S_-(z) \right],$$

та, з використанням крайових умов (25), знайдемо сталі інтегрування c_1 і c_2 . Внаслідок цього отримаємо розв'язок задачі (24), (25):

$$\bar{\vartheta}(z) = \frac{1}{\xi} \left[\frac{R q_0}{\xi} J_1(R\xi) P(z) + AB(z) + R J_1(R\xi) \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i(z) \right]. \quad (26)$$

Тут

$$B(z) = P(z) sh\xi h - (ch\xi z - 1) S_-(z);$$

$$B_i(z) = P(z) sh\xi(h - z_i) - ch\xi(z - z_i) S_-(z - z_i);$$

$$P(z) = \frac{ch\xi(z+l)}{sh\xi(h+l)}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (26), визначимо вираз для лінеаризуючої функції $\vartheta(r, z)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \bar{\vartheta}(z) d\xi. \quad (27)$$

Підставивши вирази температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів шару та включення у співвідношення (16), (27), після деяких перетворень отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень $t_i (i = \overline{1, n})$ та $t_j (j = \overline{1, k})$ для температури $t(R, z)$, $t(r, 0)$, відповідно.

Шукане температурне поле $t(r, z)$ для наведеної структури визначаємо за допомогою отриманого нелінійного алгебраїчного рівняння з використанням співвідношень (16), (27), після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів шару від температури.

Частковий приклад та аналіз числових результатів. Розглянемо залежність коефіцієнта теплопровідності від температури у вигляді співвідношення:

$$\lambda = \lambda_m^0 (1 - k_m t), \quad (28)$$

де λ_m^0, k_m – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалів для включення ($m = 0$) та пластики ($m = 1$).

Враховувши співвідношення для лінеаризуючої функції (16), із виразів (27) і (28) отримаємо формули для визначення температури $t(r, z)$ в області включення шару $\{(r, \varphi, z) : r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z \leq h\}$

$$t(r, z) = \frac{1}{k_0} \left(1 - \sqrt{1 - k_0 \left(\frac{2\vartheta(r, z)}{\lambda_0^0} + \vartheta + \vartheta(r) + \vartheta(z) \right)} \right) \quad (29)$$

та в області шару поза включенням

$$\{(r, \varphi, z) : r > R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -l \leq z \leq h\}, \quad (30)$$

де $\vartheta = t_n(\lambda j - t_n k \lambda)$; $\vartheta(r) = t(r, 0)[t(r, 0)k\lambda - \lambda j]$;

$$\vartheta(z) = t(R, z)[t(R, z)k\lambda - \lambda j];$$

$$\lambda_j = 2\left(\frac{\lambda_1^0}{\lambda_0^0} - 1\right); k\lambda = \frac{\lambda_1^0}{\lambda_0^0}(k_1 - k_0).$$

Формули (29) і (30) описують температурне поле в термочутливій конструкції “шар-включення”.

Виконано числовий аналіз безрозмірної температури $t^* = \lambda_0 t / (q_0 R)$ для таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94-І, матеріал включення – срібло, $n = k = 10$ – число поділу інтервалів $(0; h)$, $(0; R)$, відповідно; $h = R = 2$ мм, $l = 0$ мм, $q_0 = 200$ Вт. У інтервалі температур $[20 \text{ C}; 1230 \text{ C}]$ температурні залежності коефіцієнта теплопровідності для наведених матеріалів будуть такими [15]:

$$\lambda_1(t) = 13,67 \frac{\text{Вт}}{\text{град} \cdot \text{м}} \left(1 - 0,00064 \frac{1}{\text{град}} t\right),$$

$$\lambda_0(t) = 422,54 \frac{\text{Вт}}{\text{град} \cdot \text{м}} \left(1 - 0,00031 \frac{1}{\text{град}} t\right), \quad (31)$$

що є частковим випадком співвідношення (28).

Побудовано (рис. 3) залежність безрозмірної температури t^* від просторових безрозмірних радіальної $r^* = r/R$ та аксіальної $z^* = z/R$ координат для лінійно змінного (рис. 3, а) і сталого ($\lambda_1 = 13,4 \text{ Вт}/(\text{град} \cdot \text{м})$, $\lambda_0 = 419 \text{ Вт}/(\text{град} \cdot \text{м})$) [15] (рис. 3, б) коефіцієнта теплопровідності матеріалів структури. Зазначимо, що максимальна температура досягається в області дії зосередженого теплового потоку, що відповідає фізичній моделі.

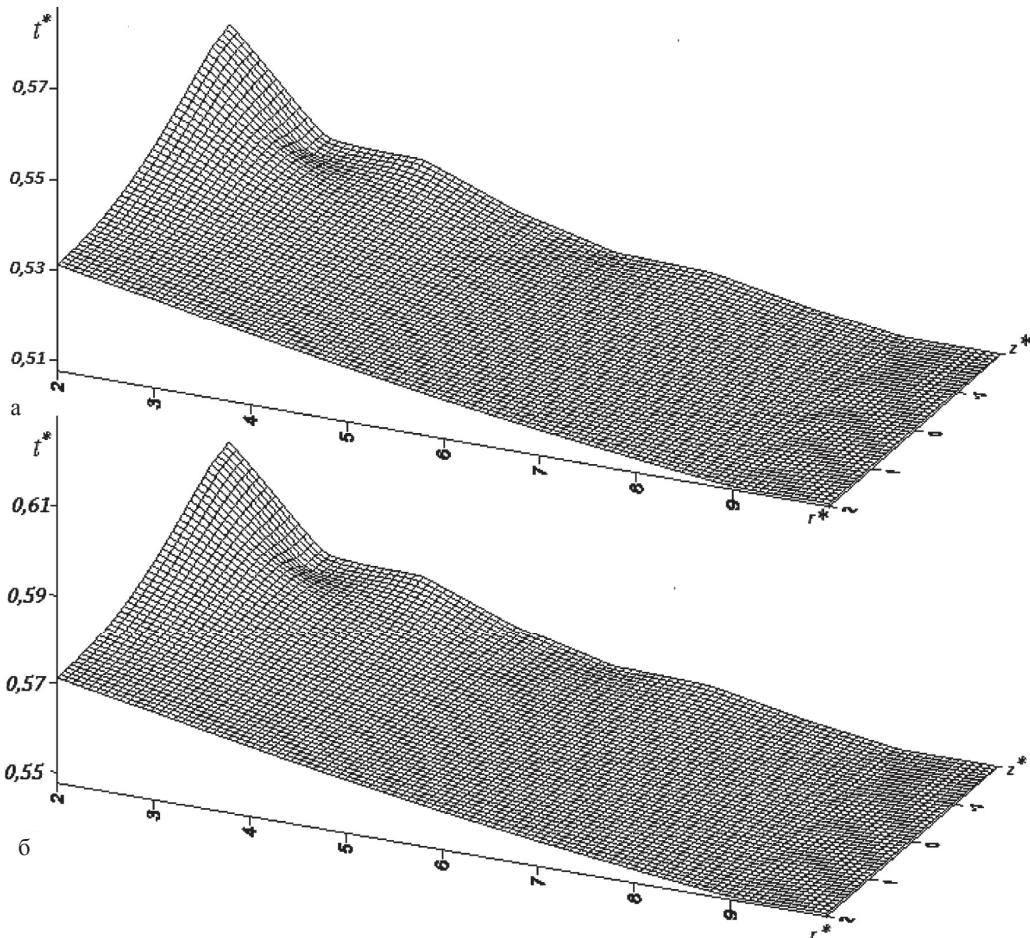


Рис. 3. Залежність температури t^* від координат r^* та z^* для лінійно змінного (а) і сталого (б) коефіцієнта теплопровідності / Dependence of temperature t^* on coordinates r^* and z^* for linearly variable (a) and constant (b) coefficient of thermal conductivity

Число поділу $n = k = 10$ інтервалів $(0; h)$, $(0; R)$, відповідно, для заданих значень теплофізичних (опорний λ_m^0 і температурний k_m коефіцієнти теплопровідності для матеріалів шару ($m = 1$) та включення ($m = 0$)) та геометричних (радіус R та висота включення h , товщина шару $l+h$) параметрів структури дало змогу виконати обчислення з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Отримані результати для вибраних матеріалів за лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури (рис. 3, а) відрізняються від результатів, отриманих для сталого коефіцієнта теплопровідності (рис. 3, б), на 7%. Незначна їх відмінність пояснюється

тим, що значення температурного коефіцієнта теплопровідності для розглянутих матеріалів, як показують співвідношення (17), є невеликими.

Обговорення результатів дослідження. Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися просторові моделі, які б враховували кусково-однорідну структуру середовищ, їх термочутливість та інтенсивні температурні збурення у конструкціях, зумовлені локально зосередженими тепловими джерелами, що призводить до розв’язування лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь із частковими похідними, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геомет-

ричної структури. Наведено способи побудови аналітично-числових розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач теплообміну, які дають змогу аналізувати теплообмінні процеси у неоднорідних вузлах та елементах пристроїв складної геометричної форми (містять напівнаскрізні теплоактивні чужорідні включення), що функціонують у певних температурних режимах, які призводять до термочутливості конструкційних матеріалів. Результати досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування пристроїв сучасної техніки щодо їх термостійкості.

Отже, за результатами роботи можна сформулювати наукову новизну і практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – наведено спосіб лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отримано в замкнутому вигляді аналітично-числові розв'язки відповідних лінійних і нелінійних крайових задач для ізотропних просторових середовищ із напівнаскрізними чужорідними елементами, що піддаються внутрішньому та зовнішньому тепловому нагріванню.

Практична значущість результатів дослідження – на підставі отриманих аналітично-числових розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності для ізотропних просторових неоднорідних середовищ з внутрішнім та зовнішнім нагріванням можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних полів у окремих конструкційних елементах та вузлах електронних пристроїв, що піддаються різної природи тепловим впливам, з метою прогнозувати їхні режими роботи, ідентифікувати невідомі параметри та підвищити термостійкість, що збільшує їх термін експлуатації.

Висновки / Conclusions

У процесі розроблення та дослідження лінійних і нелінійних математичних моделей визначення температурних полів та аналізу температурних режимів, обумовлених локально зосередженими як внутрішніми, так і зовнішніми тепловими джерелами для конструкцій, які геометрично описано ізотропними просторовими структурами з чужорідними включеннями, виявлено незначний вплив врахування термочутливості конструкційних матеріалів на розподіл температури в цих середовищах. Це пояснюється тим, що значення температурного коефіцієнта теплопровідності для розглядуваних матеріалів, який характеризує термочутливість матеріалів на заданому інтервалі температур, як показують співвідношення (17), є невеликим. У подальшому будуть проведені дослідження для низки матеріалів, які використовують у процесі проектування цифрових пристроїв щодо впливу їх термочутливості на розподіл температури з використанням наведених розроблених лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у середовищах із чужорідними напівнаскрізними включеннями. Врахування чужорідних включень у ізотропних середовищах та термочутливості конструкційних матеріалів значно ускладнює процес розв'язування відповідних лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач адекватніше до реального фізичного процесу описують поведінку температури як функції просторових координат.

References

- [1] Haopeng, S., Kunkun, X., & Cunfa, G. (2021). Temperature, thermal flux and thermal stress distribution around an elliptic cavity with temperature-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 216, 136–144. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.010>
- [2] Zhang, Z., Zhou, D., Fang, H., Zhang, J., & Li, X. (2021). Analysis of layered rectangular plates under thermo-mechanical loads considering temperature-dependent material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 92, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.036>
- [3] Gong, J., Xuan, L., Ying, B., & Wang, H. (2019). Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method. *Composite Structures*, 224, 111071. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111071>
- [4] Demirbas, M. D. (2017). Thermal stress analysis of functionally graded plates with temperature-dependent material properties using theory of elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 131, 100–124. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.005>
- [5] Ghannad, M., Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *International Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, Vol. 8, 4, 1–12
- [6] Yaghoobi, M. P., & Ghannad, M. (2020). An analytical solution for heat conduction of FGM cylinders with varying thickness subjected to non-uniform heat flux using a first-order temperature theory and perturbation technique. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 116, 104684. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104684>
- [7] Eker, M., Yarimpabuç, D., & Celebi, K. (2020). Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation. *Engineering Computations*, 38(1), 371–391. <http://dx.doi.org/10.1108/EC-02-2020-0120>
- [8] Bayat, A., Moosavi, H., Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, Vol. 22, Issue 5, 1801–1812.
- [9] Havrysh, V. I., & Grysjuk, Y. I. (2022). Temperature fields in heterogeneous environments with consideration of thermal sensitivity. Lviv: Publishing house of Lviv Politechnic National University, 120.
- [10] Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio electronics, computer science, management*, 3(46), 7–15. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>
- [11] Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanska, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk NHU*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>
- [12] Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliانو, Iu. M. (1984). *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Nauka, 368. [In Russian].
- [13] Koliانو, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka, 280. <https://doi.org/10.1192/bjip.161.2.280b>
- [14] Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 720. [In Russian].
- [15] Kikoina, I. K. (1976). *Tablitsy fizicheskikh velichin*. Spravochnik. Moscow: Atomizdat, 1008. [In Russian].

MATHEMATICAL MODELS FOR THE DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELDS IN HETEROGENEOUS ELEMENTS OF DIGITAL DEVICES TAKING THERMO SENSITIVITY INTO ACCOUNT

Linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field and subsequently analyzing temperature regimes in isotropic spatial media with semi-through foreign inclusions subjected to internal and external thermal loads are developed. For this purpose, the heat transfer coefficient for such structures is described as a single unit using asymmetric unit functions, which makes it possible to consider boundary value problems of heat transfer with one linear and nonlinear differential equations of heat transfer with discontinuous and singular coefficients and linear and nonlinear boundary conditions on the boundary surfaces of the media. In the case of a nonlinear boundary value problem, the introduced linearizing function is used to linearize the original nonlinear heat conduction equation and nonlinear boundary conditions, and as a result, a partially linearized second-order differential equation with partial derivatives and discontinuous and singular coefficients is obtained relative to the linearizing function with partially linearized boundary conditions. For the final linearization of the partially linearized differential equation and boundary conditions, the temperature is approximated by one of the spatial coordinates on the boundary surfaces of the inclusion by piecewise linear functions, as a result of which both the differential equation and boundary conditions become fully linearized. To solve the resulting linear boundary value problem, the Hankel integral transformation method is used, which results in an analytical solution that determines the introduced linearizing function. As an example, the linear dependence of the thermal conductivity coefficient of structural materials of a structure on temperature, which is often used in many practical problems, is chosen. As a result, analytical relations in the form of quadratic equations were obtained to determine the temperature distribution in a thermally sensitive layer with a foreign semi-through inclusion under external heating in the form of a heat flux. A numerical analysis of the temperature behavior as a function of spatial coordinates for given values of geometric and thermophysical parameters is performed. The influence of a foreign inclusion on the temperature distribution is investigated if the VK94-I ceramic is chosen as the material of the medium and the inclusion is silver. To determine the numerical values of temperature in the above structures, as well as to analyze heat transfer processes inside these structures caused by internal and external thermal loads, software tools have been developed that have been used to perform a geometric image of the temperature distribution depending on spatial coordinates. The obtained numerical temperature values indicate that the developed mathematical models for analyzing heat transfer processes in spatially heterogeneous environments with internal and external heating correspond to a real physical process. The software also makes it possible to analyze such environments subjected to internal and external thermal loads in terms of their thermal resistance. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can cause the destruction of not only individual elements but also the entire structure.

Keywords: temperature field, isotropic spatial inhomogeneous medium, thermal conductivity, convective heat transfer, perfect thermal contact, local internal and external heating, heat flow, thermal sensitivity, half-through foreign inclusion.

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

Email: gavryshvasyl@gmail.com; <http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Шкраб Роман Романович, асистент, кафедра програмного забезпечення.

Email: rrshkab@gmail.com

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Шкраб Р. Р. Математичні моделі визначення температурних полів у неоднорідних елементах цифрових пристроїв із урахуванням термочутливості. *Український журнал інформаційних технологій*. 2023. Т. 5, № 1. С. 17–24.

Citation APA: Havrysh, V. I., Shkrab, R. R. (2023). Mathematical models for the determination of temperature fields in heterogeneous elements of digital devices taking thermo sensitivity into account. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 5(1), 17–24. <https://doi.org/10.23939/ujit2023.01.017>