ІНФОКОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЕЛЕКТРОННА ІНЖЕНЕРІЯ
INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES, ELECTRONIC ENGINEERING

№ 2 (1), 2022

https://doi.org/10.23939/ictee2022.01.019

ПОБУДОВА ФРАКТАЛЬНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ТИПУ “КАНТОРІВ ПИЛ” З ВИКОРИСТАННЯМ РАНДОМІЗОВАНОЇ СИСТЕМИ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

О. Юнак, Б. Стрихалюк, М. Климаш, О. Шпур

Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Відповідальний за рукопис: Остап Юнак (e-mail: ostap.yunak@gmail.com).

(Подано 21 Липня 2022)

У статті розглянуто результати розроблення алгоритму визначення кількості пікселів фрактального зображення типу “фрактальний пил” (набір Кантора), утвореного за допомогою РСІФ, обмеженого роздільною здатністю. Виведено математичні формули та схеми для розрахунку кількості пікселів фрактального зображення та кількості ітерацій фрактала RSIF. Цей алгоритм полягає у знаходженні формул залежно від кількості фігур першої ітерації, коефіцієнтів подібності та роздільної здатності. Це дає можливість визначити кількість пікселів для фрактального зображення із різною роздільною здатністю. Алгоритм розрахунку не використовує входження циклу в цикл та рекурсивних функцій і є доволі оптимізованим, що дає можливість не витрачати великих обчислювальних потужностей. Використання формул надалі дасть змогу визначити кількість випадкових подій (стохастичного руху точки) для забезпечення якості відтворюваного зображення за допомогою РСІФ, сформувати вихідний набір даних для нейронних мереж, що буде покладено в основу розпізнавання об’єктів.

Ключові слова: *рандомізована система повторюваних функцій (РСІФ); набір Кантора; фрактал.*
УДК: 621

1. Вступ

У разі використання рандомізованого алгоритму немає необхідності зберігати великі масиви даних у пам’яті. Тому цей алгоритм зручно використовувати на комп’ютерах з обмеженими ресурсами. Перевага РСІФ також полягає у тому, що початковий набір становить лише одну точку. Для побудови фракталів за допомогою РСІФ виконує розрахунок на кожному кроці координати однієї точки для виведення її екран [1, с. 102–103]. Для цього потрібно розрахувати кількість операцій, яка прямо залежить від кількості пікселів фрактального зображення [2, с. 68–71, 3–5]. Використання формул надалі дасть змогу визначити кількість випадкових подій (стохастичного руху точки), створити javascript бібліотеки стискання та відтворення зображення типу “канторів пил” на основі рандомізованої системи ітераційних функцій.

2. Побудова фрактального зображення типу “канторів пил”, утвореного за допомогою рандомізованої системи ітераційних функцій (РСІФ)

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт подібності однаковий для осей X і Y та для всіх фігур першої ітерації.

Для початку обмежимо зображення квадратом довжиною L, подібно як у [6].

Спробуємо відобразити першу, другу ітерації трикутника та квадрата Серпінського [7–9] (рис. 1, 2).

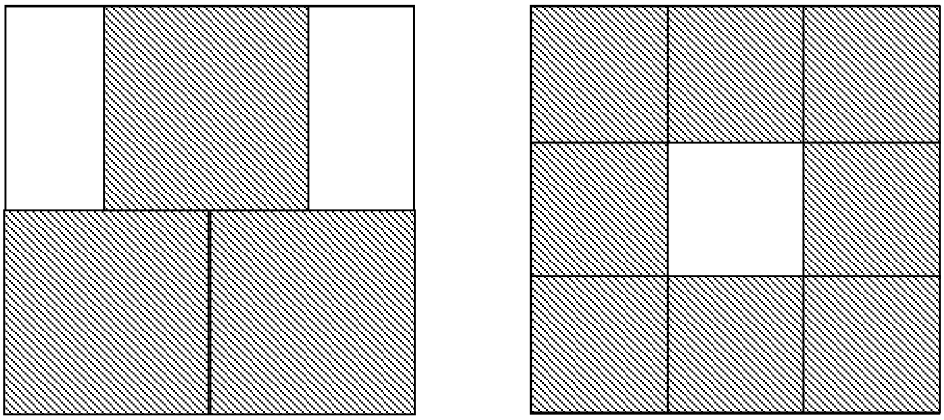

Рис. 1. Зображення першої ітерації трикутника та квадрата Серпінського

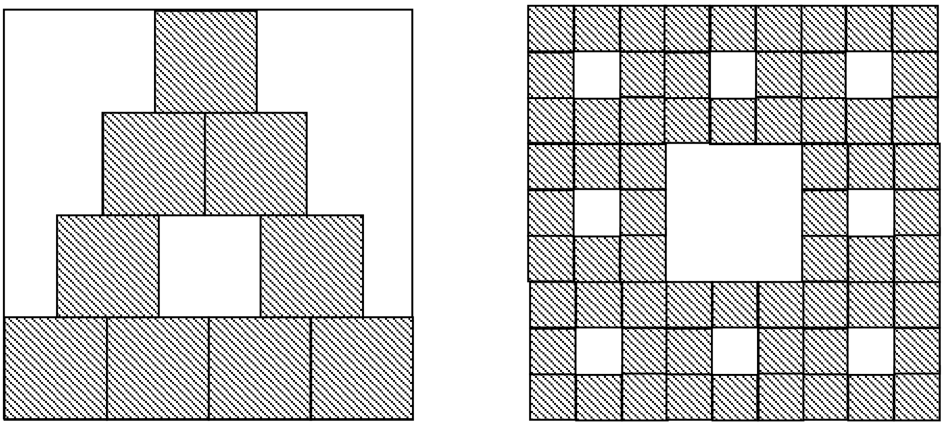

Рис. 2. Зображення другої ітерації трикутника та квадрата Серпінського

Нехай сторона квадрата першої ітерації дорівнює l. Розрахуємо коефіцієнт пропорційності:

$$K = \frac{L}{l}, \tag{1}$$

де K – коефіцієнт пропорційності.

Спробуємо визначити співвідношення між кількістю точок фігур першої ітерації та точок квадрата, який їх обмежує:

$$\frac{N_{\phi_1}}{N} = \frac{n \cdot N_0}{N}, \tag{2}$$

де N_{ϕ_1} – кількість точок першої ітерації фрактала; N – кількість точок у квадраті, який обмежує; n – кількість фігур першої ітерації; N_n – кількість точок у фігурі першої ітерації.

Розрахуємо кількість точок у цьому квадраті:

$$N = L^2. \tag{3}$$

Розрахуємо кількість точок у фігурі першої ітерації:

$$N_0 = l^2. \tag{4}$$

Підставимо вирази (3) і (4) у вираз (2):

$$\frac{N_{\phi 1}}{N}=\frac{n\cdot N_0}{N}=\frac{n\cdot l^2}{L^2}. \tag{5}$$

Підставимо вирази (1) у вираз (5):

$$\frac{N_{\phi 1}}{N}=\frac{n\cdot l^2}{L^2}=\frac{n}{\frac{L^2}{l^2}}=\frac{n}{\left(\frac{L}{l}\right)^2}=\frac{n}{K^2}. \tag{6}$$

Спробуємо визначити співвідношення між кількістю точок фігур з більшою кількістю ітерацій і точок квадрата, який їх обмежує:

$$\frac{N_{\phi}}{N}=\left(\frac{n}{K^2}\right)^I, \tag{7}$$

де I – кількість ітерацій фрактала; N_{ϕ} – кількість точок фрактала.

Як видно з виразу (7), кількість точок фрактала дорівнює:

$$N_{\phi}=N\cdot\left(\frac{n}{K^2}\right)^I=L^2\cdot\left(\frac{n}{K^2}\right)^I. \tag{8}$$

Для визначення кількості ітерацій потрібно взяти довжину відрізка L, поділити її на коефіцієнт пропорційності, після чого взяти один із отриманих відрізків і знову поділити на коефіцієнт пропорційності, й робити так, поки довжина отриманого відрізка становитиме l точок (пікселів). Кількість ділень і буде кількістю ітерацій:

$$\frac{L}{K^I}=1, \tag{9}$$

$$L=K^I, \tag{10}$$

$$I=\log_K L. \tag{11}$$

Підставимо вирази (11) у вираз (8) та знайдемо кількість точок фрактала:

$$N_{\phi}=L^2\cdot\left(\frac{n}{K^2}\right)^{\log_K L} \tag{12}$$

Алгоритм визначення кількості пікселів за однакових коефіцієнтів подібності подано на рис. 3.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт подібності різний для осей X і Y та для всіх фігур першої ітерації теж різний. Для початку обмежимо зображення прямокутником зі сторонами L_X та L_Y. Нехай сторони n-прямокутника першої ітерації – l_{X_n}, l_{Y_n} (різні для кожного прямокутника першої ітерації). Розрахуємо коефіцієнт пропорційності:

$$K_{X_n}=\frac{L_X}{l_{X_n}}, \tag{13}$$

$$K_{Y_n}=\frac{L_Y}{l_{Y_n}}, \tag{14}$$

де K_{X_n}, K_{Y_n} – коефіцієнти пропорційності по осях X та Y n-прямокутника першої ітерації.

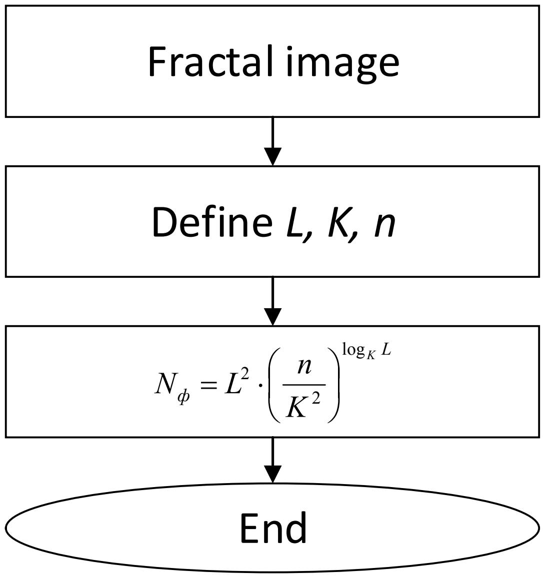

Рис. 3. Алгоритм визначення кількості пікселів
за однакових коефіцієнтів подібності

Спробуємо визначити співвідношення між кількістю точок фігур першої ітерації та точок прямокутника, який їх обмежує:

$$\frac{N_{\phi_1}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{N}, \tag{15}$$

де N_i – кількість точок у фігурі першої ітерації.

Розрахуємо кількість точок у прямокутнику, що обмежує:

$$N = L_X * L_Y. \tag{16}$$

Розрахуємо кількість точок у фігурі першої ітерації:

$$N_l = l_{X_n} * l_{Y_n}. \tag{17}$$

Підставимо вирази (16) і (17) у вираз (15):

$$\frac{N_{\phi_1}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_{X_i} \cdot l_{Y_i}}{L_{X_i} \cdot L_{Y_i}}. \tag{18}$$

Підставимо вирази (13) і (14) у вираз (18):

$$\frac{N_{\phi_1}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_{X_i} * l_{Y_i}}{L_{X_i} * L_{Y_i}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K_{X_i} * K_{Y_i}} \right). \tag{19}$$

Спробуємо визначити співвідношення між кількістю точок фігур з більшою кількістю ітерацій і точок прямокутника, який їх обмежує:

$$\frac{N_{\phi}}{N} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K_{X_i} * K_{Y_i}} \right) \right)^{I}. \tag{20}$$

Як видно із виразу (20), кількість точок фрактала дорівнює:

$$N_{\phi} = N * \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K_{X_i} * K_{Y_i}} \right) \right)^{I} = L_X * L_Y * \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K_{X_i} * K_{Y_i}} \right) \right)^{I}. \quad (21)$$

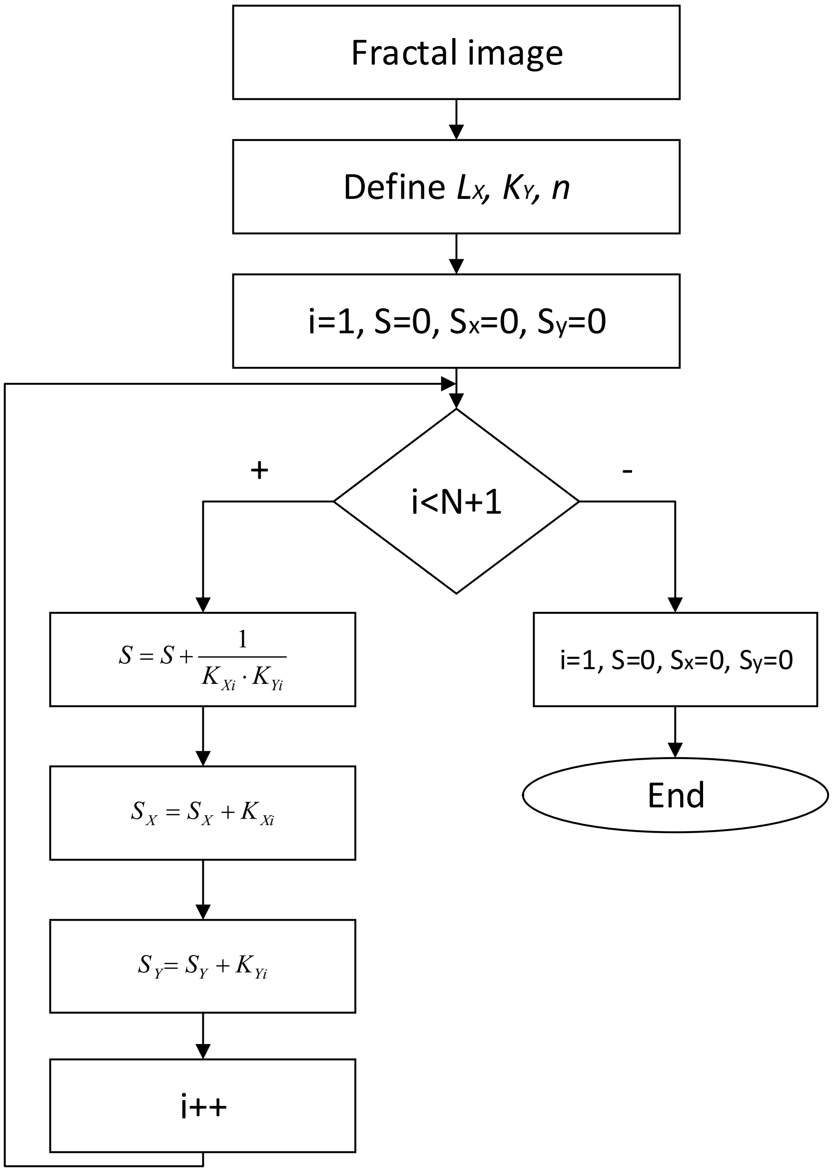

Рис. 4. Алгоритм визначення кількості пікселів за різних коефіцієнтів подібності

Тепер визначимо кількість ітерацій:

$$\frac{L_X \cdot L_Y}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(K_{X_i} \right)}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(K_{Y_i} \right)}{n} \right)^{I}} = 1, \quad (22)$$

$$L_X \cdot L_Y = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(K_{X_i} \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(K_{Y_i} \right)}{n^2} \right)^I, \tag{23}$$

$$I = \log_{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(K_{X_i} \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(K_{Y_i} \right)}{n^2}} L_X \cdot L_Y. \tag{24}$$

Підставимо вираз (24) у вираз (21) та знайдемо кількість точок фрактала:

$$N_\phi = L_X \cdot L_Y \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K_{Xi} \cdot K_{Yi}} \right) \right)^{\log_{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(K_{X_i} \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(K_{Y_i} \right)}{n^2} \right)} L_X \cdot L_Y}. \tag{25}$$

Алгоритм визначення кількості пікселів за різних коефіцієнтів подібності подано на рис. 4.

Висновки

Сьогодні фрактальні структури дуже поширені в різних галузях науки і техніки, але інструментів для моделювання фрактальних структур дуже мало. Розроблення інструменту для побудови фрактальних структур передбачає складні математичні обчислення. Алгоритм визначення пікселів фрактального забраження типу “Канторів пил” дасть змогу спростити побудову фрактальних зображень. Цей алгоритм розрахунку не використовує входження циклу в цикл та рекурсивних функцій і є доволі оптимізованим, що дає змогу не витрачати великих обчислювальних потужностей. Використання формул надалі дасть змогу визначити кількість випадкових подій для забезпечення якості відтворюваного зображення за допомогою РСІФ, створити автоматизовану систему стискання та відтворення зображень, сформувати вихідний набір даних для навчання нейронних мереж, що можна покласти в основу розпізнавання фрактальних об’єктів.

Список використаних джерел

[1] *Кроновер Р. М. (2000), “Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории”, Москва: Постмаркет, 352 с.*

[2] *Федер Е. (1991), “Фракталы”: пер. с англ., Москва: Мир, 254 с.*

[3] *Деменок С. Л. (2012), “Просто фрактал”, Санкт-Петербург: ООО “Страта”, 168 с.*

[4] *Yunak O., Shpur O., Strykhaliuk B., Klymash M. (2021), “Algorithm forming randomized system of iterative functions by based cantor structure”, Information and communication technologies, electronic engineering, No. 1 (2), pp. 71–80.*

[5] *Мандельброт Б. (2002), “Фрактальная геометрия природы”, Москва: Институт компьютерных исследований, 656 с.*

[6] *Юнак О. М., Пелещак Б. М., Охремчук Н. Л., Метлевич Я. Р. (2016), “Перетворення зображення фрактальної структури типу “Фрактальний пил” (Множина Кантора) в рандомізовану систему ітераційних фуній”, XII Міжнародна наук.-практ. конференція “Последните постижения на Европейската наука – 2016”, Т. 13. София “Бял ГРАД-БГ” ООД, 90 с.*

[7] *Мандельброт Б. Б. (2009), “Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса”, Москва – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 392 с.*

[8] *Кроновер Р. М. (2000), “Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории”, Москва: Постмаркет, 352 с.*

[9] *Пайтген, Х.-О., Рихтер П. Х. (1993), “Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем”: пер. с англ., Москва: Мир,176 с.*

CONSTRUCTION OF THE FRACTAL IMAGE OF THE "CANTOR DUST" TYPE, USING A RANDOMIZED SYSTEM OF ITERATING FUNCTIONS

O. Yunak, B. Strykhaliuk, M. Klymash, O. Shpur

Lviv Polytechnik National University, 12, S. Bandery str., Lviv, 79013,Ukraine

The article examines the results of the development of an algorithm for determining the number of pixels of a fractal image of the "Fractal dust" type (Cantor's set) created using resolution-limited RSIF. Mathematical formulas and schemes for calculating the number of pixels of the fractal image and the number of iterations of the RSIF fractal have been derived. This algorithm consists in finding formulas depending on the number of figures of the first iteration, similarity coefficients, and resolution. This makes it possible to determine the number of pixels for an existing fractal image with different resolutions. The calculation algorithm does not use the entry of a loop into a loop and recursive functions, and is quite optimized, which allows without spending a lot of computing power. The use of formulas in the future will make it possible to determine the number of random events (stochastic movement of a point), to ensure the quality of the reproduced image using RSIF, will make it possible to form an initial data set for neural networks, which will form the basis of object recognition.

Key words: *randomized system of iterated functions (RSIF); Cantor set; fractal.*