

Олена Станкевич¹

¹Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет Львівська політехніка, вул. Степана Бандери 12, Львів, Україна, E-mail: olena.m.stankevych@lpnu.ua, ORCID 0000-0002-5977-6351

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АКУСТИЧНОЇ ЕМІСІЇ ВІД ТРІЩИНИ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

Отримано: серпень 28, 2023 / Переглянуто: вересень 28, 2023 / Прийнято: жовтень 10, 2023

© Станкевич О., 2023

<https://doi.org/>

Анотація. Розв'язано динамічну задачу визначення хвильового поля переміщень на поверхні пружного півпростору, спричиненого розкриттям внутрішньої тріщини поперечного (радіального) зсуву. За допомогою методу крайових інтегральних рівнянь встановлено залежності амплітудно-частотних характеристик пружних коливань на поверхні твердого тіла від розмірів дефекту, глибини його залягання та відстані від епіцентру до точки спостереження.

Ключові слова: акустична емісія, тріщина поперечного зсуву, граничні інтегральні рівняння

Вступ та огляд джерел за темою публікації

За тривалої експлуатації під дією зовнішніх навантажень та інших експлуатаційних чинників у структурі конструкційних матеріалів виникають різноманітні дефекти, зокрема, тріщини, які зменшують довговічність конструкції та можуть призвести до її передчасного руйнування. Одним із популярних методів технічної діагностики конструкцій та виробів є метод акустичної емісії (АЕ) [1]. Він дає змогу виявляти дефекти структури матеріалу під час їх утворення та розвитку за реєстрацією пружних хвиль, які поширюючись у твердому тілі спричиняють коливання його поверхні. Аналіз та опрацювання коливань поверхні у вигляді електричних сигналів дають можливість ідентифікувати стадії руйнування конструкційного матеріалу, а відтак прогнозувати залишковий ресурс конструкції загалом.

Серед підходів до математичного моделювання утворення та поширення тріщин вирізняють динамічний підхід, який всебічно відображає ці процеси [2]. У більшості відомих у літературі результатів моделювали поля переміщень для тріщин різної конфігурації та розташування у безмежному просторі [1, 3, 4]. Натомість урахування зовнішньої вільної поверхні тіла дає змогу коректніше описати фізичні явища.

Ефективним для розв'язування тривимірних динамічних задач для тіл із тріщинами і включеннями є метод крайових інтегральних рівнянь (КІР) [5]. Раніше за допомогою цього методу нами розв'язано тривимірні динамічні задачі для однорідних тіл із тріщинами нормального відриву та поздовжнього зсуву (скруту) [6, 7] у півбезмежному просторі. Водночас, за умови дії на виріб чи конструкцію поперечних зусиль у матеріалі можуть виникати тріщини поперечного зсуву.

Мета досліджень – побудувати математичну модель поширення пружних хвиль АЕ внаслідок розкриття у твердому тілі тріщини поперечного зсуву.

Постановка задачі

Нехай у пружному ізотропному півпросторі з густиною ρ , модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν розташована дископодібна тріщина радіуса a , яка займає область S_1 , паралельну до

поверхні S_0 тіла та розташована на глибині d (Рис. 1). Вибір декартових систем координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$ ($k = 0,1$) показано на рис. 1. Акустична емісія породжується зміщенням протилежних поверхонь S_1^\pm тріщини під дією самозрівноважених усталених у часі зсувних (радіальних) зусиль $N_2(x,t) = \hat{N}_2(x) \exp(-i\omega t)$

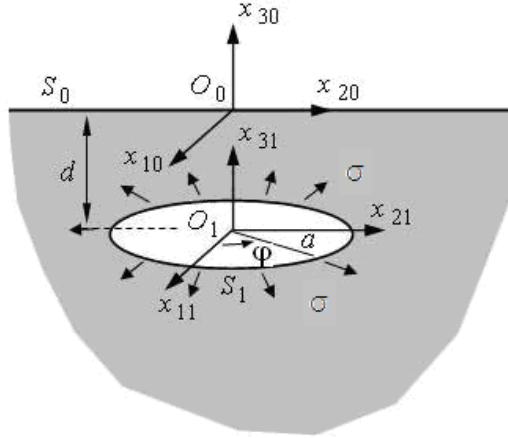


Рис. 1. Схема зміщення поверхонь тріщини у півпросторі

Водночас контур тріщини вважаємо нерухомим, а контакт її поверхонь під час зміщення відсутній.

Для визначення хвильового поля переміщень на поверхні тіла в перетвореннях Фур'є за часом з врахуванням принципу причинності і нульових початкових умов необхідно розв'язати диференціальне рівняння руху відносно компонент вектора пружних переміщень $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$

$$\omega_2^{-2} \Delta_3 \tilde{\mathbf{u}} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}) \text{grad div } \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (1)$$

з крайовими умовами на поверхні півпростору

$$\tilde{\sigma}_{j3}(x, \omega) = 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad x \in S_0, \quad (2)$$

і поверхнях тріщини

$$\tilde{u}_j(x, \omega) = \tilde{U}_j(x, \omega), \quad j = \overline{1,3}, \quad x \in S_1, \quad (3)$$

Тут $\Delta_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – тривимірний оператор Лапласа; $\tilde{u}_j, \tilde{\sigma}_{j3}$ – Фур'є-трансформанти

амплітудних значень компонент вектора переміщень u_j і тензора напружень $\tilde{\sigma}_{j3}$; ω – параметр інтегрального перетворення (частота коливань); $\omega_n = \omega/c_n$; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$, $c_1 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} c_2$ – швидкості поширення у тілі поперечної і поздовжньої пружних хвиль. Розглядали стаціонарний у часі процес, тому початкові умови відсутні.

У крайових умовах (3) функціями $\tilde{U}_j(x, \omega)$ задавали зміщення поверхонь тріщини у вигляді стрибка переміщень точок протилежних поверхонь дефекту

$$U_j(x, \omega) = \Delta \tilde{u}_{j1}(x, \omega) = [\tilde{u}_{j1}^-(x, \omega) - \tilde{u}_{j1}^+(x, \omega)] / 4\pi, \quad j = \overline{1,3}, \quad x \in S_1$$

Виклад основного матеріалу

Для математичного розв'язання задачі використали метод КІР. Розв'язок рівняння (1) запишемо у формі Гельмгольца через скалярний та векторний потенціали, які вибирали за результатами праць [8–10]:

$$\tilde{\varphi} = \frac{2}{\omega_2^2} \left\{ \left(\Delta + \frac{\omega_2^2}{2} \right) P_{11} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial P_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} \right) \right\},$$

$$\psi_j = (-1)^{j+1} \frac{2}{\omega_2^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)}} \left(\frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{\omega_2^2}{2} P_{(3-j)2} + \frac{\partial^2 P_{32}}{\partial x_{(3-j)} \partial x_3} \right\} \quad j=1,2, \quad \psi_3 = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – двовимірний оператор Лапласа; $P_{jk}(x) = \iint_S \Delta \tilde{u}_j(\xi) \Phi_k(x, \xi) dS_\xi$,

$\Phi_k(x, \xi) = \frac{\exp(i\omega_k |x - \xi|)}{|x - \xi|}$, $j = \overline{1,3}$, $k = 1,2$ – потенціали Гельмгольца; $i = \sqrt{-1}$ уявна одиниця. Тут

$|x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}$ – відстань між точками $x(x_1, x_2, x_3)$ і $\xi(\xi_1, \xi_2, 0)$. Густини $\Delta \tilde{u}_j$ потенціалів характеризують стрибок зміщень точок протилежних поверхонь тріщини.

Переміщення \vec{u} у довільній точці x_n тіла є сумою переміщень \vec{u}_n , спричинених зміщенням поверхонь дефекту, і переміщень \vec{u}_0 від коливання точок поверхні півпростору

$$\vec{u}_n(x_n) = \vec{u}_1(x_n) + \vec{u}_0(x_n), \quad (4)$$

Після виконання послідовності відповідних підстановок потенціали Гельмгольца набувають вигляду

$$P_{jlk n}(x_n) = \iint_S \Delta \tilde{u}_{jn}(\xi) \Phi_l(x_{kn}, \xi) dS_\xi, \quad \Phi_l(x_{kn}, \xi) = \frac{\exp(i\omega_l |x_{kn} - \xi|)}{|x_{kn} - \xi|},$$

$$j = \overline{1,3}, l = 1, 2, k, n = 0, 1$$

де невідомі густини $\Delta \tilde{u}_{j0}$ характеризують умовні переміщення точок поверхні S_0 півпростору, $\Delta \tilde{u}_{j01}$ – відомі (задані) функції зміщення поверхонь тріщини.

Для визначення $\Delta \tilde{u}_{j0}$ задовольняємо крайові умови на поверхні S_0 півпростору (3) і отримуємо систему трьох двовимірних КІР відносно невідомих густин $\Delta \tilde{u}_{j0}$:

$$\Delta_{20} \left(\Delta_{20} + \omega_1^2 \right) \iint_{S_0} \Delta u_{j0}(\xi) \frac{\exp(i\omega_1 |x_0 - \xi|)}{|x_0 - \xi|} dS_\xi -$$

$$- \left(\Delta_{20} + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 \iint_{S_0} \Delta u_{j0}(\xi) \frac{\exp(i\omega_2 |x_0 - \xi|)}{|x_0 - \xi|} dS_\xi = -B_j(x_0), \quad j=1,2, \quad (5)$$

$$\Delta_{20} (\Delta_{20} + \omega_2^2) \iint_{S_0} \Delta u_{30}(\xi) \frac{\exp(i\omega_1 |x_0 - \xi|)}{|x_0 - \xi|} dS_\xi -$$

$$- \left(\Delta_{20} + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 \iint_{S_0} \Delta u_{30}(\xi) \frac{\exp(i\omega_2 |x_0 - \xi|)}{|x_0 - \xi|} dS_\xi = -B_3(x_0), \quad x_0 \in S_0,$$

де

$$B_j(x_0) = \Delta_{210} \left(\Delta_{210} + \omega_1^2 \right) P_{1110} - \left(\Delta_{210} + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 P_{1210} + \left(\Delta_{210} + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{310}} (P_{3110} - P_{3210}), \quad j=1,2,$$

$$B_3(x_0) = - \left(\Delta_{210} + \frac{\omega_2^2}{2} \right) \frac{\partial W_{10}}{\partial x_{310}} + \Delta_{210} \left(\Delta_{210} + \omega_2^2 \right) P_{3210} - \left(\Delta_{210} + \frac{\omega_2^2}{2} \right)^2 P_{3110},$$

$$P_{jn10}(\mathbf{x}_{10}) = \iint_{S_1} \Delta u_{j1}(\xi) \Phi_n(\mathbf{x}_{10}, \xi) dS_\xi, \quad j=\overline{1,3}, \quad n=1,2.$$

Застосувавши до системи КІР (5) двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_1, x_2 отримали систему лінійних алгебричних рівнянь відносно Фур'є-трансформант функцій $\Delta \tilde{u}_{j0}$. Розв'язавши систему лінійних рівнянь та застосувавши до її розв'язків обернене перетворення Фур'є, отримали інтегральні представлення для густин Δu_{j0} через відомі функції зміщення поверхонь тріщини у вигляді

$$\Delta u_{j0}(\zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{\tau}{R(\tau)} J_0(\tau|\zeta - \eta|) \sum_{n=1}^3 a_{jn} B_n d\tau dS_\eta, \quad j=\overline{1,3}, \quad (6)$$

$$a_{11} = a_{22} = R_2(\tau), \quad a_{33} = R_1(\tau), \quad a_{jn} = 0, \quad j \neq n, \quad R_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_j^2}, \quad j=1,2; \quad R_3(\tau) = \tau^2 - \frac{\omega_2^2}{2}$$

$$R_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 + \omega_j^2}, \quad j=1,2; \quad R_3(\tau) = \tau^2 - \frac{\omega_2^2}{2}; \quad R(\tau) = R_3^2(\tau) - \tau^2 R_1(\tau) R_2(\tau), \quad \tau = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

Поява у знаменнику виразів (6) функції $R(\tau)$ вказує на те, що у півпросторі, окрім об'ємних пружних хвиль, виникає поверхнева хвиля Релея.

На наступному етапі розв'язування задачі підставляємо співвідношення (6) у вирази для переміщень та визначаємо переміщення на поверхні півпростору.

Результати та обговорення

Опишемо функції зміщення поверхонь тріщини залежностями

$$\Delta u_{11}(x) = \sqrt{a^2 - r^2} r \cos \varphi, \quad \Delta u_{21}(x) = \sqrt{a^2 - r^2} r \sin \varphi.$$

Виконавши відповідні підстановки та провівши інтегрування по круговій області розташування дефекту, отримаємо вирази для переміщень

$$u_r(r^*, \omega) = -\frac{8\pi a^2}{\omega_2^2} \int_0^\infty \frac{\Omega_r(\tau)}{R(\tau)} M(\tau) J_1(\tau r^*) d\tau,$$

$$u_3(r^*, \omega) = 4\pi a^2 \int_0^\infty \frac{\Omega_3(\tau)}{R(\tau)} M(\tau) J_0(\tau r^*) d\tau,$$

$$\Omega_r(\tau) = \tau R_3(\tau) [R_3(\tau) - R_1(\tau) R_2(\tau)] [e^{-dR_1(\tau)} - e^{-dR_2(\tau)}], \quad (7)$$

$$\Omega_3(\tau) = R_1(\tau) R_3(\tau) [e^{-dR_1(\tau)} - e^{-dR_2(\tau)}],$$

$$M(\tau) = \left\{ \left(\frac{3}{a^2 \tau^2} - 1 \right) \sin a\tau - \frac{3}{a\tau} \cos a\tau \right\} [e^{-dR_1(\tau)} - e^{-dR_2(\tau)}].$$

Під час виведення співвідношень (7) використано табличні значення інтегралів та представлення функції Бесселя [11]

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\left(\frac{3}{a^2 \tau^2} - 1 \right) \sin a\tau - \frac{3}{a\tau} \cos a\tau \right]$$

На рис. 2 представлено залежності амплітудних нормованих значень вертикальних $\left| \frac{u_3}{a} \right|$ і горизонтальних $\left| \frac{u_r}{a} \right|$ переміщень від хвильового числа $\omega_2 a$ за глибини залягання тріщини $d = 2a$, відстані від епіцентру до точки спостереження на поверхні півпростору $r^* = 8a$. Розрахунки виконали для розмірів тріщини $R_T = a, 2a, 4a$. Залежності починаються від статичних значень

Математична модель акустичної емісії від тріщини поперечного зсуву

переміщень для $\omega_2 a = 0$, потім зростають і набувають осцилюючого характеру подібно до випадку тріщини нормального відриву [7]. Зростання розмірів тріщини призводить до збільшення величини переміщень та зменшення кількості осциляцій на проміжку $\omega_2 a < 4$. За $\omega_2 a < 4$ для розглянутих розмірів тріщини кількість осциляцій зменшується і набуває замикаючого характеру. Зі збільшенням розмірів дефекту відбувається зменшення величини приведеної частоти, за якої амплітуди переміщень досягають максимальних значень. Також зауважимо, що амплітудні значення переміщень на поверхні півпростору за зміщення протилежних поверхонь тріщини у радіальному напрямку перевищують свої аналоги у випадку тріщини нормального відриву в 3 – 10 разів [7].

На рис. 3 та рис. 4 показано часові залежності вертикальних і радіальних переміщень точок для випадку, коли зміщення поверхонь тріщини описується в часі функцією Хевісайда.

Рис. 3 ілюструє часову залежність переміщень від глибини залягання дефекту у тілі, які відбуваються в епіцентрі тріщини. Суцільні лінії на рисунку відповідають випадку півпростору, штрихові – безмежного тіла. Із графіків видно, що після приходу в точку спостереження поздовжньої хвилі переміщення спадають, осцилюючи, а після приходу поперечної хвилі – зростають, досягаючи найбільшого додатного значення.

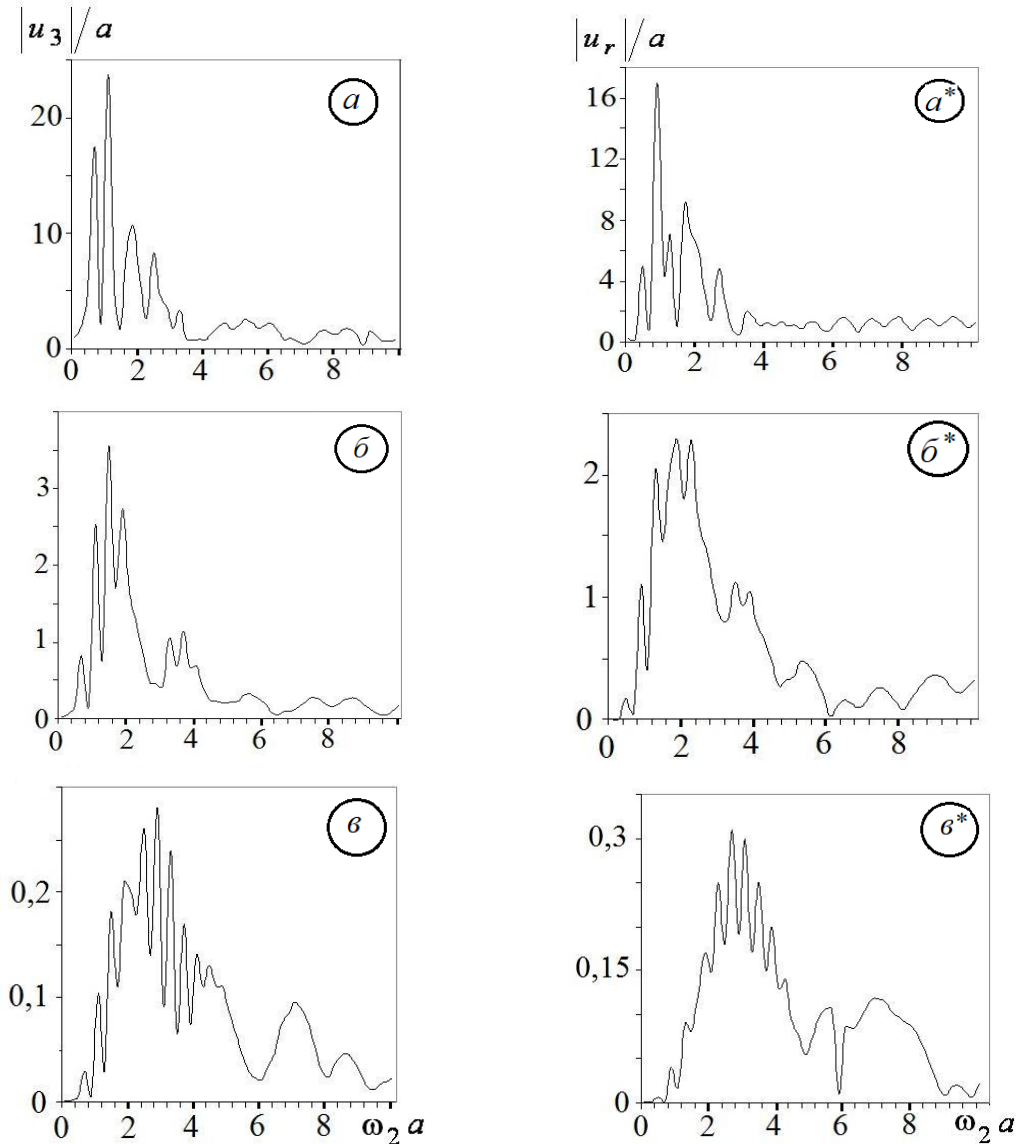


Рис. 2. Залежність нормованих значень переміщень на поверхні півпростору за умов $r^* = 8a$ і $d = 2a$ від хвильового числа: $a, a^* - R_T = 4a$; $\bar{b}, \bar{b}^* - R_T = 2a$; $\bar{v}, \bar{v}^* - R_T = a$.

Далі переміщення спадають, прямуючи до своїх стаціонарних значень. Переміщення для випадку півпростору приблизно у 4 рази перевищують свої аналоги для випадку безмежного тіла. Для від'ємних максимумів це твердження правильне для всіх параметрів d , перевищення значень u_3 для півпростору порівняно з безмежним тілом спостерігається зі збільшенням глибини залягання дефекту d .

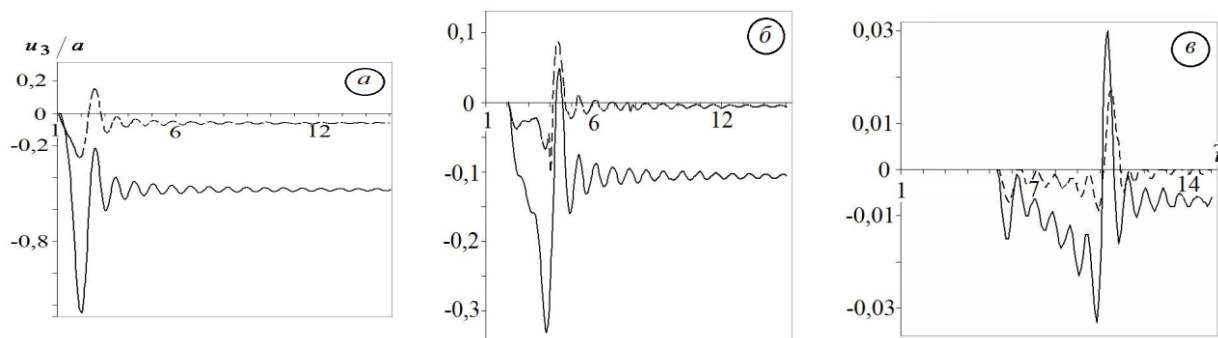


Рис. 3. Часові залежності вертикальних переміщень на поверхні півпростору в епіцентрі від глибини залягання d тріщини (штрихові лінії – тріщина у безмежному просторі):
 $a - d = 2a$, $б - d = 4a$; $в - d = 10a$.

На рис. 4, *a* продано часові залежності вертикальних переміщень на поверхні півпростору від відстані r^* до епіцентру. Залежності мають осцилюючий характер.

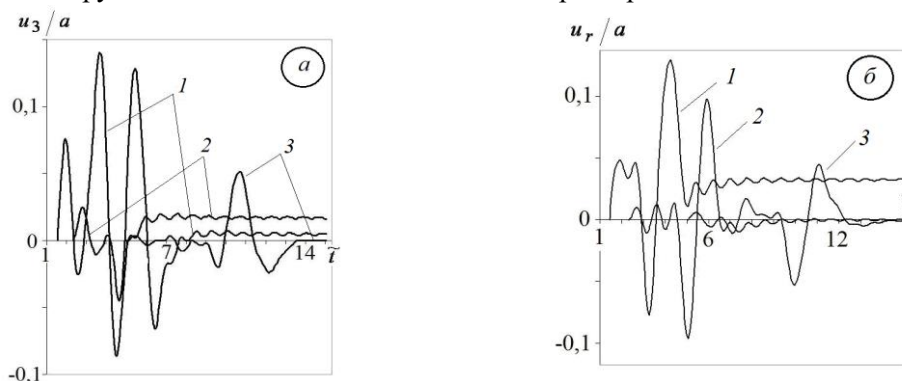


Рис. 4. Часові залежності вертикальних переміщень на поверхні півпростору від відстані r^* до епіцентру (а) та радіальних переміщень від відстані до епіцентру $d = 2a$ (б):
 $1 - r^* = 3a$; $2 - r^* = 5a$; $3 - r^* = 10a$.

Спостерігаємо декілька додатних локальних максимумів: перший досягається після приходу в точку спостереження поздовжньої, а другий – поперечної хвилі. Після досягнення абсолютного максимуму переміщення u_3 спочатку спадають, а потім зростають і виходять на стаціонарний режим. Зі збільшенням відстані r^* переміщення поступово зникають.

Рис. 4. *б* ілюструє часові залежності радіальних переміщень u_r на поверхні півпростору від відстані r^* до епіцентру за фіксованої глибини $d = 2a$. Графіки мають осцилюючий характер із чітко вираженими локальними мінімумами і максимумами. Після приходу поздовжньої хвилі переміщення зростають, досягають першого додатного максимуму, а потім спадають. Найбільшого локального мінімуму переміщення досягають із приходом поперечної хвилі. Після цього переміщення зростають, досягають другого найбільшого максимуму, а потім спадають, прямуючи до стаціонарного режиму. Із віддаленням точки спостереження від епіцентру найбільші від'ємні значення переміщень спочатку зростають, а потім зникають.

Висновки

Розв'язано динамічну задачу для пружного півпростору, послабленого дископодібною

тріщиною поперечного (радіального зсуву). За результатами числового моделювання встановили, що зі зростанням розмірів дефекту амплітуди коливань точок поверхні півпростору зростають, а приведена частота, за якої амплітуди переміщень досягають максимальних значень, зменшується. Внаслідок зміщення поверхонь тріщини поперечного зсуву амплітуди переміщень на поверхні півпростору вищі, ніж у випадку тріщини нормального відриву. Врахування отриманих результатів під час технічної діагностики методом акустичної емісії дає змогу підвищити ефективність аналізу діагностичної інформації у загальній інформаційній системі її оброблення для прийняття рішення про подальшу експлуатацію об'єкта контролю.

Список використаних джерел

1. Skalskyi V., Nazarchuk Z., Stankevych O. "Acoustic emission. Fracture Detection in Structural Materials", Springer Cham, 2022. XIII, 218 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11291-1>
2. Nazarchuk Z., Skalskyi V., Serhiyenko O. "Acoustic Emission: Methodology and Application", Springer International Publishing, 2017. 283 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49350-3>
3. Achenbach J. D. "Wave propagation in elastic solids", Nord-Holland Publishing Company, 1973. 425 p.
4. Хай М. В., Станкевич В. З. "Фундаментальний розв'язок квазістатичної задачі для півпростору з плоскими розривами", Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2002. № 3. С. 25–28.
5. Mykhas'kiv V. "Transient response of plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid", Wave Motion. 2005. Vol. 41. pp. 133–144. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.06.003>
6. Skalsky V., Stankevych O., Serhiyenko O. "Wave displacement field at a half-space surface caused by an internal crack under twisting load", Wave Motion. 2013, Vol. 50(2). pp. 326–333. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2012.09.001>
7. Stankevych O., Skalsky V. "The vibration of a half-space due to a buried mode I crack opening", Wave Motion. 2017. 72. P. 142–153. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.02.003>
8. Хай М. В. "О сведениях трехмерных динамических задач теории упругости для тела с трещиной к интегральным уравнениям", Математические методы и физико-механические поля. 1980. Вып. 2. С. 63–69.
9. Mykhaskiv V. V. "Opening-function simulation of three-dimensional nonstationary interaction of cracks in an elastic body", International Applied Mechanics. 2001. Vol. 37(1). pp. 75–84.
10. Mykhaskiv V. V., Butrak I. O. "Three-dimensional dynamic problems for an elastic body containing shallow crack", Materials Science. 2003. Vol. 39(1). pp. 69–78. <https://doi.org/10.1023/A:1026178529740>
11. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. "Integral and Series. V. 3: More special functions", New York-London: Gordon and Breach, 1989. – 800 p.

Olena Stankevych¹

¹Computer Aided Design Department, Lviv Polytechnic National University, St. Bandera str. 12, Lviv, Ukraine, E-mail: olena.m.stankevych@lpnu.ua, ORCID 0000-0002-5977-6351

MATHEMATICAL MODEL OF ACOUSTIC EMISSION FROM MODE II CRACK

Received: August 28, 2023 / Revised: September 28, 2023 / Accepted: October 10, 2023

© Stankevych O., 2023

Abstract. The dynamic problem of determining the wave field of displacements on the surface of an elastic half-space caused by the opening of an internal mode II crack has been solved. Using the method of boundary integral equations, a change in the amplitude-frequency characteristics of elastic oscillations on the surface of a solid body depending on the size of the defect, its depth, and the distance from the epicenter to the observation point was determined.

Keywords: acoustic emission, mode II crack, boundary integral equations method