



ОПТИМАЛЬНІ ОЦІНКИ ВЕКТОРА СТАНУ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА ШУМОМ

А. Воловик^[ORCID: 0000-0002-8772-9843]

Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, 21000, Україна

Відповідальний за рукопис: Андрій Воловик (e-mail: voland@vntu.edu.ua).

(Подано 2 травня 2023)

Оцінювання стану динамічних систем широко використовується у різноманітних галузях технічної діяльності. На практиці найвідомішими та найпоширенішими методами оцінювання є методи фільтра Калмана та відновлювачів Луенбергера. Більшість наведених у науково-технічній літературі результатів, що стосуються побудови оцінок стану динамічних систем у присутності діючих неконтрольованих збурень та шумів, пов'язані зі стаціонарними системами. Нечутливість таких оцінок до впливу супутніх неконтрольованих збурень забезпечується введенням певних обмежень, що накладаються на низку системних матриць, а їх оптимальності досягають, мінімізуючи слід коваріаційної матриці похибок оцінювання за рахунок тих ступенів свободи, що залишилися після виконання процедури роз'єднання. Мета роботи полягає у розробленні фільтра, здатного формувати оптимальні оцінки вектора стану стохастичної лінійної системи зі змінними параметрами, які нечутливі до впливу неконтрольованих входів. Умови, що гарантують збіжність отриманих оцінок, повинні бути такими, які легко перевірити. Поставлені мети досягають із використанням взаємно однозначного перетворення рівнянь систем з подальшим застосуванням методу Калмана. Як зазначене перетворення використано функціональний відновлювач О'Рейлі. Наведено приклад, який ілюструє ефективність запропонованого фільтра.

Ключові слова: *невизначений вхід; фільтр Калмана; відновлювач О'Рейлі; оптимальні оцінки вектора стану; стохастичні системи зі змінними параметрами.*

УДК: 621.396.96

1. Вступ

Оцінювання стану динамічних систем широко застосовують у найрізноманітніших галузях технічної діяльності людини, наприклад, у системах керування за принципом використання принципів від'ємного зворотного зв'язку, діагностики несправностей у таких технічних системах, як програмно-керовані пристрої контролю якості продукції підприємств хімічної та біологічної промисловості, в енергетичній, авіаційній та космічній галузях. Найвідомішими та традиційно використовуваними методами оцінювання стану систем є класичні методи фільтрації Калмана та відновлювачів Луенбергера. Дещо пізніше з'явилися роботи, пов'язані з оцінюванням вектора стану систем за наявності дії неконтрольованих збурень, які згодом отримали назву невизначених входів [1]. Мета цих робіт полягала у розробленні алгоритмів оцінювання станів динамічних систем, нечутливих до дії неконтрольованих входів. У найперших дослідженнях [2, 3] розгляд обмежувався

детермінованими системами з постійними параметрами та розробленням відповідних відновлювачів, у яких вводились певні обмеження на системні матриці, що гарантувало збіжність похибок оцінювання, оскільки вони звільнялись від впливу неконтрольованих збурень. Накладення обмежень спричиняє зменшення кількості ступенів свободи вибору для проектувальника, тому, як наслідок, наступну оптимізацію доводилось виконувати із застосуванням лінійних матричних нерівностей за критеріями матричних норм [4]. Стохастичних систем із постійними параметрами стосується низка робіт [5, 6], у яких розглянуто принципи побудови оптимальних оцінок вектора стану в присутності невизначених входів за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки. Порівняно зі стаціонарними системами системи зі змінними у часі параметрами були досліджені значно менше. Основні результати досліджень [7–13] систем зі змінними параметрами зосереджувались навколо розроблення алгоритмів фільтрації, що забезпечували мінімальне значення сліду коваріаційної матриці похибок оцінювання, хоч питання збіжності отриманих оцінок взагалі не розглядались, незважаючи на те, що отриманий алгоритм стосувався систем загального типу.

Вочевидь, обмаль отриманих результатів пояснюється математичними труднощами, оскільки широковідомий апарат передатних функцій важко використовувати для аналізу систем загального типу. Проте важливість вивчення лінійних систем з постійними та змінними параметрами не підлягає сумніву, оскільки великий клас нелінійних систем можна подати через відповідні перетворення вищезазначених лінійних систем або із виконанням процедури лінійної апроксимації.

Мета цієї роботи полягає у розробленні фільтра, здатного формувати оцінки вектора стану стохастичної лінійної системи зі змінними параметрами, які нечутливі до впливу неконтрольованих входів. Умови, що гарантують збіжність отриманих оцінок, повинні бути легкоперевірними. Поставлена мета досягається використанням взаємно однозначного перетворення рівнянь систем з подальшим застосуванням методу Калмана. У ролі такого перетворення використано функціональний відновлювач О'Рейлі.

Структура роботи така. У підр. 2 сформульовано завдання дослідження. Рівняння запропонованого фільтра виведено у підр. 3. У підр. 4 наведено приклад, який ілюструє ефективність запропонованого фільтра. У завершальній частині підведено підсумки роботи та подано список використаних джерел.

2. Аналіз останніх досліджень та постановка задачі

Припустимо, що лінійна стохастична система зі змінними у часі параметрами допускає опис системою різницевих рівнянь [8]:

$$y_k = H_k s_k + v_k, \quad (1)$$

$$s_{k+1} = \sum_{k+1|k} s_k + \Gamma_{k+1|k} u_k + \Omega_{k+1|k} d_k + w_k, \quad (2)$$

де $s(k) \in R^n$ являє собою n -вимірний вектор стану; $y(k) \in R^m$ – m -вимірний вектор спостережень; $u(k) \in R^p$ – точно відомий вектор входу; $d(k) \in R^l$ – вектор збурень, який розуміють як невідомий та неконтрольований вхід; $w(k), v(k)$ – білі гаусові шумові послідовності з нульовим середнім значенням та заданими коваріаційними матрицями $Q(k), R(k)$. Передбачено, що $H_k, \sum_{k+1|k}, \Gamma_{k+1|k}, \Omega_{k+1|k}$ – точно відомі системні матриці відповідних розмірів. Вираз $\Omega_{k+1|k} d_k$

можна використовувати для опису різноманітних типів невизначеностей пов'язаних з моделюванням, наприклад, перехресних взаємозв'язків у системах великої розмірності, складових нелінійної динаміки системи, помилок лінеаризації, примусового заниження порядку моделі, неконтрольованих змін параметрів. Також передбачено, що під час оцінювання стану динамічної системи з

неконтрольованими збуреннями використано функціональний відновлювач О'Рейлі, структуру якого задано виразами [14]:

$$s_{k|k}^* = z_k + C_k y_k, \quad (3)$$

$$z_{k+1} = A_{k+1|k} z_k + T_{k+1|k} \Gamma_{k+1|k} u_k + W_{k+1} y_k. \quad (4)$$

Задача полягає у такому визначенні матриць $A_{k+1|k}$, $T_{k+1|k}$, W_{k+1} , C_k , щоб оцінки вектора стану $s_{k|k}^*$ мали мінімальну дисперсію, і водночас були б розв'язані незалежно від неконтрольованих збурень.

3. Синтез пристрою відновлення, інваріантного до неконтрольованих збурень

Застосуємо відновлювач (3)–(4) до системи (1)–(2) та визначимо похибку оцінювання. Зазначену похибку $\Delta s_{k+1} \cong s_{k+1} - s_{k+1|k+1}^*$ можна подати як [7]:

$$\begin{aligned} \Delta s_{k+1} &= s_{k+1} - [z_{k+1} + C_{k+1} y_{k+1}] = [I - C_{k+1} H_{k+1}] s_{k+1} - C_{k+1} v_{k+1} - \\ &- \{A_{k+1|k} z_k(k) + T_{k+1|k} \Gamma_{k+1|k} u_k(k) + [W1_{k+1|k} + W2_{k+1|k}] y_k\} = \\ &= [I - C_{k+1} H_{k+1}] s_{k+1} - C_{k+1} v_{k+1} - A_{k+1|k} [s_k - \Delta s_k - C_k y_k] - W1_{k+1} [H_k s_k + v_k] - \\ &- W2_{k+1} y_k = T_{k+1|k} \Gamma_{k+1|k} u_k(k) - A_{k+1|k} [s_k - \Delta s_k - C_k y_k] - W1_{k+1} [H_k s_k + v_k] - \\ &- W2_{k+1} y_k = -A_{k+1|k} [s_k - \Delta s_k - C_k y_k] - W1_{k+1} [H_k s_k + v_k] - W2_{k+1} y_k = \\ &= A_{k+1|k} \Delta s_k(k) - W1_{k+1} v_k - C_{k+1} y_{k+1} + [I - C_{k+1} H_k(k)] w_k(k) - \\ &- \left\{ A_{k+1|k} - [I - C_{k+1} H_k(k)] \sum_{k+1|k} + W1_{k+1} H_k \right\} s_k + [I - C_{k+1} H_k] \Omega_{k+1|k} d_k - \\ &- [W2_{k+1} - A_{k+1|k} C_k] y_k - \{T_{k+1|k} - [I - C_{k+1} H_k]\} \Gamma_{k+1|k} u_k \end{aligned} \quad (5)$$

де $W_{k+1} = W1_{k+1} + W2_{k+1}$.

Надалі уведемо такі обмеження:

$$\Omega_{k+1|k} = C_{k+1} H_k \Omega_{k+1|k}, \quad (6)$$

$$T_{k+1|k} = I - C_{k+1} H_k, \quad (7)$$

$$A_{k+1|k} = \sum_{k+1|k} [I - C_{k+1} H_k] - W1_{k+1} H_k, \quad (8)$$

$$W2_{k+1} = A_{k+1|k} C_k. \quad (9)$$

Якщо виконуються зазначені вище вимоги, то похибку оцінювання можливо виразити у такому вигляді [7]:

$$\Delta s_{k+1} = A_{k+1|k} \Delta s_k - W1_{k+1} v_k - C_{k+1} v_{k+1} + T_{k+1|k} w_k, \quad (10)$$

У доступнішій формі це просто означатиме, що коли матриця $A_{k+1|k}$ є стійкою, то математичне сподівання похибки оцінювання Δs прагне до нуля, а математичне сподівання оцінки $s_{k+1|k+1}^*$ асимптотично прямує до середнього значення вектора стану s . Окрім того, з рівняння (10) неважко углядіти, що неконтрольований вектор збурень $d(k)$ видалений з похибки оцінювання за умови дотримання співвідношень (6)–(9). Під час проєктування відновлювача, звільненого від

впливу збурень, необхідно вибирати матриці C_{k+1} так, щоб виконувалось рівняння (6), а $W1_{k+1}$ – щоб забезпечити стійкість матриці $A_{k+1|k}$. Після того як зазначені матриці вибрані, інші матриці неважко обчислити з рівнянь (7)–(9). Тут центральним питанням є визначення умов, за яких існує розв’язок рівняння (6). Підкреслимо, що у цьому разі тривіальний розв’язок у вигляді $C_{k+1} = \Omega_{k+1|k} [H_k \Omega_{k+1|k}]^{-1}$ є недоречним, оскільки добуток $H_k \Omega_{k+1|k}$ не є квадратною матрицею. Відповідь подамо лемою:

Лема 1. Необхідною та достатньою умовою існування розв’язку рівняння

$$\Omega_{k+1|k} = C_{k+1} H_k \Omega_{k+1|k} \text{ є умова: } \text{rank} [H_k \Omega_{k+1|k}] = \text{rank} [\Omega_{k+1|k}]. \quad (11)$$

Доведення: Необхідні умови. Припустимо, що рівняння (11) має розв’язок S , тоді для кожного такого розв’язку справедливо $SH\Omega = \Omega$, або, що те саме $(H\Omega)^T S^T = \Omega^T$. Це означає, що Ω^T являє собою підпростір матриці $(H\Omega)^T$ і зумовлює висновок, що $\text{rank}(\Omega) \leq \text{rank}(H\Omega)$. Проте, з іншого боку, $\text{rank}(H\Omega) = \min[\text{rank}(H), \text{rank}(\Omega)] \leq \text{rank}(\Omega)$, оскільки матрицю Ω передбачено матрицею повного рангу. Очевидно, що одночасне виконання цих суперечностей можливе лише, коли $\text{rank}(\Omega) = \text{rank}(H\Omega)$.

Достатні умови. Коли досягнуто рівності $\text{rank}(\Omega) = \text{rank}(H\Omega)$, то $H\Omega$ являє собою матрицю-стовпець повного рангу. У цьому разі існує інверсія зліва, тобто справедливе твердження [7] $(H\Omega)^\# = [(H\Omega)^T H\Omega]^{-1} (H\Omega)^T$. Тут символ $()^\#$ означає операцію псевдоінверсії Мура – Пенроуза. Звідси випливає, що $S^* = \Omega(H\Omega)^\#$ може бути розв’язком рівняння (11).

Рівняння (11) однозначно визначає умови, за яких можлива декомпозиція, тобто від’єднання від збурень. Для виконання цих умов кількість незалежних рядків матриці H_k повинна бути не меншою від кількості незалежних стовпців матриці $\Omega_{k+1|k}$. Це означає, що максимальна кількість збурень, від яких можна від’єднатись, не повинна перевищувати кількості незалежних спостережень. Якщо ці умови виконуються, загальний розв’язок рівняння (11) описують виразом [15]:

$$C_{k+1} = C0_{k+1} + C1_{k+1} C2_{k+1}, \quad (12)$$

$$C_{k+1} = \Omega_{k+1|k} [H_k \Omega_{k+1|k}]^\#, \quad (13)$$

$$C_{k+1} = I_m - [H_k \Omega_{k+1|k} [H_k \Omega_{k+1|k}]^\#]. \quad (14)$$

При цьому на матрицю $C1_{k+1}$ розміром $(n * m)$ ніяких обмежень не накладається, тобто її можна вибирати довільно. Переважно, з метою спрощення проєктування, матрицю $C1_{k+1}$ вибирають нульовою:

$$C_{k+1} = C0_{k+1} = \Omega_{k+1|k} [H_k \Omega_{k+1|k}]^\#. \quad (15)$$

Збіжність оцінок залежить від матриці відновлювача. У тому разі, коли матриця уже була вибраною, то вищеназвану матрицю можна визначити у такий спосіб:

$$P_{k|k} = M \left\{ s_k - s_{k|k}^* \left[s_k - s_{k|k}^* \right]^T \right\}. \quad (16)$$

Легко побачити [7], що її можна розраховувати на підставі рівняння (10):

$$P_{k|k} = [\Sigma 1_{k+1|k} - W1_{k+1} H_k(k)] P_{k|k} [\Sigma 1_{k+1|k} - W1_{k+1} H_k(k)]^T + W1_{k+1} R_k(k) W1_{k+1}^T + T_{k+1|k} Q_k T_{k+1|k}^T + C_{k+1} R_{k+1} C_{k+1}^T. \quad (17)$$

Оптимальною буде оцінка із мінімальною дисперсією. З рівняння (17) видно, що коваріаційна матриця похибок оцінювання скеровується матрицею $W1_{k+1}$. Наведемо тепер теорему, яка дає змогу одержати матрицю $W1_{k+1}$, що забезпечує досягнення мінімуму дисперсії похибок оцінювання.

Теорема 1. Похибка оцінювання досягає мінімального значення тоді, коли матриця передачі визначатиметься рівнянням:

$$W1_{k+1} = \Sigma 1_{k+1|k} P_{k|k} H_k^T [H_k(k) P_{k|k} H_k^T + R_k]^{-1}. \quad (18)$$

Доведення. Подамо вираз для коваріаційної матриці похибок оцінювання (17) у дещо змінній формі [7]:

$$P_{k+1|k+1} = \Sigma 1_{k+1|k} (k+1, k) P_{k|k} \Sigma 1_{k+1|k}^T + T_{k+1|k} Q_k T_{k+1|k}^T + C_{k+1} R_{k+1} C_{k+1}^T - W1_{k+1} H_k P_{k|k} \Sigma 1_{k+1|k}^T - \Sigma 1_{k+1|k}^T P_{k|k} H_k^T + W1_{k+1} [H_k P_{k|k} H_{k+1|k}^T + R_k] W1_{k+1}^T.$$

Оскільки R_k позитивно означена матриця, то вираз $H_k P_{k|k} H_{k+1|k}^T + R_k$ є також позитивно означеним. Це означає, що завжди існує така обернена матриця Π_k [15], що $H_k P_{k|k} H_{k+1|k}^T + R_k = \Pi_k \Pi_k^T H_k P_{k|k}$.

Уведемо позначення нової змінної $z_{k+1|k} \cong \Sigma 1_{k+1|k} P_{k|k} H_k^T [\Pi_k^T]^{-1}$, тоді можливо виразити коваріаційну матрицю похибок оцінювання $P_{k+1|k+1}$ в термінах $z_{k+1|k}$ [7]:

$$P_{k+1|k+1} = \Sigma 1_{k+1|k} P_{k|k} \Sigma 1_{k+1|k}^T + C_{k+1} R_{k+1} C_{k+1}^T - Z_{k+1|k} Z_{k+1|k}^T + [W1_{k+1} \Pi_k Z_{k+1|k} [W1_{k+1} \Pi_k Z_{k+1|k}]^T - T_{k+1|k} Q_k T_{k+1|k}^T]$$

Для мінімізації коваріаційної матриці похибок оцінювання необхідно мінімізувати слід матриці $tr[P_{k+1|k+1}]$, але для цього треба зробити так, щоб вираз $W1_{k+1} \Pi_k Z_{k+1|k}$ дорівнював нулю, а це означає, що рівняння (18) є слухним, і одержуємо:

$$P_{k+1|k+1} = \Sigma 1_{k+1|k} P_{k|k} \Sigma 1_{k+1|k}^T + T_{k+1|k} Q_k T_{k+1|k}^T + C_{k+1} R_{k+1} C_{k+1}^T \quad (19)$$

де $P1_{k+1|k+1} = P_{k|k} - W1_{k+1} H_k P_{k|k} \Sigma 1_{k+1|k}^T$

На основі отриманих результатів можна рекомендувати таку послідовність синтезу відновлювача для оптимального оцінювання вектора стану системи за наявності неконтрольованих входів, який подано табл. 1.

Таблиця 1

Рекомендований порядок синтезу фільтра Калмана з невизначеними входами

1	Виставлення початкових значень: $k = 0; P_{0 0} = P_0; C_0 = 0, z_0 = s_0 - H_0 \Omega_0 [H_0 \Omega_0]^\# y_0$.
2	Обчислення C_{k+1} із використанням рівняння (15)
3	Використовуючи рівняння (18) та (19), обчислюємо матриці $W1_{k+1}, P1_{k+1 k+1}$
4	Обчислюємо матриці $T_{k+1 k}, A_{k+1 k}, W2_{k+1}$, скориставшись при цьому рівняннями (7)–(9) та співвідношенням $W_{k+1} = W1_{k+1} + W2_{k+1}$
5	На основі рівнянь (3) та (4) обчислюємо z_{k+1} та оцінки $S_{k+1 k+1}^*$
6	З використанням рівнянь (21) та (22) обчислюємо матрицю $P_{k+1 k+1}$
7	Надаємо нове значення величині $k = k + 1$ та переходимо до кроку 2

Підкреслимо, що рівняння оптимального оцінювання, подані у цій роботі, еквівалентні рівнянням стандартного фільтра Калмана для системи без збурень, якщо прийняти $C_{k+1} = 0$, а $T_{k+1|k} = I$ за умови відсутності збурень, тобто $\Omega_{k+1|k} = 0$. Окрім того, розв'язок для матриці C_{k+1} може бути і не єдиним, оскільки її вибрано довільно. Відповідно вибравши вільну матрицю C_{k+1} , похибку оцінювання можна ще дещо зменшити, однак це призведе до надмірного ускладнення обчислювальної процедури. Тому на практиці обмежуються значенням C_{k+1} , скориставшись виразом (15).

4. Ілюстративний приклад

Як тестовий приклад розглянемо захід на посадку повітряного судна (ПС) по прямій, що згідно із рис. 1 містить декілька етапів. На першому з них ПС за допомогою радіоелектронного обладнання приводять за курсом до бажаного аеропорту (дільниця горизонтального польоту). На другому етапі (точка входу в глісаду) ПС, починаючи з моменту входу в зону дії глісадного радіомаяка, спрямовується уздовж лінії планування під кутом приблизно $2,4^{\circ}$ до площини злітно-посадкової смуги. Після проходження висоти прийняття рішення 60 м (залежить від метеорологічного мінімуму аеродрому), на висоті приблизно 25–30 м починається завершальна фаза посадкового маневру – планування із подальшим вирівнюванням, що і є предметом подальшого дослідження. Оскільки подальше планування під кутом $-2,4^{\circ}$ не відповідає умовам комфортності та безпеки польоту, то на етапі вирівнювання пілот скеровує ПС, орієнтуючись на покази відповідного бортового обладнання. У будь-якому випадку ефективне керування ПС з використанням бортового обладнання, об'єднаного в єдину систему обчислювального комплексу, передбачає розрахунки посадкової траєкторії на основі математичної моделі руху ПС. Якщо припустити, що кут нахилу ПС на етапі вирівнювання дорівнює нулю, то його рух можна розкласти на дві ортогональні складові – поздовжню та бокову.

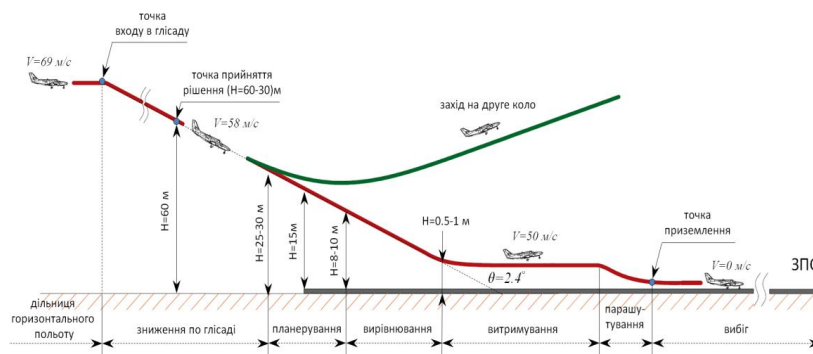


Рис. 1. Результати оцінювання висоти ПС

Надалі обмежимося лише поздовжньою складовою. З погляду стійкості та керованості польотом ПС найістотнішу роль відіграє короткоперіодична складова поздовжнього руху, рівняння якої у термінах простору станів після виконання лінійної апроксимації подано динамічною системою четвертого порядку, що має вигляд [17]:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_0} & \frac{V_0}{T_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{V_0 T_0^2} - \frac{2\xi_g \omega_g}{V_0 T_0} - \frac{\omega_g^2}{V_0} \right) & \left(\frac{1}{T_g^2} - \frac{2\xi_g \omega_g}{T_g} - \omega_g^2 \right) & (T_0^{-1} - 2\xi_g \omega_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K\omega_g^2 T_0 \end{bmatrix} \delta_e,$$

де $s_1 = h$ – поточна висота ПС; $s_2 = \frac{dh}{dt}$ – швидкість зміни висоти; $s_3 = \theta$ – кут тангажу ПС; $s_4 = \frac{d\theta}{dt}$ – швидкість зміни кута тангажу.

Стисла форма наведеного вище рівняння матиме вигляд

$$\dot{s}(t) = \Sigma s(t) + \Gamma u(t); y(t) = Hs(t), \quad (20)$$

де $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ – системна матриця розміру (4×4) ; Γ – матриця керування (4×1) ; $u(t) \cong \delta_e(t)$ – скалярний сигнал керування; $y(t)$ – вектор спостережень (4×1) ; H – діагональна матриця (4×4) з одиницями на головній діагоналі. Вважаючи, що параметри поздовжнього руху ПС $\zeta_{\theta}=0,6$; $T_{\theta}=3,5$ с; $T_{\theta}=3,1$ с; $K_{\theta}=1,8$ с $^{-1}$; $V_{\theta}=75$ мс $^{-1}$ відповідають рекомендаціям робіт [17, 18], можна отримати дискретний еквівалент рівняння (23) у вигляді [8]:

$$s_{k+1} = \Sigma_{k+1|k} s_k + \Gamma_{k+1|k} u_k + \Omega_{k+1|k} d_k + w_k,$$

де системні матриці $\Sigma_{k+1|k}$, $\Gamma_{k+1|k}$, $\Omega_{k+1|k}$ обчислено за формулами: $\Sigma_{k+1|k} = \exp[\Sigma(t)\Delta t]$; $\Gamma_{k+1|k} = \Sigma(t)^{-1} [\Sigma_{k+1|k} I_{(4)}] \Gamma(t)$; $\Omega_{k+1|k} = \Sigma(t)^{-1} [\Sigma_{k+1|k} I_{(4)}] \Omega(t)$; Δt – заданий інтервал дискретизації, $\Omega(t)$ – матриця розподілу збурення, визначена за припущення, що джерелом збурень є зміни швидкості $V_0 + \Delta V$ повітряного судна ПС під впливом вітру та нестабільність коефіцієнта демпфування $\xi_0 + \Delta \xi$.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\Sigma_{0,42} & -(2\omega_9) [(V_0 T_0)^{-1} + T_9^{-1} + 1] \end{bmatrix},$$

З метою урахування похибок моделювання та впливу різноманітних зовнішніх факторів, наприклад турбулентної складової вітру, компоненти вектора стану s_k збурювали білим гаусовим шумом w_k . Похибки спостережень імітувались уведенням білих гаусових шумів v_k , статистично незалежних від w_k . Ці шуми мали нульове середнє значення, а їх інтенсивність визначалась заданими коваріаційними матрицями:

$$Q_k = M\{ww^T\} = 0.0081 * I_{(4)}, R_k = M\{vv^T\} = 0.16 * I_{(4)}.$$

Початкові умови прийнято такими:

$$s_0^T = [0.0 \quad -3.6 \quad 0.1 \quad 0.004]^T, s_{0|0}^T = [0.0 \quad 1.9 \quad -0.1 \quad 0.004]^T, P_{0|0} = 0.01 * I_{(4)}.$$

Оскільки складова $\Gamma_{k+1|k} u_k$ – детермінована величина, на суть процесу оцінювання вона не впливає. Для спрощення процесу моделювання прийmemo $u_k = 0$. Результати моделювання подано на рис. 2.

Для оцінювання ефективності роботи запропонованого алгоритму фільтрації результати моделювання подано у вигляді порівняльного аналізу з даними, отриманими за допомогою стандартного фільтра Калмана. Що стосується останнього, навіть візуально неважко помітити, що оцінка висоти ПС не відповідає реальній ситуації, а різницевий сигнал у каналі висоти не відокремлений від впливу збурень, унаслідок чого його середнє значення далеке від нуля (рис. 3).

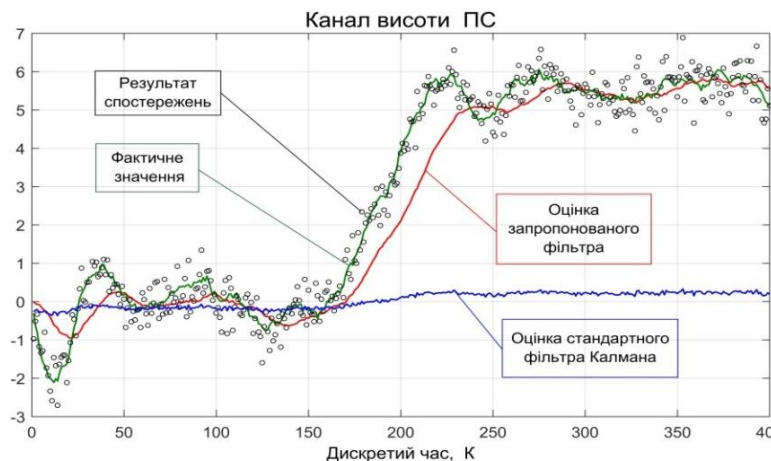


Рис. 2. Результати оцінювання висоти ПС

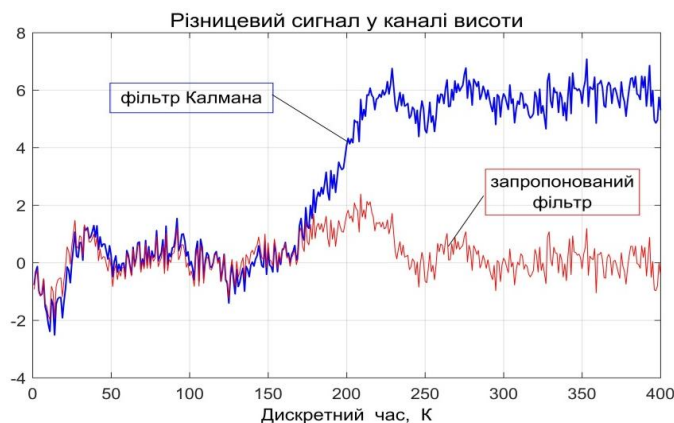


Рис. 3. Різницева сигнали каналу висоти

Наслідком невідповідності моделі стандартного фільтра Калмана умовам, які діють на вході, є розбіжність процесу фільтрації, починаючи з моменту дії збурення ($k=150$). Легко помітити, що фактична висота не відстежується (рис. 2). В такому випадку точка дотику до ЗПС літака зсувається вправо приблизно на 250–300 м, що може створювати нештатну ситуацію, пов'язану з виходом ПС за межі ЗПС. Особливо це критично для аеропортів, у яких з тих чи інших причин, ЗПС має обмежену довжину.

Результати оцінювання висоти ПС, отримані за допомогою фільтра з невизначеними входами, синтезованого за методикою, викладеною у табл. 1, показують, що оцінка висоти на ділянці $150 < k < 300$ прямує до її фактичного значення у асимптотичному розумінні, що відповідає раніше зробленим припущенням. А для $k > 300$ ситуація покращується, оскільки у міру збіжності процесу оцінювання похибки прямують до нуля у середньоквадратичному сенсі, а різницева сигнал, розв'язаний від впливу неконтрольованих збурень, здійснює коливання навколо нульового значення. Неважно помітити, що запропонований фільтр загалом адекватно відстежує фактичну зміну висоти, за винятком перехідного процесу. У міру збіжності процесу оцінювання екіпаж ПС отримує об'єктивну оцінку фактичної висоти і здатен виконати маневр, зменшивши силк тягги двигунів з метою дотримання регламентованої траєкторії зниження.

Висновки

У пропонуваній роботі отримано розв'язок задачі побудови фільтра, здатного формувати оптимальні оцінки вектора стану нестационарної динамічної системи, які мають ознаки стійкості до впливу неконтрольованих збурень та шумів, які діють. Важливість розв'язаної задачі зумовлена

широким застосуванням процедур оцінювання у різноманітних галузях технічної діяльності. Встановлено умови існування запропонованого фільтра. На відміну від відомих робіт, збіжність отриманих оцінок нескладно контролювати. Показано, що класичний фільтр Калмана є окремим випадком запропонованої структури оцінювача. Наведено послідовність виконання процедури синтезу запропонованого фільтра.

Список використаних джерел

- [1] Bezzaoucha, S., Voos, H., and Darouach, M. (2017). A new polytopic approach for the unknown input functional observer design. *International Journal of Control*, online version, 1–20. <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1288299>
- [2] Chen, J. and Patton, R. (1999). *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer; Softcover reprint of the original 1st ed. 1999 edition (November 2), 2012, p. 375.
- [3] Koenig, D., Nowakowski, S., Bourjij, A. (1997). Observers for linear systems with unknown inputs. *IFAC Proceedings Volumes, Vol. 30, Iss. 6*, 479–484. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)43410-0](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)43410-0)
- [4] Gao, N., Darouach, M., Voos, H., and Alma, M. (2016). New unified h -infinity dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. *Automatica*, 65, 43–52. DOI: [10.1016/j.automatica.2015.10.052](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.10.052)
- [5] Darouach, M., Zasadzinski, M., Bassong Onana, A., and Nowakowski, S. (1995). Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems. *International Journal of Systems Science*, 26(10), 2015–2028. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207729508929152>
- [6] Keller, J.Y., Darouach, M., and Caramelle, L. (1998). Kalman filter with unknown inputs and robust two stage filter. *International Journal of Systems Science*, 29(1), 41–47. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207729808929494>
- [7] Andrii Y. Volovik; Lyudmila V. Krylik; Iryna M. Kobylyanska; Andrzej Kotyra; Saltanat Amirgaliyeva (2018) Methods of stochastic diagnostic type observers. *Proc. SPIE 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018, 108082X (1 October 2018)*. DOI: [10.1117/12.2501693](https://doi.org/10.1117/12.2501693)
- [8] A. Volovyk, V. Kychak, D. Havrilov (2021) Discrete Kalman Filter Invariant to Perturbations. *Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 18, No. 10, 2021*, pp. 21–41. DOI: [10.12700/APH.18.10.2021.10.2](https://doi.org/10.12700/APH.18.10.2021.10.2)
- [9] Gillijns, S. and De Moor, B. (2007). Unbiased minimum variance input and state estimation for linear discrete time systems with direct feedthrough. *Automatica*, 43, 934–937. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.11.016>
- [10] Воловик А. Ю., Гаврілов Д. В. (2019). Апроксимація розширеного фільтра Калмана паралельною двокаскадною структурою. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 4 (257). С. 107–115.
- [11] Ignagni M. (2000) Optimal and suboptimal separate-bias Kalman estimators for a stochastic bias, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, pp. 547–551. DOI: [10.1109/9.847741](https://doi.org/10.1109/9.847741)
- [12] Воловик А.Ю. (2023) Локально оптимальні робастні оцінки стану лінійних систем з невизначеними входами. *Вчені записки Таврійського нац. університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки*, Т. 34 (73), № 2. С. 56–61. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.2.1/09>
- [13] Yang C., Zheng J., Ren X., Yang W., Shi H., Shi L. (2018.) Multi-Sensor Kalman Filtering With Intermitent Measurements, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 63, Iss. 3, pp. 797–804. DOI: [10.1109/TAC.2017.2734643](https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2734643)
- [14] O'Reilly, J. (1983). *Observers for Linear Systems*, Academic Press. Issue on Analytical and Artificial Intelligence Based Redundancy in Fault Diagnosis, p. 246.
- [15] Montgomery, D., Peck, E., Vining, G. (2021). *Introduction to Linear Regression Analysis*. Wiley; 6th edition (March 16, 2021), p. 704
- [16] Stengel R. (2015). *Flight Dynamics*: Princeton University Press, 2015, 864 p.
- [17] Volovyk, A., Kychak, V., Osadchuk, A., Zhurakovskiy, B. (2023). Fault Identification in Linear Dynamic Systems by the Method of Locally Optimal Separate Estimation. In: Klymash, M., Luntovskyy, A., Beshley, M., Melnyk, I., Schill, A. (eds). *Emerging Networking in the Digital Transformation Age. TCSET 2022. Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 965*. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-24963-1-37>

THE STATE VECTOR OPTIMAL ESTIMATES FOR DISCRETE STOCHASTIC SYSTEMS WITH UNCERTAIN PERTURBATIONS AND NOISE

Andrii Volovyk

Vinnitsia National Technical University, 95, Khmelnytske shose str., Vinnitsia, 21021, Ukraine

Assessment of the dynamic systems state is widely used in various areas of technical activity. In practice, the most well-known and common methods of estimation are the methods of the Kalman filter and Luenberger observers. Most of the results known in the scientific literature for constructing estimates of the dynamic systems state in the presence of acting uncontrolled disturbances and noise are associated with stationary systems. The insensitivity of such estimates to the influence of accompanying uncontrolled perturbations is ensured by the introduction of certain restrictions that are imposed on a number of system matrices, and their optimality is achieved by minimizing the estimation errors covariance matrix trace due to those degrees of freedom that remained after the separation procedure was performed. The aim of the work is to develop a filter capable of generating state vector optimal estimates of a stochastic linear system with changeable parameters that are insensitive to the influence of uncontrolled inputs. In this case, the conditions that guarantee the convergence of the estimates obtained must be easily verifiable. The goal is achieved by using a one-to-one transformation of the equations of systems, followed by the application of the Kalman filter. The O'Reilly functional observer is used as the specified transformation. An example is given that illustrates the effectiveness of the proposed filter.

Key words: *uncertain input; Kalman filter; O'Reilly observer; optimal state vector estimates; dynamical stochastic systems.*