

¹В. Т. Дмитрів, ²С. Т. Берегуляк, ³М. А. Сьомак¹Національний університет «Львівська політехніка», ORCID: 0000-0001-9361-6418,
e-mail: vasyt.t.dmytriv@lpnu.ua²Національний університет «Львівська політехніка», ORCID: 0009-0005-6597-9752,
e-mail: stepan.t.berehuliak@lpnu.ua³Національний університет «Львівська політехніка», ORCID: 0009-0004-9417-9087,
e-mail: maksym.somak.mb.2021@lpnu.ua

<https://doi.org/10.23939/istcipa2023.57>.

МОДЕЛЬ ДВОМАСОВОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРУЖНИМ І ДЕМПФУЮЧИМ ЕЛЕМЕНТАМИ

© Дмитрів В. Т., Берегуляк С. Т., Сьомак М. А., 2023

Мета. Розроблення методу аналітичного дослідження двомасової системи коливання з паралельними пружним і демпфуючим елементами, що уможливує розширення проектування таких систем в різних задачах функціонування машин і обладнання. **Методика.** Параметричне дослідження динамічної системи коливання проведемо для оцінення впливу коефіцієнта пружності і демпфування на зміну власної частоти, використовуючи метод перетворення Лапласа. Наиведено математичну модель системи з двома масами, які з'єднані пружним і демпфуючим елементами, паралельно розміщеними. Збурення передаються на маси через пружно-демпфуючу систему. **Результати.** Наведено розв'язок системи диференціальних рівнянь через перетворення Лапласа для двох варіантів характеристичного рівняння. Характеристичне рівняння бікватратне, розв'язане методом Феррарі. Як для коренів з комплексними числами, так і для коренів з дійсними числами, отримані значення коренів $\lambda_1 \dots \lambda_i$. Значення коренів бікватратного рівняння для загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь уможливує стійкість для значень шести коренів характеристичного рівняння. На відміну від попередніх досліджень, де прикладені збурення описували у вигляді гармонійних коливань, ми запропонували розв'язок для збурень у вигляді дискретних одиничних імпульсів різної тривалості і різної частоти слідування, від одного імпульсу до n імпульсів. **Наукова новизна.** Аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь, які описують взаємне коливання мас, що з'єднані між собою паралельно пружним і в'язким елементами, відноситься до підвиду класичного тіла Кельвіна-Фойгта. Порівняно з іншими математичними моделями, аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описують переміщення мас системи, дасть змогу досліджувати систему з конструкційними параметрами у широкому числовому діапазоні їхніх числових значень. **Практична цінність.** Аналітична модель дозволяє моделювати технічні системи, які працюють за таким принципом. Наприклад, підвіски автомобілів та інших транспортних засобів різного призначення. Математична модель, аналітично вирішена, дає змогу оптимізувати конструкції підвісок.

Ключові слова: двомасова система, пружність, демпфер, перетворення Лапласа, квадрат частоти, коефіцієнт затухання, характеристичне рівняння.

Вступ

Кінематичний вплив на механічну систему виникає за будь-якого руху основи, на якій вона встановлена. Це пристрої амортизації та демпфування транспортних засобів, системи віброзахисту різного обладнання та операторів гірничотранспортних машин, засоби віброзахисту приладів та апаратури на літальних апаратах, а також сейсмічні впливи на споруди. Ці кінематичні впливи здебільшого є випадковими або мають у складі випадкові флуктуації. У зв'язку з цим аналіз коливань механічних систем при випадкових кінематичних збудженнях викликає інтерес для визначення параметрів технічних систем.

Вирішення цих завдань є необхідним етапом у розрахунку та проектуванні елементів машин та приладів, у процесі прогнозування їх надійності та довговічності. Крім того, через коливання спотворюються показання приладів і порушується робота апаратури.

Тому розроблення методу аналітичного розв'язування системи диференціальних рівнянь, які описують коливання двомасової системи з паралельними пружним і демпфуючим елементами, є актуальним.

Аналіз літературних джерел

У техніці широко використовують механічні системи, які мають елементи з характеристиками пружності і в'язкості. З'єднання таких елементів, послідовне, паралельне, комбіноване, дає змогу реалізувати характеристики технічної системи, яка може виконувати функції регулювання, коливання, демпферування та ін. [1–5]. Тому розроблення моделей їх роботи є актуальною задачею для конструювання технічних систем. Систему паралельного з'єднання пружного і в'язкого елементів, тіло Кельвіна-Фойгта, часто спрощують до моделі тертя та інтегрування [6]. Наприклад, динамічний аналіз тонких в'язкопружних пластин змінної товщини моделюють за допомогою дробових похідних числовим методом [7]. Для розв'язку використовують метод інтегрального перетворення Лапласа в поєднанні з методом розкладу всіх функцій, що входять до системи рівнянь. Тоді систему диференціальних рівнянь в узагальнених координатах можна звести до нескінченних наборів незв'язаних рівнянь, кожне з яких описує затухаючі коливання механічного осцилятора на основі моделі Кельвіна-Фойгта з дробовою похідною [8]. Для опису реологічної поведінки м'яких матеріалів, які мають пружно-в'язкі характеристики, використовують метод дробових похідних [9–11]. Модель Кельвіна-Фойгта використовують для моделювання амортизаційних систем транспортних засобів. За складності математичного опису пружно-в'язкої механічної системи для її розв'язку використовують чисельні методи [12–14], що обмежує числовий діапазон параметрів. Наведено аналітичний розв'язок диференціального рівняння для одномасової пружно-в'язкої системи [15]. Пружно-в'язка система є тілом Кельвіна-Фойгта, тут описується одним диференціальним рівнянням другого порядку, збудовувальна сила є гармонійною [15]. Розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описують переміщення мас, які з'єднані між собою тілом Кельвіна-Фойгта, є актуальною задачею. Аналітичний розв'язок такої системи диференціальних рівнянь для двомасової системи, коли збудовувальна сила є не гармонійною, а дискретною, дає змогу аналітично оптимізувати параметри системи

Тому для проєктування пружно-демпфуючої системи доцільно мати математичну модель аналітично вирішену, що узгоджується з фізичними процесами і властивостями об'єкта.

Мета

Розроблення методу аналітичного дослідження двомасової системи коливання з паралельними пружним і демпфуючим елементами, що уможлиблює розширення проєктування таких систем в різних задачах функціонування машин і обладнання.

Методика проведення дослідження

Параметричне дослідження динамічної системи коливання проведемо для оцінення впливу коефіцієнта пружності й демпфування на зміну власної частоти, використовуючи метод перетворення Лапласа.

Модель коливної системи

Розглянемо математичну модель системи з двома масами, зображену на рис. 1. Для складання системи рівнянь, які описують коливання підвіски, використано такі позначення: m_1 , m_2 – підресорена і непідресорена маси; C_A , C_K – коефіцієнт пружності пружного елемента і шини колеса; K_A , K_K – комплексний коефіцієнт опору демпферного елемента амортизатора і шини колеса; y_1 , y_2 – переміщення мас підресореної і непідресореної за наїзду на перешкоду висотою $f(t)$; τ – тривалість дії перешкоди на підвіску автомобіля; T_1 , T_i – період надходження перешкод; t – час.

Для систем, зображених на рис. 1, які складаються з мас і пружинно-амортизаторних або демпфуючих елементів, одним з можливих підходів є виведення рівнянь руху за допомогою формалізму Лагранжа. Ми застосовуємо формалізм Лагранжа до незгасаючої системи. Функція Лагранжа L є різницю між кінетичною енергією T і потенціальною енергією V :

$$L = T - \Pi = \frac{m_1 \cdot y_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot y_2^2}{2} - \frac{C_A \cdot y_1 - y_2^2}{2} - \frac{C_A \cdot y_2 - f t^2}{2}. \quad (1)$$

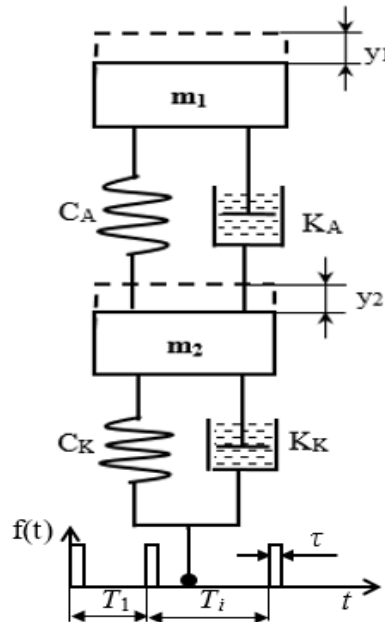


Рис. 1. Схема двомасової системи
 Fig. 1. Scheme of a two-mass system

Якщо прийняти $q_1 = y \cdot K$, $q_2 = y \cdot C$, то рівняння Лагранжа буде мати такий вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, j = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Враховуємо, що величина $f(t)$, яка характеризує висоту нерівності перешкоди, і є величиною одиничного неперіодичного імпульсу. Тоді коливання підвіски записуємо системою диференціальних рівнянь, ввівши такі позначення: $n_A = K_A \cdot m_1$, $n_{AK} = K_A \cdot m_2$, $n_K = K_K \cdot m_2$ – коефіцієнт затухання коливань, c^{-1} ; $K_A^2 = C_A \cdot m_1$, $K_{AK}^2 = C_A \cdot m_2$, $K_K^2 = C_K \cdot m_2$ – квадрат частоти вільних коливань, c^{-2} .

Продиференціюємо рівняння (2), враховуємо демпфування і пружність системи, отримаємо систему диференціальних рівнянь, які описують коливання:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + n_A \cdot \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} + K_A^2 \cdot y_1 - y_2 &= 0 \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} - n_{AK} \cdot \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} - K_{AK}^2 \cdot y_1 - y_2 + n_K \cdot \frac{dy_2}{dt} + K_K^2 \cdot y_2 &= K_K^2 \cdot f t \end{aligned} \quad (3)$$

Результати дослідження та їх обговорення

Оскільки мова про двомасову систему, існує чотири власні значення, пари яких є комплексними сполученими. Це означає, що є дві власні частоти.

Спочатку розглянемо власні частоти коливання однорідної системи. За допомогою підходу $e^{\lambda t}$ отримуємо рівняння на власні значення:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 \cdot e^{\lambda t} \\ y_2 &= y_2 \cdot e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (4)$$

Підставимо значення переміщення y з матриці (4) в систему диференціальних рівнянь (3) і поділимо на $e^{\lambda t}$, враховуючи що для всіх комплексних значень λ і для всіх t справедлива умова $e^{\lambda t} \neq 0$. Присутні лише власні частоти, коефіцієнтів затухання коливань відсутні. Член $K_K^2 \cdot f \cdot t$ є зовнішнє збудження і, отже, не впливає на власні частоти, відповідно матриця буде така:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + K_A^2 & -K_A^2 \\ -K_{AK}^2 & \lambda^2 + K_{AK}^2 + K_K^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ми отримуємо характеристичне рівняння з умови, що визначник матриці 2×2 (5) зникає:

$$\lambda^4 + \lambda^2 \cdot (K_A^2 + K_K^2 + K_{AK}^2) + 2 \cdot K_A^2 \cdot K_{AK}^2 + K_A^2 \cdot K_K^2 = 0 \quad (6)$$

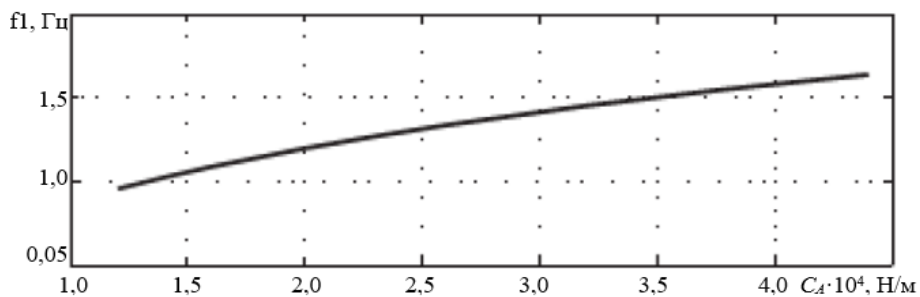
Розв'язок для λ^2 рівняння (6) має вигляд:

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{K_A^2 + K_K^2 + K_{AK}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{K_A^2 + K_K^2 + K_{AK}^2}{2}^2 - 2 \cdot K_A^2 \cdot K_{AK}^2 - K_A^2 \cdot K_K^2} \quad (7)$$

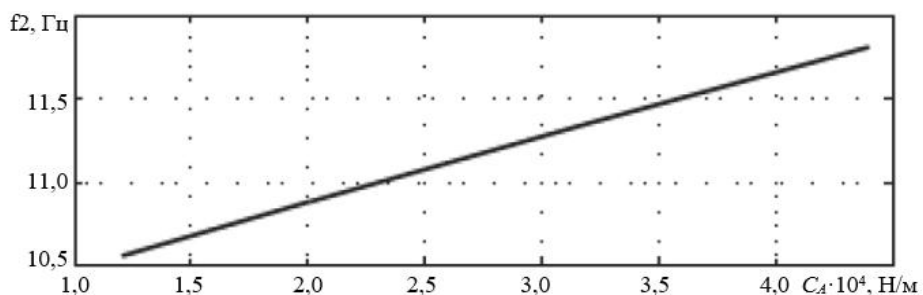
Значення для λ^2 є суто дійсними та від'ємними. Це означає, що чотири розв'язки $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ (7) є чисто уявними. Власні частоти є результатом значень 1, ..., 4, а пари значень ідентичні. Отже, є дві власні частоти f_1 і f_2 .

Розглянемо приклад. Приймаємо значення параметрів: $m_1 = 300$ кг, $m_2 = 30$ кг, $C_K = 120000$ Н/м і розглядаємо власні частоти як функцію жорсткості пружини, C_A . Графіки на рис. 2 демонструють власні частоти f_1 та f_2 для значень C_A в діапазоні від 12000 до 44000 Н/м.

Перша власна частота є в діапазоні приблизно від 1,0 до 1,7 Гц, а друга – від 10 до 12 Гц.



а



б

Рис. 2. Перша (а) і друга (б) власні частоти як функція жорсткості пружини
Fig. 2. First (a) and second (b) natural frequencies as a function of spring stiffness

Розглянемо коливання системи з врахування демпфуючої складової. Аналогічно використаємо перетворення Лапласа. Підставимо значення переміщення y з матриці (4) в

систему диференціальних рівнянь (3) і поділимо на $e^{\lambda t}$, враховуючи, що для всіх комплексних значень λ і для всіх t справедлива умова $e^{\lambda t} \neq 0$. Зовнішнє збудження $f t$ не впливає на власні частоти. Відповідно матриця буде така:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda \cdot n_A + K_A^2 & -\lambda \cdot n_A - K_A^2 \\ -\lambda \cdot n_{AK} - K_{AK}^2 & \lambda^2 + \lambda \cdot (n_{AK} + n_K) + K_{AK}^2 + K_K^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ми отримуємо характеристичне рівняння з умови, що визначник матриці 2×2 (8) зникає:

$$\lambda^4 + \lambda^3 n_A + n_{AK} + n_K + \lambda^2 K_{AK}^2 + K_K^2 + n_A n_{AK} + \lambda n_A K_K^2 - n_{AK} K_A^2 - K_A^2 K_{AK}^2 = 0. \quad (9)$$

Характеристичне рівняння (9) є біквдратним рівнянням. Розв'язуючи методом Феррарі, як для коренів з комплексними числами, так і для коренів з дійсними числами, отримаємо значення $\lambda_1 \dots \lambda_i$. Аналізуючи отримані значення коренів біквдратного рівняння (9), можна стверджувати, що загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (3) буде стійким для значень шести коренів характеристичного рівняння:

$$\lambda_i = -\frac{n_A + n_{AK} + n_K}{4} + \frac{\pm \sqrt{\alpha + 2\delta} \pm (-3\alpha + 2\delta \pm \frac{2\beta}{\alpha + 2\delta})}{2}, \quad (10)$$

$$\text{де } \alpha = -\frac{3 n_A + n_{AK} + n_K}{8} + K_{AK}^2 + K_K^2 + n_A n_{AK};$$

$$\beta = \frac{n_A + n_{AK} + n_K}{8} - \frac{n_A + n_{AK} + n_K \cdot K_{AK}^2 + K_K^2 + n_A n_{AK}}{2} + n_A K_K^2 - n_{AK} K_A^2;$$

$$\gamma = -\frac{3 n_A + n_{AK} + n_K}{256} + \frac{n_A + n_{AK} + n_K \cdot K_{AK}^2 + K_K^2 + n_A n_{AK}}{16} - K_A^2 K_{AK}^2 - \frac{n_A + n_{AK} + n_K \cdot n_A K_K^2 - n_{AK} K_A^2}{4};$$

$$P = -\frac{\alpha^2}{12} - \gamma; \quad Q = -\frac{\alpha^3}{108} + \frac{\alpha \cdot \gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8}; \quad R = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}; \quad U = \sqrt[3]{R};$$

$$\delta = -\frac{5}{6}\alpha + U.$$

Щоб проаналізувати характеристики передачі коливань в умовах удару, виконано моделювання системи при перехідному ударі амплітудою переміщення 10, 30 і 50 мм.

Графіки загасання вільної коливань пружно-демпферної системи показано на рис. 3.

Пікове пришвидшення та частота коливань зростають зі збільшенням амплітуди ударного збурення. За амплітуди 30 і 50 мм на піку кривої пришвидшення виникає явище роздвоєння, перше пікове значення спричинене збудженням імпульсу $f(t)$, друге пікове значення зумовлене віддачею пружного елемента, що спричинить вторинний удар.

Аналіз математичної моделі передачі частотних впливів через $f(t)$ свідчить, що основними факторами, що впливають на характеристики передачі коливань, є жорсткість і демпфування.

Висновки

Наведено аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь, які описують взаємне коливання мас, що з'єднані між собою паралельно пружним і в'язким елементами. Така система є підвидом класичного тіла Кельвіна-Фойгта. Аналітична модель дає змогу моделювати технічні системи, які працюють за таким принципом. Наприклад, підвіски автомобілів та інших транспортних засобів різного призначення. Математична модель аналітично вирішена, дозволяє оптимізувати конструкції підвісок. Порівняно з іншими математичними моделями, аналітичний

розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описують переміщення мас системи, дає змогу досліджувати систему з конструкційними параметрами у широкому числовому діапазоні їх числових значень.

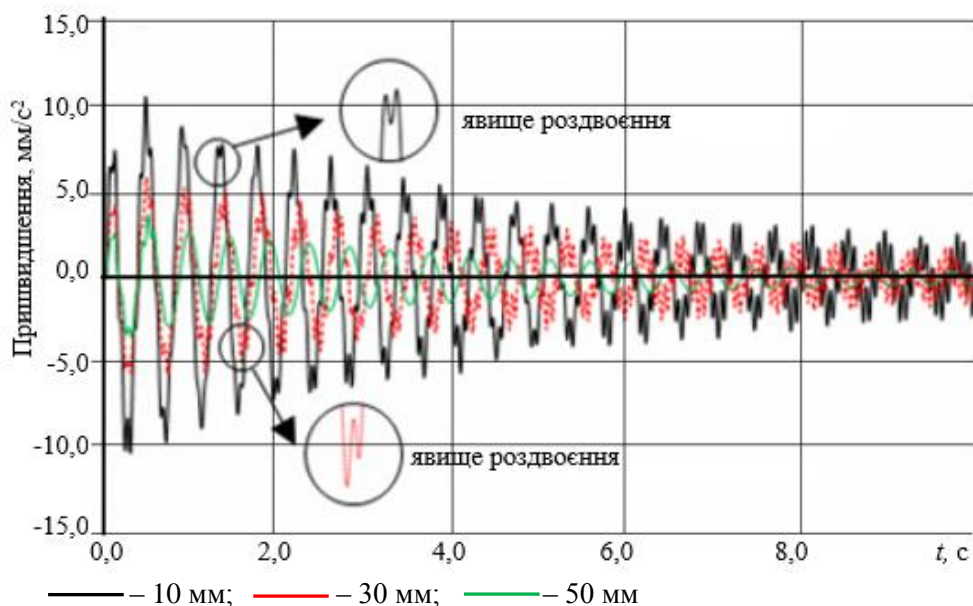


Рис. 3. Криві загасання вільних коливань за різних амплітуд збурення
Fig. 3. Damping curves of free oscillations at different disturbance amplitudes

На відміну від попередніх досліджень, де прикладені збурення описували у вигляді гармонійних коливань, ми запропонували розв'язок для збурень у вигляді дискретних одиничних імпульсів різної тривалості і різної частоти слідування, від одного імпульсу до n імпульсів.

Подальші дослідження цієї проблеми повинні бути зосереджені над більш широкою конфігурацією поєднання різних тіл та різної їх кількості, що дасть змогу оптимізувати конструкції технічних систем, де використовуються коливання, вібрації, демпфування, повзучість, та можливість керування цими процесами.

Список літератури

1. Huilai S., Ruichuan L., Jikang X., Funing X., Bo Z., Xinyuan D. Fractional Modeling and Characteristic Analysis of Hydro-Pneumatic Suspension for Construction Vehicles. Processes. – 2021. – Vol. 9. – P. 1414. DOI : <https://doi.org/10.3390/pr9081414>
2. Zhang J., Chen S., Wu Z., Feng J., Fan Y. Research on Damping Noncoincidence and Its Influence Factors of Multibranch Hydropneumatic Suspension. Advances in Mechanical Engineering. – 2015. – Vol. 7, Iss. 2. DOI : 10.1155/2014/362086
3. Macháček O., Kubík M., Strecker Z., Roupec J., Mazúrek I. Design of a frictionless magnetorheological damper with a high dynamic force range. Advances in Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 11, Iss. 3. DOI : 10.1177/1687814019827440
4. Dmytriv V.T., Dmytriv I.V., Yatsunskyi P.P. Experimental pulse generator combined with the milking machine collector. INMATEH - Agricultural Engineering. – 2019. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 219–226. DOI : <https://doi.org/10.35633/inmateh-59-24>
5. Lanets O.S., Dmytriv V.T., Borovets V.M., Derevenko I.A., Horodetskyi I.M. Analytical Model of the Two-Mass above Resonance System of the Eccentric-Pendulum Type Vibration Table. International Journal of Applied Mechanics and Engineering. – 2020. Vol. 25, Iss. 4. – P. 116–129.
6. Bobyleva T., Shamaev A. Problem of damping oscillations of a mechanical system with integral memory. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 869. – P.022011. DOI : 10.1088/1757-899X/869/2/022011

7. Babouskos N.G., Katsikadelis J.T. Dynamic analysis of viscoelastic plates of variable thickness modeled with fractional derivatives. Conference: 7th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Athens, 30 June -2 July. – 2011.
8. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Analysis of damped vibrations of thin bodies embedded into a fractional derivative viscoelastic medium. J. Mech. Behav. Mater. – 2012. Vol. 21, Iss. 5–6. – P. 155–159. DOI : 10.1515/jmbm-2013-0002
9. Bonfanti A., Kaplan J.L., Charras G., Kabla A. Fractional viscoelastic models for power-law materials. arXiv:2003.07834v3 [cond-mat.soft] 15 Jul. – 2020. – 28 p.
10. Zhang H.M., Zhang Q.Z., Ruan L.T., Duan J.B., Wan M.X., Insana M.F. Modeling Ramp-hold Indentation Measurements based on Kelvin-Voigt Fractional Derivative Model. Meas. Sci. Technol. – 2018. – Vol. 29, Iss. 3. – P. 035701. DOI : 10.1088/1361-6501/aa9daf
11. Stankovic B., Atanackovic T.M. Dynamics of a Rod Made of Generalized Kelvin-Voigt Visco-elastic Material. Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – Vol. 268. – P. 550–563. DOI : 10.1006/jmaa.2001.7816
12. Jugulkar L.M., Singh S., Sawant S.M. Analysis of suspension with variable stiffness and variable damping force for automotive applications. Advances in Mechanical Engineering. – 2016. – Vol. 8, Iss. 5. – P. 1–19. DOI : 10.1177/1687814016648638
13. Monsia M.D., Kpomahou Y.J.F. Simulating Nonlinear Oscillations of Viscoelastically Damped Mechanical Systems. Engineering, Technology & Applied Science Research. – 2014. – Vol. 4, Iss. 6. – P. 714–723.
14. Madeira R.H., Coda H.B. Kelvin Viscoelasticity and Lagrange Multipliers Applied to the Simulation of Nonlinear Structural Vibration Control. Latin American Journal of Solids and Structures. – 2016. – Vol. 13. – P. 964-991. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78252624>
15. Herisanu N., Marinca B., Marinca V. Dynamics of the Vibro-Impact Nonlinear Damped and Forced Oscillator under the Influence of the Electromagnetic Actuation. Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 3301. <https://doi.org/10.3390/math10183301>

Vasyl Dmytriv, Stepan Berehuliak, Maksym Somak
Lviv Polytechnic National University

MODEL OF TWO-MASS OSCILLATORY SYSTEM WITH PARALLEL ELASTIC AND DAMPING ELEMENTS

Aim. Development of a method of analytical research of a two-mass oscillating system with parallel elastic and damping elements, which makes it possible to expand the design of such systems in various tasks of the functioning of machines and equipment. **Method.** We will conduct a parametric study of the dynamic oscillation system to assess the effect of the elasticity coefficient and damping on the change in the natural frequency, using the Laplace transform method. A mathematical model of the system with two masses connected by elastic and damping elements placed in parallel is presented. Disturbances are transmitted to the masses through an elastic-damping system. **Results.** The solution of the system of differential equations through the Laplace transform for two variants of the characteristic equation is given. The biquadratic characteristic equation is solved by the Ferrari method. Both for the roots with complex numbers and for the roots with real numbers, the values of the roots $\lambda_1 \dots \lambda_i$ are obtained. The value of the roots of the biquadratic equation for the general solution of a homogeneous system of differential equations enables stability for the values of the six roots of the characteristic equation. Unlike previous studies, where applied disturbances were described in the form of harmonic oscillations, we proposed a solution for disturbances in the form of discrete single pulses of different durations and different tracking frequencies, from one pulse to n pulses. **Scientific novelty.** The analytical solution of the system of differential equations that describe the mutual oscillation of masses connected in parallel by elastic and viscous elements refers to a subspecies of the classical Kelvin-Voigt body. In comparison with other mathematical models, the analytical solution of the system of differential equations describing the movement of the masses of the system will allow to study the system with structural parameters in a wide numerical range of their numerical values. **Practical value.** The analytical model allows modeling technical systems that work according to this principle. For example, suspensions of cars and other vehicles for various purposes. The mathematical model is analytically solved and allows to optimize suspension designs.

Keywords: two-mass system, elasticity, damper, Laplace transform, frequency square, damping coefficient, characteristic equation

References

16. Huilai S., Ruichuan L., Jikang X., Funing X., Bo Z., Xinyuan D. Fractional Modeling and Characteristic Analysis of Hydro-Pneumatic Suspension for Construction Vehicles. *Processes*. – 2021. – Vol. 9. – P. 1414. DOI : <https://doi.org/10.3390/pr9081414>
17. Zhang J., Chen S., Wu Z., Feng J., Fan Y. Research on Damping Noncoincidence and Its Influence Factors of Multibranch Hydropneumatic Suspension. *Advances in Mechanical Engineering*. – 2015. - Vol. 7, Iss. 2. DOI : 10.1155/2014/362086
18. Macháček O., Kubík M., Strecker Z., Roupec J., Mazůrek I. Design of a frictionless magnetorheological damper with a high dynamic force range. *Advances in Mechanical Engineering*. – 2019. – Vol. 11, Iss. 3. DOI : 10.1177/1687814019827440
19. Dmytriv V.T., Dmytriv I.V., Yatsunskyi P.P. Experimental pulse generator combined with the milking machine collector. *INMATEH - Agricultural Engineering*. - 2019. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 219–226. DOI : <https://doi.org/10.35633/inmateh-59-24>
20. Lanets O.S., Dmytriv V.T., Borovets V.M., Derevenko I.A., Horodetskyi I.M. Analytical Model of the Two-Mass above Resonance System of the Eccentric-Pendulum Type Vibration Table. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2020. Vol. 25, Iss. 4. – P. 116–129.
21. Bobyleva T., Shamaev A. Problem of damping oscillations of a mechanical system with integral memory. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 869. - P.022011. DOI : 10.1088/1757-899X/869/2/022011
22. Babouskos N.G., Katsikadelis J.T. Dynamic analysis of viscoelastic plates of variable thickness modeled with fractional derivatives. *Conference: 7th GRACM International Congress on Computational Mechanics, Athens, 30 June -2 July. - 2011.*
23. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Analysis of damped vibrations of thin bodies embedded into a fractional derivative viscoelastic medium. *J. Mech. Behav. Mater.* – 2012. Vol. 21, Iss. 5-6. – P. 155–159. DOI : 10.1515/jmbm-2013-0002
24. Bonfanti A., Kaplan J.L., Charras G., Kabla A. Fractional viscoelastic models for power-law materials. *arXiv:2003.07834v3 [cond-mat.soft]* 15 Jul. – 2020. - 28 p.
25. Zhang H.M., Zhang Q.Z., Ruan L.T., Duan J.B., Wan M.X., Insana M.F. Modeling Ramp-hold Indentation Measurements based on Kelvin-Voigt Fractional Derivative Model. *Meas. Sci. Technol.* – 2018. – Vol. 29, Iss. 3. – P. 035701. DOI : 10.1088/1361-6501/aa9daf
26. Stankovic B., Atanackovic T.M. Dynamics of a Rod Made of Generalized Kelvin–Voigt Visco-elastic Material. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2002. – Vol. 268. – P. 550–563. DOI : 10.1006/jmaa.2001.7816
27. Jugulkar L.M., Singh S., Sawant S.M. Analysis of suspension with variable stiffness and variable damping force for automotive applications. *Advances in Mechanical Engineering*. – 2016. – Vol. 8, Iss. 5. – P. 1–19. DOI : 10.1177/1687814016648638
28. Monsia M.D., Kpomahou Y.J.F. Simulating Nonlinear Oscillations of Viscoelastically Damped Mechanical Systems. *Engineering, Technology & Applied Science Research*. – 2014. - Vol. 4, Iss. 6. – P. 714-723.
29. Madeira R.H., Coda H.B. Kelvin Viscoelasticity and Lagrange Multipliers Applied to the Simulation of Nonlinear Structural Vibration Control. *Latin American Journal of Solids and Structures*. – 2016. - Vol. 13. – P. 964-991. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78252624>
30. Herisanu N., Marinca B., Marinca V. Dynamics of the Vibro-Impact Nonlinear Damped and Forced Oscillator under the Influence of the Electromagnetic Actuation. *Mathematics*. – 2022. - Vol. 10. - P. 3301. <https://doi.org/10.3390/math10183301>