



УДК 004.422:536.24

В. І. Гавриш, Р. В. Зінько

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ГАЛЬМІВНИХ СИСТЕМАХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а надалі й аналізу температурних режимів у гальмівних системах транспортних засобів, які геометрично зображено у вигляді ізотропних просторових теплоактивних середовищ, які зазнають внутрішнього локального теплового нагрівання. Із використанням класичних методів неможливо отримати у замкненому вигляді аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач математичної фізики. Це особливо стосується випадків, коли праві частини диференціальних рівнянь із частковими похідними та крайовими умовами є розривними функціями. Наведений підхід ґрунтується на застосуванні апарату узагальнених функцій для описання локального зосередження теплового впливу. Це дало змогу застосувати інтегральне перетворення і на цій основі отримати аналітичні розв'язки як лінійної, так і нелінійної крайових задач.

Для нелінійної крайової задачі застосовано перетворення Кірхгофа, із використанням якого лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови. Унаслідок цього отримано лінеаризовані диференціальне рівняння другого порядку із частковими похідними та крайові умови з розривною правою частиною. Для розв'язування лінійної крайової задачі, а також отриманої лінеаризованої крайової задачі відносно перетворення Кірхгофа використано метод інтегрального перетворення Генкеля, внаслідок чого одержано аналітичні розв'язки цих задач. Для термочутливого середовища, як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу структури від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. У результаті отримано аналітичне співвідношення для визначення розподілу температури у цьому середовищі. На основі розроблених математичних моделей створено обчислювальний алгоритм і на цій основі програмні засоби, із використанням яких проаналізовано теплообмінні процеси всередині гальмівних конструкцій для вибраних матеріалів гальмівних колодок щодо ефективності їх функціонування, а також визначення оптимальних значень температури для ефективної роботи гальмівної системи транспортних засобів. Розроблені лінійна та нелінійна математичні моделі визначення температурного поля у просторових теплоактивних середовищах із внутрішнім нагріванням дають змогу аналізувати їх термостійкість. Завдяки цьому можливо підвищити її і захистити конструкцію від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих вузлів та окремих елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле, ізотропне просторове теплоактивне середовище, теплопровідність матеріалу, конвективний теплообмін, локальне внутрішнє нагрівання, термостійкість конструкцій.

Вступ / Introduction

Математичне моделювання теплообміну та механічного передавання енергії через контакти елементів тертям має важливе значення для конструювання певних вузлів, зокрема гальмівних конструкцій транспортних засобів. У цьому напрямі виконано багато досліджень щодо проектування гальмівних систем та термічного аналізу для мінімізації температури. Це стосується не тільки розроблення нових моделей гальмівних систем, але й підбирання їх оптимальних варіантів для наявних транспортних засобів із урахуванням їх класу, типу та експлуатації. Тривале використання гальмівних конструкцій у транспортних засобах призводить до нагрівання, спричиненого тертям, внаслідок гальмування, причому деформований ротор (елемент гальмівної системи) може застрягнути між гальмівними колодками або зламатися через високу температуру і теплове розширення. На температуру в

гальмівних конструкціях впливають гальмівний диск та матеріали гальмівних накладок. Для високих температур відбувається інтенсивна корозія, що негативно впливає на якість гальмування. Гальмівні системи діють за принципом тертя, внаслідок чого кінетична енергія транспортного засобу перетворюється на теплову (нагрівання). Високі температури несприятливо впливають на гальмівний диск та матеріал гальмівної накладки і змушують поверхні стику окиснюватися. Внаслідок цього гальмівна сила між диском і накладками, а також коефіцієнт тертя зменшуються, що призводить до аварійних ситуацій. Відомо, що виділена теплота в гальмівній системі змінюється пропорційно до маси і швидкості транспортного засобу. Коли кількість теплоти, виробленої внаслідок тертя упродовж гальмування, досягає максимуму, виникає скляне утворення або теплові тріщини на поверхнях гальмівного диска через якийсь певний час.

Об'єкт дослідження – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в гальмівних системах транспортних засобів, які описано ізотропним просторовим теплоактивним середовищем, що зазнає внутрішнього локального нагрівання.

Предмет дослідження – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач у гальмівних системах транспортних засобів, описаних ізотропним просторовим теплоактивним середовищем із внутрішнім локальним нагріванням.

Мета роботи – створення лінійної та нелінійної математичних моделей визначення розподілу температури й аналізу теплових режимів у ізотропних просторових теплоактивних середовищах, що зазнають внутрішнього локального нагрівання. Завдяки цьому можливо підвищити точність визначення розподілу температури і на цій основі проаналізувати температурні режими, що надалі вплине на ефективність методів проектування гальмівних систем транспортних засобів.

Для досягнення зазначеної мети необхідно виконати такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямі впливу теплових навантажень на ефективність гальмування транспортних засобів та розроблення лінійних та нелінійних математичних моделей теплопровідності з урахуванням внутрішнього локального нагрівання;
- навести об'єкт дослідження та його лінійну і нелінійну математичні моделі;
- описати спосіб лінеаризації нелінійної моделі;
- отримати аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності;
- розробити обчислювальний алгоритм та програмні засоби для числової реалізації результатів дослідження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників. Температура відіграє важливу роль у визначенні фізичних і хімічних характеристик матеріалів. Цей вплив стає особливо істотним у разі значних коливань температури, як спостерігається в процесах теплопровідності. Температурні перепади призводять до певних змін властивостей матеріалу, що ускладнює визначення розподілу температури та термічної напруги. Унаслідок цього визначення термодинамічного стану конструкцій істотно ускладнюється.

У роботі [1] зазначено, що зменшення ефективності гальмування транспортних засобів, спричинене тепловим перевантаженням, потребує обмежень на температурні режими, в яких гальмівні системи функціонують. Однак навіть для якісної конструкції різке гальмування на великих швидкостях призводить до високотемпературного перевантаження. Для вибраних конструкцій експериментально здійснено гальмування автомобіля масою 2,2 т, який рухається зі швидкістю 40 м/с до 4 м/с через кожні п'ять секунд із двома циклами гальмування з інтервалом у кілька секунд. Забезпечено температуру гальмівної конструкції, значення якої не перевищує 600 К.

Метою виконаного дослідження є аналіз зміни температури, швидкості та нагрівання теплового потоку

в проході вентиляції трьох конструкцій гальмівних дисків із використанням обчислювальної динаміки для класу гальмівних рідин CFD. Для аналізу конструкцій гальмівних дисків використано програмне забезпечення SolidWorks. Розглянуто три конструкції з різними геометричними та механічними параметрами. Виконано порівняння відомих довідкових числових значень для теплового потоку через канали вентиляції із отриманими за математичною моделлю. Аналіз свідчить про ефективне функціонування гальмівних дисків для швидкості, яка становить 80 км/год за температури докільля 22 °С. Це важливо для конструкцій дисків щодо вибору їх геометричних і механічних параметрів, зокрема кількості проходів та їх поперечного перерізу і виду матеріалу. Використано числові методи для визначення цих параметрів, а також для моделювання та оптимізації параметрів теплового потоку і забезпечення максимальної стабільності підтримувальних компонентів [2].

У роботі [3] досліджено теплову поведінку і стан вентилюваних дискових гальм, встановлених у транспортних засобах із невеликою масою (скутери, електричні велосипеди, ATVS тощо) з використанням середовища ANSYS за різними методами експерименту. Моделювання поширення температури в роторі (диск) і відповідних гальмівних накладках виконують із урахуванням низки чинників і вхідних параметрів упродовж процесу гальмування: швидкості обертання, зазорів між накладками і диском, швидкості навантаження, теплового розширення тощо. Числове моделювання перехідного процесу, температурного поля і на основі цього температурних напружень в області контакту між накладками і ротором здійснюють методом послідовних термоструктурних станів для перехідних процесів. Для всебічної оцінки функціонування гальм у дослідженнях розглядають два підходи: сталий вплив тривалістю 20 с із чинником впливу в формі теплового розширення у контакті пар тертя; лінійне навантаження накладок на диск (ротор) з відповідним зростанням тиску аж до моменту, коли обертання системи буде заблоковано. Оцінено вплив вентиляційних каналів диска на природу контактної місця із гальмівними накладками (відкритий контакт зі значною площею поверхні диска, ковзний контакт, липкий контакт тощо). Подано зображення зміни температури, об'ємного теплового розширення та питомої густини потужності, графік яких є параболічним із непропорційним зростанням в індикаторах, незважаючи на лінійне зростання тиску накладок на гальмівний диск.

Велика кількість теплоти зменшує гальмівний вплив на автомобіль. Гальмівна енергія перетворюється на теплоту через дію накладок на гальмівний диск. Автори праці [4] обчислили значення гальмівної сили для зупинки автомобіля. Процес гальмування досліджено із використанням методу скінченних елементів. Виконано оптимізацію гальмівного процесу з урахуванням обдування гальмівної конструкції повітрям. Примусове обдування повітрям, конвекцію та радіаційний аналіз досліджено методами теорії динаміки рідин.

Досліджено зміну енергії та проаналізовано ексергію автомобіля із повітряною вентилюючою дисковою гальмівною системою. Наведено експериментальну

конструкцію, яка складається із гальмівного диска, штангенциркуля, вирівнювача, електродвигуна, що управляє гальмівним диском, і гідропоршневої помпи, яка забезпечує потрібний тиск рідини для активізації гальм. Для симуляції процесу гальмування силу гальмування прикладали до обертового гальмівного диска за різних гальмівних навантажень і значень температури. Ефективні значення гальмівної сили обчислено для значення температури 200 °С під час неперервного гальмування. Встановлено, що значення гальмівної сили зменшується і гальмівний процес ослаблений для цього значення температури та більшого за нього. Визначено деструкцію ексергії гальмівного процесу транспортних засобів [5].

Удосконалено наявні методи та розроблено нові підходи для створення математичних моделей, які дають змогу аналізувати теплообмін у кусково-однорідних середовищах. Наведено плоскі та просторові моделі теплообміну, в яких диференціальні рівняння містять коефіцієнти, залежні від теплофізичних властивостей фаз та геометричної структури [6], [7], [8]. Висвітлено підходи для визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Проаналізовано процеси теплообміну, що відбуваються в однорідних та шаруватих конструкціях із включеннями канонічної форми [9], [10].

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі. Розглянемо ізотропний шар, віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$, на межовій поверхні $L_+ = \{(r, \varphi, l): 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ якого в області $\Omega_0 = \{(R, \varphi, l): 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ відбувається нагрівання за рахунок тертя із питомою густиною теплового потоку $q_0 = const$. Решта поверхні шару $L_- = \{(r, \varphi, -l): 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ є теплоізолюваною (рис. 1).

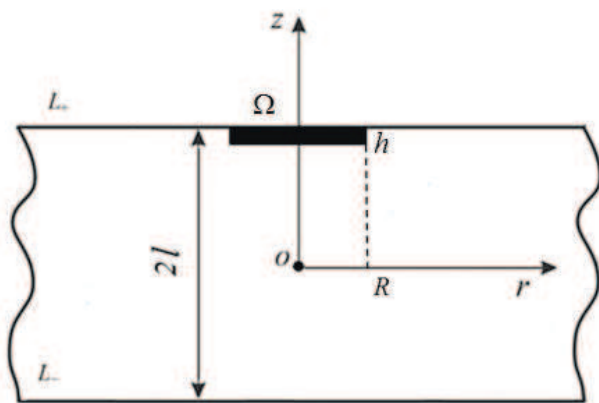


Рис. 1. Гальмівна конструкція у 2D-зображенні / Braking structure in 2D image

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z , який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [7], [9]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r \operatorname{grad} t(r, z)] = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами, що містять розривну праву частину

$$\left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = \frac{q_0}{\lambda} S_-(R-r); \quad \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=-l} = 0, \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності шару;

$$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$$

$S_-(\zeta)$ – асиметрична одинична функція [7, 9].

Застосуємо інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (1) та крайових умов (2). У результаті отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dz^2} - \xi^2 \bar{t} = 0 \quad (3)$$

і крайові умови

$$\left. \frac{d\bar{t}(z)}{dz} \right|_{z=l} = \frac{Rq_0}{\lambda\xi} J_1(R\xi), \quad \left. \frac{d\bar{t}(z)}{dz} \right|_{z=-l} = 0, \quad (4)$$

де

$$\bar{t}(z) = \int_0^\infty r J_0(r\xi) t(r, z) dr - \text{трансформанта функції } t(r, z);$$

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!(\nu+n)!} - \text{функція Бесселя першого}$$

роду ν -го порядку;

ξ – параметр інтегрального перетворення Генкеля.

Загальний розв'язок рівняння (3) визначимо у вигляді

$$\bar{t}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z}.$$

Використавши крайові умови (4), отримаємо частковий розв'язок задачі (3), (4)

$$\bar{t}(z) = \frac{Rq_0}{\lambda\xi^2} J_1(R\xi) \frac{\operatorname{ch}\xi(l+z)}{\operatorname{sh}2\xi l}. \quad (5)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (5), одержимо

$$t(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \bar{t}(z) d\xi. \quad (6)$$

Отже, шукане температурне поле в шарі, спричинене локальним нагріванням, виражено формулою (6), із якої отримуємо значення температури в довільній точці конструкції.

Розглянемо випадок, коли ізотропний шар є термочутливим. Тоді розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z у наведеній конструкції для цього випадку отримуємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [7, 9]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r \lambda(t) \operatorname{grad} t(r, z)] = 0 \quad (7)$$

з крайовими умовами, що містять розривну праву частину

$$t(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad (8)$$

$$\lambda(t) \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = q_0 S_-(R-r), \quad (9)$$

де $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності термочутливого шару.

Розглянемо перетворення Кірхгофа

$$\vartheta(r, z) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{r(z)} \lambda(\xi) d\xi, \quad (10)$$

де λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару.

Продиференціюємо вираз (10) за змінними r та z . У результаті отримаємо

$$\lambda^0 \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} = \lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r}, \lambda^0 \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} = \lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z}. \quad (11)$$

Із урахуванням виразів (11) вихідне рівняння (7) набуде такого вигляду:

$$\Delta \vartheta = 0, \quad (12)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Крайові умови (8), (9) із використанням співвідношення (10) перепишемо так:

$$\vartheta(r, z) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{q_0}{\lambda^0} S_-(R-r). \quad (14)$$

Використання перетворення Кірхгофа (10) дало змогу звести нелінійну крайову задачу (7)–(9) до лінеаризованих диференціального рівняння із частковими похідними другого порядку (12) та крайових умов (13) і (14) із розривною правою частиною.

Застосуємо інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (12) та крайових умов (13), (14), внаслідок чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = 0 \quad (15)$$

і крайові умови

$$\frac{d \bar{\vartheta}(z)}{dz} \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{d \bar{\vartheta}(z)}{dz} \Big|_{z=l} = \frac{R q_0}{\lambda^0 \xi} J_1(R \xi), \quad (16)$$

де $\bar{\vartheta}(z) = \int_0^\infty r \vartheta(r, z) J_0(r \xi) dr$ – трансформанта функції $\vartheta(r, z)$.

Загальний розв'язок рівняння (15) визначимо у вигляді

$$\bar{\vartheta}(z) = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z}$$

та з використанням крайових умов (16) знайдемо сталі інтегрування c_1 і c_2 . У результаті отримаємо розв'язок задачі (15), (16)

$$\bar{\vartheta}(z) = \frac{R q_0}{\lambda^0 \xi^2} \frac{ch \xi (l+z)}{sh 2 \xi l} J_1(R \xi). \quad (17)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (17), визначимо вираз для функції Кірхгофа $\vartheta(r, z)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r \xi) \bar{\vartheta}(z) d\xi. \quad (19)$$

Шукане температурне поле $t(r, z)$ для наведеної структури визначаємо за допомогою одержаного нелінійного алгебраїчного рівняння із використанням співвідношень (10), (19), після підстановки в них конкретного виразу залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу шару від температури.

Частковий приклад. Розглянемо залежність коефіцієнта теплопровідності від температури для матеріалу шару у вигляді співвідношення

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (20)$$

де k – температурний коефіцієнт теплопровідності.

Урахувавши співвідношення (10), із виразів (19) і (20) отримаємо формулу для визначення температури $t(r, z)$

$$t(r, z) = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - 2k \vartheta(r, z)} \right), \quad (21)$$

яка цілком описує поведінку температурного поля в термочутливому шарі.

Аналіз числових результатів. За формулою (6) виконано числові розрахунки температурного поля $t(r, z)$ та наведено його зміни в середовищі залежно від просторових аксіальної z (рис. 2, а) та радіальної r (рис. 2, б) координат для таких вихідних даних: $q_0 = 200$ Вт/м²; $l = 0,1$ м; $h = 0,075$ м; $R = 0,05$ м. Матеріалом гальмівних колодок вибрано колісну сталь ($\lambda = 43,12$ Вт/(град·м), крива 1), чавун ($\lambda = 52,34$ Вт/(град·м), крива 2) та композит ($\lambda = 0,840$ Вт/(град·м)). Значення температури для того самого значення питомої густини теплового потоку найбільші для конструкції гальмівних колодок, виготовлених із колісного композиту, і найменші, якщо матеріалом вибрано чавун. Отримані результати свідчать, що температура $t(r, z)$, як функція просторових координат, є гладкою та монотонною, що підтверджує адекватність розроблених математичних моделей реальному фізичному процесу.

Обговорення результатів дослідження. Аналіз літературних джерел [11, 12, 13, 14, 15] свідчить, що розроблення математичних моделей для аналізу температурних режимів у окремих вузлах та елементах гальмівних систем транспортних засобів є важливим завданням, оскільки внаслідок температурних навантажень виникають різноманітні дефекти на гальмівних дисках і накладках гальмівних колодок. Для запобігання цьому явищу, проаналізувавши температурні режими, можна підібрати певні температуростійкі матеріали для гальмівних накладок та визначити інтервали зміни температури для ефективної роботи загалом гальмівної системи транспортних засобів.

Наукова новизна отриманих результатів досліджень – полягає у наведеному способі лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отриманні в замкненому вигляді аналітичних розв'язків відповідних лінійної та нелінійної крайових задач для ізотропних теплоактивних просторових середовищ, які зазнають локального внутрішнього теплового нагрівання.

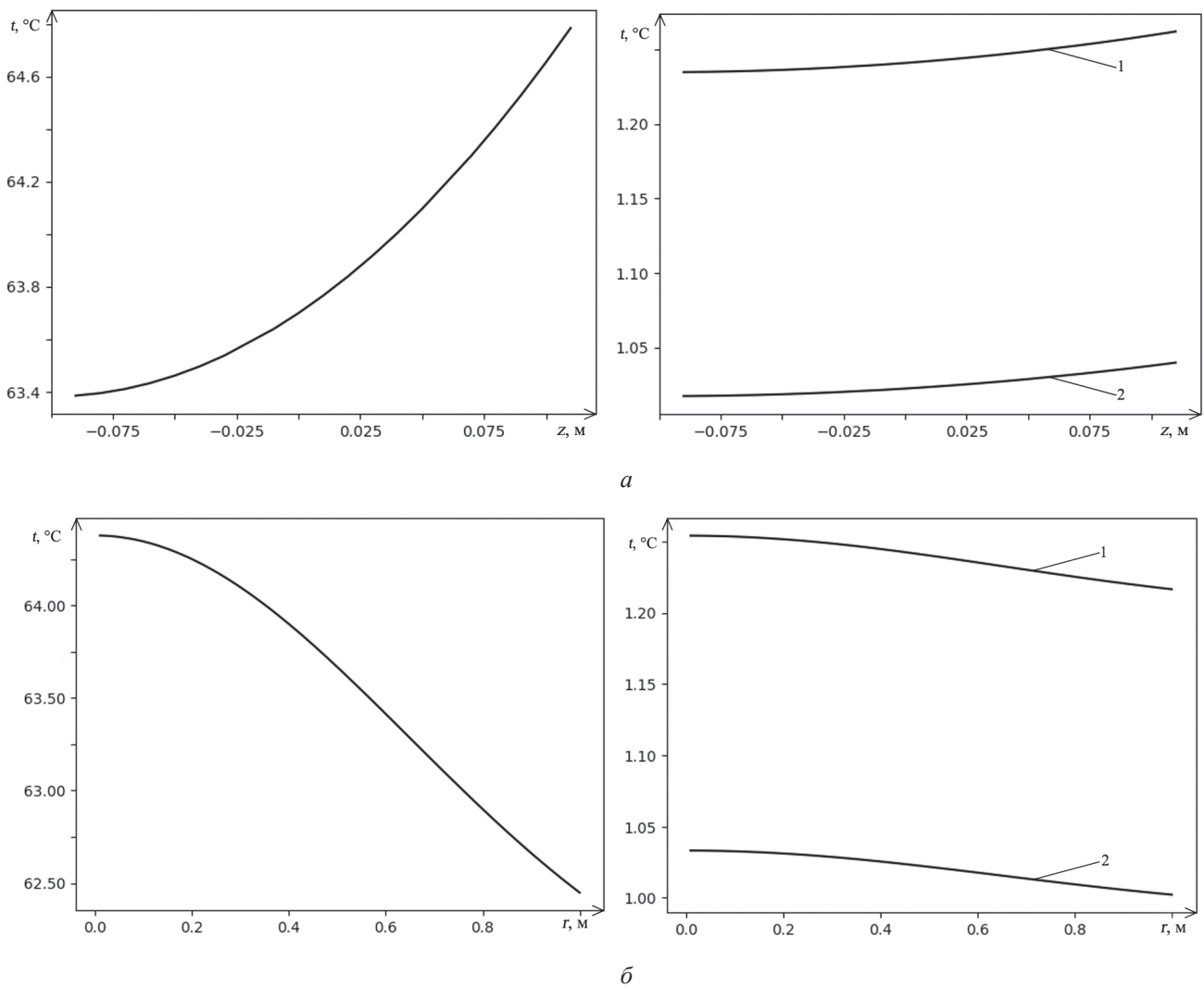


Рис. 2. Залежність температури від просторових аксіальної (а) та радіальної (б) координат / Dependence of temperature on spatial conditions axial (a) and radial (b) coordinates

Практична значущість результатів дослідження – на підставі отриманих аналітичних розв’язків лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для ізотропних теплоактивних просторових середовищ з внутрішнім нагріванням можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу теплових режимів у конструкційних вузлах та окремих елементах гальмівної системи транспортних засобів, підбирання термостійких матеріалів для проектування гальмівних конструкцій та визначення оптимальних значень температури для ефективного гальмування.

Висновки / Conclusions

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурних полів, а надалі й аналізу теплових режимів, зумовлених локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами для гальмівних конструкцій, які геометрично описано ізотропною теплоактивною просторовою структурою у вигляді шару. В результаті цього підвищено точність визначення температурних полів, що істотно впливає на ефективність методів проектування гальмівних систем, окремі елементи та вузли яких зазнають внутрішніх локальних теплових навантажень. За

результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки:

За допомогою лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів можна виконувати аналіз температурних режимів, зумовлених локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами для конструкцій, які геометрично описано ізотропною просторовою структурою у вигляді шару.

Використано перетворення Кірхгофа, яке дало змогу звести нелінійну крайову задачу теплопровідності до лінійної та одержати у замкненому вигляді її аналітичний розв’язок.

На підставі отриманих аналітичних розв’язків як для лінійної, так і для нелінійної крайових задач теплообміну запропоновано розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації. Надалі плануємо виконати дослідження для низки матеріалів, які застосовують під час проектування гальмівних систем транспортних засобів, щодо впливу їх термочутливості на розподіл температури із використанням наведених розроблених лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів та аналізу теплових режимів у теплоактивних просторових середовищах.

Запропоновано враховувати термочутливість конструкційних матеріалів для певних інтервалів температур, що істотно ускладнює розв'язування відповідних нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач дещо адекватніше до реального фізичного процесу описують поведінку температури як функції просторових координат.

Розроблено обчислювальний алгоритм і програмні засоби визначення числових значень температури та геометричного відображення її поведінки за просторовими координатами.

References

1. Towoju, O. A. (2019). Braking pattern impact on brake fade in an automobile brake system. *Journal of engineering sciences*, 6(2), 11–16. [https://doi.org/10.21272/jes.2019.6\(2\).e2](https://doi.org/10.21272/jes.2019.6(2).e2)
2. Ricardo Andres Garcia Leon, & Eduar Perez Rojas (2017). Analysis of the amount of heat flow between cooling channels in three vented brake discs. *Industrial and systems engineering*, 21(1), 1–20.
3. Holenko, K., Dykha, O., Padgurskas, J., & Babak, O. (2023). Thermal and stress-strain state of friction pairs in ventilated disc brakes of lightweight vehicles. *Problems of Tribology*, 28(1/107), 41–50. <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2023-107-1-41-50>
4. Sanil, Kalekar, Devendra, Prabhu, Tejal, Raut, & Ninad, Pande (2021). Heat transfer analysis of automobile disc brake using simulation software. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 8(5), 2593–2601.
5. Mavi, A. B., Altioikka, Gunduz, & Arslan, O. (2021). Thermodynamic analysis of an automobile brake system. *Turkish Journal of Electromechanics & Energy*, No. 6(3), 96–102.
6. Havrysh, Vasylysh, & Kochan, Volodymyr. (2023). Mathematical models to determine temperature fields in heterogeneous elements of digital with thermal sensitivity taken into account. Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS' 2023, 2, 983–991. Retrieved from: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10348875>
7. Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., Ukhanska, O. M., & Loik, V. B. (2019). Determination of temperature fields in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universitetu*, 1, 94–100. Retrieved from: <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2023-107-1-41-50>
8. Havrysh, V., Ovchar, I., Baranetskiy, Y., Serduik, P., & Ivasyk, N. (2017). Development and analysis of mathematical models for the process of thermal conductivity for piecewise uniform elements of electronic systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1(5–85), 23–33. Retrieved from: <https://journals.uran.ua/eejet/article/view/92551>
9. Havrysh, V. I., & Kosach, A. I. (2012). Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous layer with foreign inclusion. *Materials Science*, 47(6), 773–782. Retrieved from: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11003-012-9455-4>
10. Gavrysh, V., Tushnytskyi, R., Pelekh, Y., Pukach, P., & Baranetskiy, Y. (2017). Mathematical model of thermal conductivity for piecewise homogeneous elements of electronic systems. 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics, CADSM 2017, *Proceedings*, 333–336. Retrieved from: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7916146>
11. Adamowicz, A., & Piotr, G. (2011). Influence of convective cooling on a discbrake temperature distribution during repetitive braking. *Applied Thermal Engineering*, 31(14), 2177–2185. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2011.05.016>
12. Zaini, D. (2014). Braking system modeling and brake temperature response to repeated cycle. *Mechatronics, Electrical Power, and Vehicular Technology*, 5, 123–128. <https://doi.org/10.14203/j.mev.2014.v5.123-128>
13. Park, Sung Bong, & Lee, Kwan Soo (2007). An investigation of local heat transfer characteristics in a ventilated disc brake with helically fluted surfaces. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 21, 2178–2187. <https://doi.org/10.1007/BF03177478>
14. Yu-Ching Yang, & Wen-Lih Chen (2011). A nonlinear inverse problem in estimating the heat flux of the disc in a disc brake system. *Applied Thermal Engineering*, 31(14–15), 2439–2448. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2011.04.008>
15. Mazidi, H. & Jalalifar, S. (2011). Mathematical Modeling of Heat Conduction in a Disk Brake System During Breaking. *Asian Journal of Applied Sciences*, 4(2), 119–136. <https://doi.org/10.3923/ajaps.2011.119.136>

V. I. Havrysh, R. V. Zinko

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELS FOR ANALYSIS OF TEMPERATURE REGIMES IN VEHICLE BRAKING SYSTEMS

Linear and non-linear mathematical models for the determination of the temperature field, and subsequently for the analysis of temperature regimes in the braking systems of vehicles, which are geometrically depicted as isotropic spatial heat-active media that are subject to internal local thermal heating, have been developed. With the use of classical methods, it is not possible to obtain analytical solutions of linear and nonlinear boundary value problems of mathematical physics in a closed form. This is especially the case when the right-hand sides of differential equations with partial derivatives and boundary conditions are discontinuous functions. The given approach is based on the application of the apparatus of generalized functions to describe the local concentration of thermal influence. This made it possible to apply the integral transformation and, on this basis, to obtain analytical solutions of both linear and nonlinear boundary value problems. In the case of a nonlinear boundary value problem, the Kirchhoff transformation was applied, using which the original nonlinear heat conduction equation and nonlinear boundary conditions were linearized, and as a result, a linearized second-order differential equation with partial derivatives and boundary conditions with a discontinuous right-hand side were obtained. To solve the linear boundary value problem, as well as the obtained linearized boundary value problem with respect to the Kirchhoff transformation, the Henkel integral transformation method was used, as a result of which analytical solutions of these problems were obtained. For a heat-sensitive environment, as an example, a linear dependence of the coefficient of thermal conductivity of the structural material of the structure on temperature, which is often used in many practical problems, was chosen. As a result, an analytical relationship was obtained for determining the temperature distribution in this medium. On the basis of the developed mathematical models, a computational algorithm

was created and on this basis, software tools were created, using which the heat exchange processes in the middle of the brake structures for the selected materials of the brake pads were analyzed in terms of their effectiveness, as well as the determination of the optimal temperature values for the effective operation of the braking system of vehicles. The developed linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field in spatial heat-active media with internal heating make it possible to analyze their thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can cause the destruction of not only individual nodes and individual elements, but also the entire structure.

Keywords: temperature field, isotropic spatial heat-active environment, thermal conductivity of the material, convective heat exchange, local internal heating, heat resistance of structures.

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. **Email:** gavryshvasyl@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Зінько Роман Володимирович, д-р техн. наук, доцент, кафедра автомобілебудування. **Email:** rzinko@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-3275-8188>

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Зінько Р. В. Математичні моделі для аналізу температурних режимів у гальмівних системах транспортних засобів. *Український журнал інформаційних технологій*. 2024, т. 6, № 1. С. 102–108.

Citation APA: Havrysh, V. I., & Zinko, R. V. (2024). Mathematical models for analysis of temperature regimes in vehicle braking systems. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 6(1), 102–108. <https://doi.org/10.23939/ujit2024.01.102>