

# Мінімаксне наближення залежності температури від опору термістора

Роман Малачівський, Національний університет «Львівська політехніка», Ростислав Бунь,

WSB Університет, Польща,

Яцек Маєвський, Люблінський технічний університет, Польща,

Ігор Мединський, Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України

<https://doi.org/10.23939/istcmtm2024.04.020>

## Анотація

Обґрунтовано доцільність застосування мінімаксного наближення для обчислення параметрів моделей термометричної характеристики термісторів. Мінімаксне наближення забезпечує досягнення найменшої можливої похибки відтворення результатів калібрування, тоді як метод найменших квадратів мінімізує суму квадратів похибок. Для опису залежності температури від опору термістора запропоновано застосування раціонального виразу. Ефективність моделі у вигляді раціонального виразу проілюстровано на реальних результатах калібрування. Ця модель забезпечує вищу точність відтворення температури в порівнянні з узагальненими моделями Стейнхарта-Харта.

**Keywords:** термістор, термометрична характеристика, метод найменших квадратів, мінімаксна апроксимація, раціональний вираз, узагальнення моделі Стейнхарта-Харта.

## 1. Вступ

Вдосконалення технології виготовлення термісторів розширює їхнє практичне використання для вимірювання і відстеження температури. Окрім звичного застосування термісторів в біомедичних приладах, автомобільних електронних системах і інших технічних пристроях [1 – 5], термістори почали застосовувати для високоточних [6 – 9] і криогенних вимірювань температури [8, 10, 11]. Зараз їх використовують в авіабудуванні, в космічній і інших високотехнологічних галузях [1]. Розширення областей використання термісторів спонукає до пошуку більш точних і оптимальних моделей їхньої термометричної характеристики [1, 6, 12].

## 2. Актуальність

Практичне застосування термісторів ускладнюється суттєвою нелінійністю їхньої термометричної характеристики [13]. Для опису залежності температури від опору використовують здебільшого узагальнення моделі Стейнхарта-Харта [6, 12], параметри яких обчислюють методом найменших квадратів. В праці [14] для обчислення параметрів моделі термометричної характеристики термісторів запропоновано використання мінімаксного наближення. Застосування мінімаксного наближення для обчислення значень параметрів моделі термометричної характеристики забезпечує досягнення найменшої можливої похибки відтворення результатів калібрування в досліджуваному діапазоні [15]. Моделі розраховані за методом найменших квадратів допускають можливу наявність окремих точок, в яких значення похибки значно перевищує її середнє значення [16]. Тому для обґрунтування точності моделей, отриманих за методом найменших квадратів, розраховують їхню невизначеність [12, 17].

## 3. Мета

Обґрунтувати доцільність використання мінімаксного наближення для обчислення значень параметрів термометричної характеристики термісторів. Проілюструвати ефективність застосування раціонального виразу для опису залежності температури від опору термістора.

## 4. Застосування мінімаксного наближення для обчислення параметрів термометричної характеристики термісторів

Для підтвердження ефективності використання мінімаксного наближення для обчислення параметрів моделей термометричної характеристики термісторів використаємо результати калібрування, подані в праці [6]. В цій праці наведено результати калібрування, отримані в травні 2014 року й у лютому 2015 року. Порівняння результатів застосування мінімаксного наближення з методом найменших квадратів проілюструємо з використанням чотири параметричного узагальнення моделі Стейнхарта-Харта [6]

$$T_4(r) = 1 / \sum_{i=0}^3 c_i (\ln(r))^3, \quad (1)$$

де  $T$  – абсолютна температура в кельвінах,  $r = R_T/R_s$  – відносний опір при температурі  $T$ ,  $R_T$  – опір при температурі  $T$ ,  $R_s = 1001.65 \Omega$ , а  $c_i$ ,  $i = 0, 3$  – невідомі параметри. В праці [6] вказано доцільність застосування для термометричної характеристики термісторів моделі (1). Порівняно з моделлю Стейнхарта-Харта, в якій  $c_2 = 0$ , вона точніша. Ефективність моделі (1) підтверджують також автори праць [2, 17]. Значення параметрів  $c_i$ ,  $i = 0, 3$  моделі (1) вони обчислюють з використанням нелінійного методу найменших квадратів.

За поданими в [6] результатами калібрування модель термометричної характеристики термістора вигляду (1) з використанням методу найменших квадратів

$$T_{4,14,lsq}(r) = 1 / \left( \begin{aligned} &6.1510417037_{10}^{-8} x^3 + 2.26274538698_{10}^{-6} x^2 + \\ &+ 2.56520635435_{10}^{-4} x + 3.35437275588_{10}^{-3} \end{aligned} \right) \quad (2)$$

забезпечує відтворення їхніх значень з абсолютною похибкою 0.94 мК за даними калібрування, отриманими в травні 2014 р., і з похибкою 1.14 мК

$$T_{4,15,lsq}(r) = 1 / \left( \begin{aligned} &6.5985545833347_{10}^{-8} x^3 + 2.267036730985_{10}^{-6} x^2 + \\ &+ 2.565168779395_{10}^{-4} x + 3.3543781818_{10}^{-3} \end{aligned} \right) \quad (3)$$

за даними калібрування, отриманими в лютому 2015 р. В моделях (2) і (3)  $r = R_T/R_s$ , а  $x = \ln(r)$ . Аналогічна модель, обчислена з використанням мінімаксного наближення дані за травень 2014 р.

$$T_{4,14,minm}(r) = 1 / \left( \begin{aligned} &5.78216036867_{10}^{-8} x^3 + 2.2566107516_{10}^{-6} x^2 + \\ &+ 2.5652396097358_{10}^{-4} x + 3.3543783803395_{10}^{-3} \end{aligned} \right) \quad (4)$$

відтворює з абсолютною похибкою 0.64 мК, а модель

$$T_{4,15,minm}(r) = 1 / \left( \begin{aligned} &5.95286858_{10}^{-8} x^3 + 2.268338145697_{10}^{-6} x^2 + \\ &+ 2.5652822930196_{10}^{-4} x + 3.354376775298_{10}^{-3} \end{aligned} \right) \quad (5)$$

забезпечує відтворення температури з абсолютною похибкою 0.879 мК даних калібрування за лютий 2015 р. Графіки похибок моделей (2) – (5) наведено на рис. 1. Графіки похибки моделей (4) і (5), значення параметрів яких обчислено з використанням мінімаксного наближення, зображено товстими лініями.

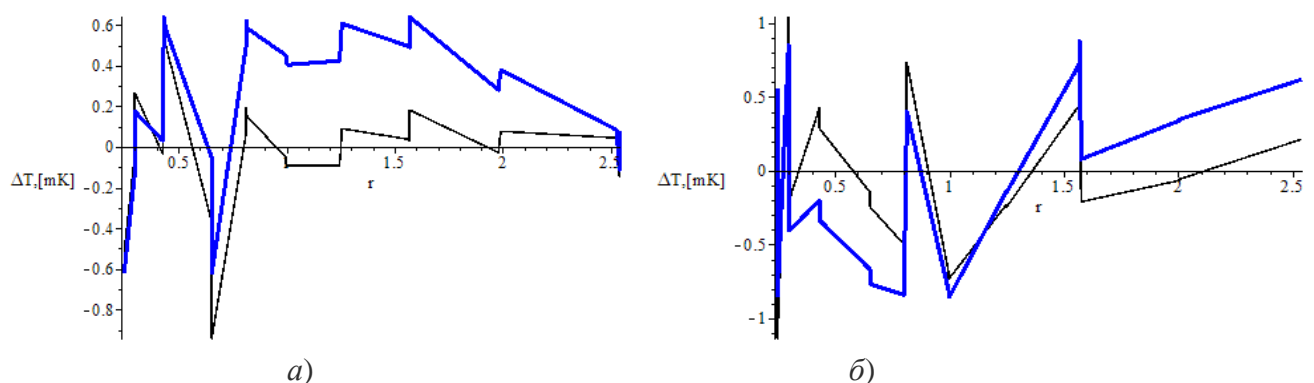


Рис. 1. Графіки абсолютної похибки: а) моделей (2) і (4), б) моделей (3) і (5)

З поданих на рис. 1 графіків слідує, що похибка моделей, параметри яких обчислено з використанням мінімаксного наближення рівномірно розподілена по всьому досліджуваному діапазоні зміни опору, тоді як у випадку застосування методу найменших квадратів трапляються окремі точки, в яких похибка відтворення результатів калібрування значно більша за середнє значення похибки. Порівняння похибок відтворення результатів калібрування термістора моделями (2) – (5) наведено в табл. 1.

Табл. 1. Похибки відтворення результатів калібрування моделями (2) – (5)

Дані калібрування	Модель (2)		Модель (4)
травень 2014 р.	$r = 0.653541$	$\Delta T = 0.942$ мК	$\Delta T = 0.64$ мК

	Модель (3)		Модель (5)
лютий 2015 р.	$r = 0.249662$	$\Delta T = 1.136 \text{ mK}$	$\Delta T = 0.879 \text{ mK}$

Отже, використання мінімаксного наближення для обчислення параметрів моделей термометричної характеристики термістора в порівнянні з методом найменших квадратів забезпечує вищу точність відтворення температури в досліджуваному діапазоні. Похибка моделі, параметри якої обчислено за мінімаксним критерієм, еквівалентна точності відтворення результатів калібрування. Для обґрунтування точності моделей, побудованих методом найменших квадратів, додатково обчислюють невизначеність. Тому застосування мінімаксного наближення для обчислення параметрів моделей за високоточними даними є доцільнішим.

## 5. Застосування раціонального виразу для моделювання термометричної характеристики термісторів

За результатами калібрування термістора [6] побудуємо модель термометричної характеристики термістора у вигляді раціонального виразу

$$T(r) = \frac{a_0 + a_1 \ln(r) + a_2 \ln(r)^2}{b_0 + \ln(r)}, \quad (6)$$

в якому  $T$  – абсолютна температура в Кельвінах,  $r = R_T/R_s$  – відносний опір, а  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  і  $b_0$  – невідомі параметри. Значення параметрів моделі (6) обчислюватимемо із застосуванням мінімаксного наближення. Метод обчислення параметрів мінімаксного наближення раціональним виразом описано в [18, 19].

Модель термометричної характеристики для даних калібрування за травень 2014 р.

$$T_{14, \text{minm}}(r) = \frac{4268.786635 - 28.33192273x - 0.7000487623x^2}{14.31912375 + x}, \quad (7)$$

де  $r = R_T/R_s$ ,  $x = \ln(r)$ , забезпечує відтворення температури з абсолютною похибкою 0.622 мК. Для підтвердження ефективності застосування мінімаксного наближення для обчислення параметрів моделі (7) побудуємо модель вигляду (6), параметри якої обчислено за методом найменших квадратів

$$T_{14, \text{lsq}}(r) = \frac{4260.2745447 - 27.68140037x - 0.7542877542x^2}{14.290550574 + x}. \quad (8)$$

Модель (8) забезпечує відтворення температури з абсолютною похибкою 0.978 мК.

Для даних калібрування за лютий 2015 року модель

$$T_{15, \text{minm}}(r) = \frac{4290.51969658 - 30.0016619429x - 0.589193411759x^2}{14.2907771854 + x} \quad (9)$$

забезпечує відтворення температури з абсолютною похибкою 0.73 мК. Модель, параметри якої обчислено за методом найменших квадратів

$$T_{15, \text{lsq}}(r) = \frac{4260.3340722 - 27.6845505038x - 0.754059735366x^2}{14.2907771854 + x} \quad (10)$$

забезпечує відтворення температури даних калібрування за лютий 2015 року з абсолютною похибкою 0.96 мК.

Графіки абсолютної похибки моделей (7) – (10) зображено на рис. 2.

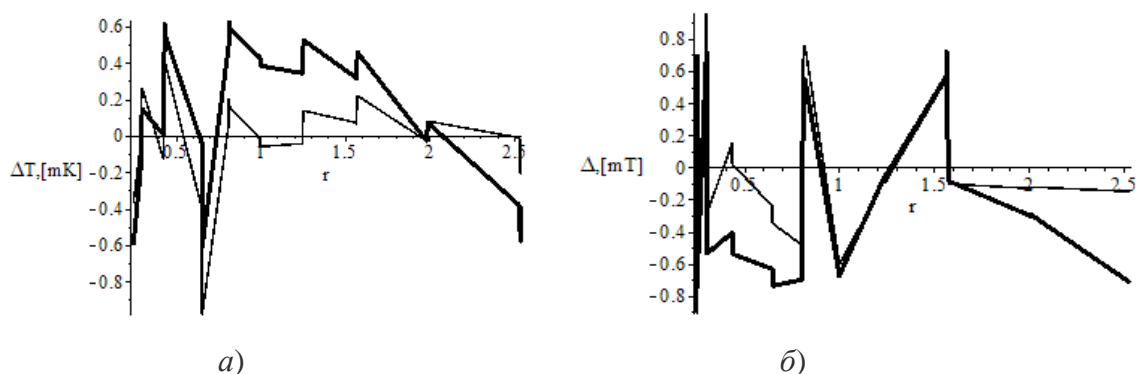


Рис. 2. Графіки абсолютної похибки: а) моделей (7) і (8), б) моделей (9) і (10)

На графіку, зображеному на рис. 2, по горизонтальній осі відкладено значення  $r = R_T/R_s$ , а по вертикальній – значення абсолютної похибки відтворення температури моделями. Графіки абсолютної похибки моделей (7) і (9) зображено товстішою лінією. З вигляду графіків абсолютної похибки моделей (7) і (9) слідує, що похибка відтворення значення температури в досліджуваному інтервалі рівномірно рознесена по всьому діапазону. Похибка моделі (7) не перевищує 0.622 мК, моделі (9) – 0.73 мК. Абсолютна похибка моделі (8), параметри якої обчислено за методом найменших квадратів, становить 0.978 мК, моделі (10) – 0.96 мК, що значно більше середнього значення похибки в досліджуваному діапазоні. Тому при використанні методу найменших квадратів якість моделі характеризують невизначеністю [12], [17]. Якість моделі, параметри якої обчислено за мінімаксним методом, визначає похибка наближення [15].

Порівняння похибок відтворення результатів калібрування термістора моделями (7) – (10) наведено в табл. 2.

**Табл. 2.** Похибки відтворення результатів калібрування термістора моделями (7) – (10) і моделями (4) та (5)

Дані калібрування	Модель (8)		Модель (7)	Модель (4)
травень 2014 р.	$r = 0.653541$	$\Delta T = 0.978$ мК	$\Delta T = 0.622$ мК	$\Delta T = 0.64$ мК
	Модель (10)		Модель (9)	Модель (5)
лютий 2015 р.	$r = 0.2984739$	$\Delta T = 0.96$ мК	$\Delta T = 0.73$ мК	$\Delta T = 0.879$ мК

З поданих в табл. 2 результатів слідує, що моделі термометричної характеристики термістора у вигляді раціонального виразу (6) відтворюють результати калібрування з вищою точністю, ніж узагальнення моделі Стейнхарта-Харта (1).

## 6. Висновок

Застосування мінімаксного наближення для обчислення значень параметрів моделей термометричної характеристики термісторів забезпечує досягнення найменшої можливої похибки відтворення результатів калібрування. Похибка моделі, параметри якої обчислено за мінімаксним критерієм, еквівалентна точності відтворення результатів калібрування. Тому в порівнянні з моделями побудованими за методом найменших квадратів, немає потреби в обчисленні невизначеності.

Використання раціонального виразу для моделювання термометричної характеристики термісторів забезпечує отримання вищої точності відтворення результатів калібрування в порівнянні з традиційно використовуваним узагальненням моделі Стейнхарта-Харта. Результати обчислення параметрів цієї моделі також підтверджують ефективність використання мінімаксного наближення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] D. R. White, K. Hill, D. del Campo, C. Garcia Izquierdo, *Guide on Secondary Thermometry – Thermistor Thermometry*. BIPM, Consultative Committee for Thermometry (CCT), 2014.
- [2] T. Hughes-Riley, P. Lugoda, T. Dias, C. L. Trabi, R. H. Morris, “A Study of thermistor performance within a textile structure”. *Sensors*. 2017. Vol. 17, Iss. 8. Article number 1804. <https://doi.org/10.3390/s17081804>.
- [3] K. Esenowo Jack, E. O. Nwangwu, I. Agwu Etu, E. U. Osuagwu, “A simple thermistor design for industrial temperature measurement,” *IOSR J. Electr. Electron. Eng.*, Vol. 11, Iss. 5, p. 57–66, 2016. <https://doi.org/10.9790/1676-1105035766>.
- [4] Li Ting, Wang Hongjun, Sun Jianping, Hao Xiaopeng, Wang Chengke, Yu Jiao, “Exploration of Calibration Methods for Ocean NTC Thermistor Thermometers”. *J. Metrology Science and Technology*, 2021, Vol. 65. Iss. 5, p. 55–61. <https://doi.org/10.12338/j.issn.2096-9015.2020.9027>.
- [5] Damir Ilić, Josip Butorac, Luka Ferković, “Temperature measurements by means of NTC resistors and a two-parameter approximation curve”, *Measurement*. Vol. 41, no. 3, April 2008, p. 294-299. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2006.11.007>.
- [6] Steffen Rudtsch, Christoph von Rohden, “Calibration and self-validation of thermistors for high-precision temperature measurements”, *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 2015, Vol. 76, p. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.07.028>.
- [7] Guang Liu, Liang Guo, Chunlong Liu, Qingwen Wu, “Evaluation of different calibration equations for NTC thermistor applied to high-precision temperature measurement”, *Measurement*, 2018. Vol. 120, p. 21-27. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.02.007>.
- [8] V. F. Mitin et al., “Nanocrystalline SiC Film thermistors for cryogenic applications”, *Review of Scientific Instruments*. Feb 2018, Vol. 89, no. 2, p. 025004-1–025004-5. <https://doi.org/10.1063/1.5024505>.

- [9] D. J. Li, C. G. Xing, "Linearization of high precision human body temperature measurement circuit based on ntc thermistor", *Appl. Mech. Mater.*, 2015. Vol. 713–715, p. 381–384. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.713-715.381>.
- [10] X. Gong, X. Tang, Y. Li, M. Y. Zude Lin and J. Liu, "Investigation the Minimum Measurement Points for Calibration a High Precision NTC Thermistors in Cryogenic Field," *2021 IEEE 16th International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (NEMS)*, Xiamen, China, 2021, p. 1088-1091. <https://doi.org/10.1109/NEMS51815.2021.9451310>.
- [11] Y. Lan, S. Yang, G. Chen, S. Yang, "Characteristics of a Type of NTC Thermistors for Cryogenic Applications". *Advances in Materials Physics and Chemistry*, 2020. Vol. 10, p. 167–177. <https://doi.org/10.4236/ampc.2020.108012>.
- [12] Chiachung Chen, "Evaluation of resistance–temperature calibration equations for NTC thermistors". *Measurement*, 2009, Vol. 42. no. 7, p. 1103–1111. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2009.04.004>.
- [13] A. Li, H. Wang, L. Dong, Q. Han, M. Wen and X. Wen, "Research on the Adaptability of Thermistor Calibration Equations," in *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 26, no. 2, pp. 13-18, April 2023, <https://doi.org/10.1109/MIM.2023.10082999>.
- [14] R. P. Malachivskiy, R. A. Bun, O. V. Shevchuk, "Approximation of Thermometric Characteristics of Thermistors", *Computer Technologies of Printing*, 2023. Vol. 50, no. 2, p. 87–97. <https://doi.org/10.32403/2411-9210-2023-2-50-87-97>, (in Ukrainian).
- [15] E. Ya. Remez, "*Fundamentals of the Numerical Methods of Chebyshev Approximation*". Naukova Dumka, Kyiv, 1969, (in Russian).
- [16] V. A. Yatsuk, P. S. Malachivskyy, "*Methods to Improve Measurement Accuracy*", Beskid Bit, Lviv, 2008, (in Ukrainian).
- [17] D. R. White, "Interpolation Errors in Thermistor Calibration Equations". *Int J Thermophys*, 2017. Vol 38. Iss. 59. <https://doi.org/10.1007/s10765-017-2194-x>.
- [18] P. S. Malachivskyy, Y. V Pizyur, R. P. Malachivskiy, "Chebyshev approximation by a rational expression for functions of many variables", *Cybernetics and Systems Analysis*, 2020. Vol. 56. no. 5, p. 811-819. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00302-0>.
- [19] P. S. Malachivskyy, L. S. Melnychok, Y. V Pizyur, "Chebyshev Approximation of Multivariable Functions by a Constrained Rational Expression", *Cybernetics and Systems Analysis*, 2023. Vol. 59. no. 1, p. 146–159. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00552-8>.