

**В. І. Гавриш, Р. Р. Шкраб***Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ЕЛЕМЕНТАХ ЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ З ЛОКАЛЬНИМ ЗОВНІШНІМ НАГРІВАННЯМ ТА ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а відтак і аналізу температурних режимів у ізотропних просторових середовищах, які зазнають зовнішнього локального теплового навантаження. Для нелінійної крайової задачі застосовано перетворення Кірхгофа, із використанням якого лінеаризовано нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови, у результаті отримано лінеаризоване диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними та розривною правою частиною і частково лінеаризовані крайові умови. Для остаточної лінеаризації частково лінеаризованих крайових умов виконано апроксимацію температури за просторовою координатою на межовій поверхні термочутливого середовища кусково-сталого функцією, що дало змогу одержати лінійну крайову задачу відносно перетворення Кірхгофа. Для розв'язування лінійної крайової задачі, а також отриманої лінеаризованої крайової задачі використано метод інтегрального перетворення Фур'є, одержано аналітичні розв'язки цих задач. Для термочутливого середовища, як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу структури від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. У результаті отримано аналітичний розв'язок у вигляді невластивого інтеграла для визначення розподілу температури в цьому середовищі. Виконано числовий аналіз поведінки температури як функції просторових координат для заданих значень геометричних і теплофізичних параметрів. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу теплообмінних процесів, зумовлених локально зосередженим тепловим потоком, розроблено програмні засоби, із використанням яких виконано геометричне зображення розподілу температури залежно від просторових координат. Розроблені лінійна та нелінійна математичні моделі визначення температурного поля у просторових середовищах із зовнішнім нагріванням свідчать про їх адекватність реальному фізичному процесу. Вони дають змогу аналізувати термостійкість таких середовищ. Як наслідок, уможливується її підвищення і захист від перегрівання, яке може спричинити вихід із ладу не тільки окремих вузлів та їх окремих елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле, ізотропне просторове середовище, теплопровідність, конвективний теплообмін, локальне зовнішнє нагрівання, термочутливість матеріалу, тепловий потік.

Вступ / Introduction

Теплообмін є фундаментальним фізичним процесом, що відбувається внаслідок перенесення теплової енергії між фізичними системами чи частинами системи через їх межі. Цей процес відіграє важливу роль у функціонуванні багатьох електронних систем. Теплопровідність – міра здатності конструкційного матеріалу переносити теплову енергію. Коефіцієнт теплопровідності є основним параметром, який впливає на температурні поля в конструкційних матеріалах, а отже, і на працездатність загалом електронного пристрою. Теплообмін і супутній масообмін є критично важливими процесами, що мають вирішальне значення для ефективності та оптимізації різноманітних теплоенергетичних, енергетичних та хіміко-технологічних систем у промисловому секторі. Незважаючи на складність цих процесів, їх правильне розуміння та використання має вирішальне значення для підвищення продуктивності та ефективності багатьох промислових операцій. Ці процеси та-

кож відіграють вирішальну роль у різних природних та технічних явищах. Вони безпосередньо впливають на температурний стан навколишнього середовища та житлових приміщень, дають змогу контролювати прогрес робочих процесів у різноманітних технологічних установках, і загалом сприяють ефективнішому використанню енергії в різних сферах. Тому вивчення та розвиток теорії теплообміну стали предметом інтенсивних наукових досліджень. Особливо активно ця сфера розвивається протягом останніх десятиліть, відповідаючи на зростання потреб таких важливих галузей, як комунальне господарство, атомна енергетика, космонавтика, та багато інших секторів людської діяльності. Це зумовлено не тільки постійним пошуком способів підвищення ефективності та надійності відповідних технологій, але і швидким розвитком розроблення нових матеріалів та технологій, що потребують детального розуміння цих процесів.

Формування температурних полів та управління ними надзвичайно важливі в сучасному світі, зважаючи

на широкий спектр їх застосувань у різних галузях науки та промисловості. Ці процеси становлять основу для розвитку технологій і систем, які забезпечують ефективне передавання тепла, збереження енергії та оптимальне функціонування різних систем. Спричинені температурні поля виникають у системах через нерівномірний розподіл тепла. Цей нерівномірний розподіл може бути результатом різних факторів, таких як зовнішні джерела тепла, наявність теплових джерел всередині системи або різноманітні процеси, що відбуваються в самому середовищі. Управління спричиненими температурними полями вкрай важливе, оскільки воно дає змогу контролювати температуру в різних точках системи, яка досягає критичних значень для безлічі застосувань. Контролювання температури необхідне для оптимальної працездатності систем, забезпечення якості продукції, запобігання пошкодженням або забезпечення комфортних умов для користувачів. Зокрема, виникають проблеми охолодження електронних пристроїв у галузі розтяжної електроніки, де керування температурою важливе, зважаючи на унікальні вимоги та обмеження таких пристроїв, пов'язані з їхньою гнучкістю та використанням матеріалів з низькою теплопровідністю. Одна з важливих проблем, із якою стикаються в цій галузі, – відсутність ефективних способів відведення тепла від електронних компонент. Гнучкі матеріали, які використовують у розтяжній електроніці, мають обмежені властивості теплопровідності, що призводить до підвищення температури пристроїв і може негативно вплинути на їх функціонування та тривалість служби. Науковці розробляють різні підходи до вдосконалення систем охолодження, зокрема використовують нові матеріали, змінюють структуру та дизайн пристроїв, зокрема створюють спеціальні теплопровідні матеріали з високою гнучкістю та ефективними властивостями теплопровідності. Такі матеріали можна впроваджувати в структури пристроїв для поліпшення розподілу тепла та відведення його від електронних компонент. Як наслідок, є можливість забезпечити оптимальну температуру для пристроїв, підвищити їх ефективність та забезпечити стабільну роботу протягом тривалого часу. Інноваційні рішення, які розробляють під час таких досліджень, сприятимуть подальшому розвитку розтяжної електроніки та її успішному впровадженню у різні сфери, зокрема м'яку робототехніку, несучу електроніку, галузь виготовлення медичних пристроїв тощо.

Об'єкт дослідження – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в ізотропних просторових середовищах, які зазнають зовнішнього локального нагрівання.

Предмет дослідження – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для ізотропних просторових середовищ із зовнішнім локальним нагріванням.

Мета роботи – розроблення лінійної та нелінійної математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових середовищ, які зазнають зовнішнього локального нагрівання, що дасть змогу підвищити точність визначення температурних полів, а надалі вплине на ефективність методів проектування сучасних електронних пристроїв.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела, які стосуються розроблення лінійних та нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- подати об'єкти дослідження та їхні лінійні й нелінійні математичні моделі;
- навести спосіб лінеаризації нелінійної математичної моделі;
- отримати аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності;
- розробити алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних режимів у ізотропних просторових середовищах із зовнішнім локальним тепловим нагріванням.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідження температурних режимів у структурах як із однорідних, так і з неоднорідних матеріалів є предметом зацікавлення численних науковців. Урахування цих режимів важливе для встановлення фізичних та хімічних властивостей матеріалів, зокрема для випадку значних температурних коливань, притаманних процесам теплопровідності. Зміни температури спричиняють трансформації властивостей матеріалу, що ускладнює визначення розподілу температури, теплових навантажень і термоеластичного стану конструкцій.

Реконструкція температурного поля на основі обмежених спостережень важлива для терморегулювання електронного обладнання. Для розв'язання такої задачі наведено [1] метод глибинного навчання, що поєднує адаптивний UNet і дрібний багаточаровий перцептрон (MLP). Метод дає змогу перетворити задачу реконструкції температурного поля на задачу регресії зображення до зображення. Адаптивний UNet реконструює загальне температурне поле, а MLP спеціалізується на точному прогнозуванні зон із великими градієнтами температури. Результати числових експериментів, виконаних із використанням даних моделювання скінченими елементами, показують, що максимальні абсолютні похибки реконструйованого температурного поля менші за 1 K. Метод також протестовано для різного розташування джерел тепла і точок спостереження.

Проаналізовано [2] термомеханічні навантаження закріплених колон для поздовжнього теплового нагрівання із різними крайовими умовами. Температурний розподіл визначають методом диференціальних квадратур (DQM). Для аналізу прогину використовують кускову модель колони із рівномірним розподілом температури. Критичне навантаження та режим прогину визначають методом матриці перенесення на основі теорії Ейлера – Бернуллі. Отримані результати підтверджено порівнянням із літературними даними та FEM. Досліджено вплив температури та властивостей матеріалу на прогин та критичне навантаження.

Наведено [3] основні рівняння та набір даних теплової моделі для прогнозування температурних полів і швидкостей нагрівання у разі застосування локалізованих лазерних обробок до сплаву Fe-C-Ni. Модель враховує перехідні властивості матеріалу та зв'язок між температурою та мікроструктурою з наголосом на фазовій залежності теплових параметрів та гістерезисі у фазовій зміні. У моделі передбачено температурні поля, які узгоджуються з експериментальними мікроструктурами в зонах лазерного впливу. Наведену модель можна застосовувати до інших матеріалів, що демонструють твердотільні перетворення під час лазерного обро-

блення. Теплофізичні параметри усереднені, що сприяє похибці отриманих результатів.

Розроблено модель температурного поля для контролю форми сталевих пластин під час загартування роликом. Проаналізовано механізм охолодження та отримано коефіцієнти тепловіддачі для кожної поверхні. Модель ґрунтується на рівнянні теплопровідності, що дає змогу дослідити рівномірність охолодження пластини. Розроблено структуру керування формою пластини, перевірено експериментально [4].

Досліджено [5] вплив керуючих параметрів на безрозмірні швидкість, температуру, тертя шкіри та локальну швидкість теплообміну для двох термічних крайових умов: ньютонівського нагрівання та конвекції. Теплофізичні властивості рідини залишаються сталими протягом усього дослідження для сталої температури поверхні пластини. Геометричне відображення дає змогу аналізувати поведінку теплового потоку та розподіл температури щодо впливу безрозмірних параметрів. Дослідження підтверджують вплив крайових умов на швидкість теплопередачі, причому ньютонівське нагрівання приводить до збільшення швидкості, а конвективне нагрівання спричиняє її зменшення. Це пояснюється нагріванням на межі під час ньютонівського нагрівання, що покращує передавання теплової енергії, на відміну від конвективного нагрівання. Унаслідок цього тепло розсіюється за рахунок рухомої рідини, що обмежує швидкість передавання.

Теплове моделювання електронних пристроїв є одним із найважливіших інструментів оцінювання їх надійності в різних режимах роботи. Наведено [6] теплову модель електронних пристроїв, яка ґрунтується на експериментальних даних вимірювання температури, отриманих інфрачервоною камерою. Ці дані є вхідними для розробленої математичної моделі, яка ґрунтується на методі скінченних різниць і деяких відомих фізичних залежностях. Розроблену модель верифіковано порівнянням даних моделювання з експериментально отриманими. Її можна використовувати для дослідження теплової поведінки пристрою за різних умов експлуатації. Розподіл температури визначено експериментально, що вносить похибку в розроблену математичну модель на основі методу скінченних різниць.

Подано [7] динамічні компактні теплові моделі для прогнозування температури корпусу портативних пристроїв, зокрема смартфона і ноутбука, на основі методу згортки. Моделі дають змогу швидко визначати температуру корпусу, враховуючи ступінчасту реакцію кожного джерела тепла, але обмежені застосуванням до двох пристроїв і є експериментальними. Модель сприяє покращенню теплового проєктування та визначенню стратегії контролю температури на ранніх етапах розроблення.

Наведено розв'язок для сталого стану реакції товстих циліндрів, які зазнають тиску та впливу зовнішнього теплового потоку на внутрішній поверхні [8]. Не враховано впливу температурного градієнта на деформації середовища, що істотно знижує точність моделі.

У більшості портативних електронних пристроїв, окрім температури кількох джерел тепла, тобто температури з'єднання, також необхідно контролювати температуру корпусу, тобто температуру шкіри, щоб захистити роботу користувача. Отже, створення компактної

теплової моделі на рівні пристрою для прогнозування температури шкіри не тільки підвищить ефективність теплового проєктування на ранній стадії, але й допоможе розробити стратегію контролю температури за допомогою моделі. На основі методу згортки розроблено [9] динамічні компактні теплові моделі двох портативних електронних пристроїв – смартфона і ноутбука. Згідно з припущенням про лінійні незмінні в часі системи, температуру шкіри для двох тестових пристроїв можна швидко визначити після того, як буде визначено ступінчасту реакцію кожного джерела тепла. Розроблена модель є експериментальною і не дає змоги визначати температурні режими для більш ніж двох портативних електронних пристроїв.

У праці [10] автори спростили нелінійну тривимірну задачу теплопровідності, звівши її до рівняння Лапласа за допомогою проміжної функції. Запропоновано узагальнену потрібну функцію та отримано загальний розв'язок рівняння Лапласа. Проаналізовано три конкретні задачі: показано, що тепловий потік нелінійної задачі збігається із результатами для лінійної, тоді як температурне поле відрізняється. На плоскій межі дефекту тепловий потік сингулярний, а його інтенсивність пропорційна до кореня четвертого степеня із ширини дефекту.

Удосконалено наявні методи та розроблено нові підходи для створення математичних моделей, які дають змогу аналізувати теплообмін у кусково-однорідних середовищах [11]. Наведено плоскі та просторові моделі теплообміну, в яких диференціальні рівняння містять коефіцієнти, залежні від теплофізичних властивостей фаз та геометричної структури. Розроблено лінійні та нелінійні математичні моделі для визначення температурного поля й аналізу температурних режимів у ізотропних середовищах з локальним тепловим нагріванням [12]. Одержано аналітичні розв'язки та розроблено алгоритми числової реалізації розподілу температури за просторовими координатами. Отримані результати дають змогу аналізувати теплообмінні процеси та підвищувати термостійкість конструкцій.

Досліджено [13] процес теплопровідності в ізотропних шаруватих середовищах із внутрішнім тепловим нагріванням. Розроблено лінійні та нелінійні математичні моделі для визначення температурного поля із використанням узагальнених та запроваджених лінеаризуючих функцій, які дають змогу аналізувати температурні режими.

Аналіз наведених літературних джерел свідчить, що відсутній суворий, логічний, теоретично обґрунтований спосіб для розроблення лінійних та нелінійних математичних моделей теплопровідності для термочутливих середовищ із локальним нагріванням. Комплектуючі елементи сучасних цифрових пристроїв малих розмірів і в них сконцентровано великі теплові потужності. Тому в дослідженнях важливо враховувати теплоактивність цих елементів, термочутливість конструкційних матеріалів та локальність теплового нагрівання.

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі.
Розглянуто ізотропну відносно теплофізичних параметрів пластину завтовшки 2δ з теплоізованими лице-

вими поверхнями, віднесено до декартової прямокутної системи координат $(Oxyz)$. В області $\{(x, l, z): |x| \leq H, |z| \leq \delta\}$ межевої поверхні $L_+ = \{(x, l, z): |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ пластини зосереджено тепловий потік, поверхнева густина якого становить $q_0 = \text{const}$, а на іншій поверхні пластини $L_- = \{(x, -l, z): |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ виконується конвективний теплообмін із навколишнім середовищем згідно із законом Ньютона зі сталою температурою $t_c = \text{const}$ (рис. 1).

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y , який отримано розв'язанням рівняння теплопровідності

$$\Delta \theta(x, y) = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \theta(x, y) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \\ \lambda \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-l} = \alpha \theta(x, y) \Big|_{y=-l}, \\ \lambda \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=l} = q_0 S_-(H - |x|) \end{aligned} \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності пластини; α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні L_- ; $\theta(x, y) = t(x, y) - t_c$; Δ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат; $S_{\pm}(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції,

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Застосовано інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (1) та крайових умов (2). У результаті отримано однорідне звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\theta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\theta} = 0 \quad \frac{d \bar{\theta}(y)}{dy} \Big|_{y=-l} = \frac{\alpha}{\lambda} \bar{\theta}(y) \Big|_{y=-l}, \\ \frac{d \bar{\theta}(y)}{dy} \Big|_{y=l} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda \xi} \sin \xi h, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\bar{\theta}(y)$ – трансформанта функції $\theta(x, y)$; $\bar{\theta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \theta(x, y) dx$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є, $i^2 = -1$.

Загальний розв'язок рівняння (3) знайдено у вигляді

$$\bar{\theta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y},$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування.

Використано крайові умови (4) і на цій основі визначено сталі інтегрування та одержано частковий розв'язок задачі (3), (4)

$$\bar{\theta}(y) = \frac{2q_0 P(\xi, y)}{\lambda \xi^2 \sqrt{2\pi} P(\xi)} \sin H \xi, \quad (5)$$

де

$$P(\xi) = (\lambda \xi + \alpha) e^{2\xi l} - (\lambda \xi - \alpha) e^{-2\xi l};$$

$$P(\xi, y) = (\lambda \xi + \alpha) e^{\xi(l+y)} + (\lambda \xi - \alpha) e^{-\xi(l+y)}.$$

Застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (5). В результаті отримано розв'язок задачі (1), (2) у такому вигляді:

$$\theta(x, y) = \frac{2q_0}{\pi \lambda} \int_0^{\infty} \frac{P(\xi, y)}{\xi^2 P(\xi)} \cos \xi x \sin \xi H d\xi. \quad (6)$$

Внаслідок цього шукане температурне поле в пластині, зумовлене локально зосередженим на межевій поверхні тепловим потоком, виражено формулою (6), з якої можна отримати значення температури в довільній її точці.

Розглянуто ізотропну відносно теплофізичних параметрів термочутливу (теплофізичні параметри залежать від температури) пластину (рис. 1).

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y , який отримали, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності

$$\text{div}[\lambda(t) \text{grad} t(x, y)] = 0 \quad (7)$$

із крайовими умовами

$$\begin{aligned} t(x, y) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-l} = 0, \\ \lambda(t) \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=l} = q_0 S_-(H - |x|), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності термочутливої пластини.

Розглянуто перетворення Кірхгофа

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{t(x, y)} \lambda(\zeta) d\zeta, \quad (9)$$

де λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару.

Продиференційовано вираз (9) за змінними x та y і отримано співвідношення

$$\lambda^0 \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial x} = \lambda(t) \frac{\partial t(x, y)}{\partial x}, \quad \lambda^0 \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y} = \lambda(t) \frac{\partial t(x, y)}{\partial y},$$

із урахуванням яких вихідне рівняння (7) та крайові умови (8) перетворено до такого вигляду:

$$\Delta \vartheta = 0, \quad (10)$$

$$\vartheta(x, y) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-l} = 0;$$

$$\frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=l} = \frac{q_0}{\lambda^0} S_-(H - |x|). \quad (11)$$

Застосовано інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (10) та крайових умов (11) і одержано звичайне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = 0 \quad (12)$$

і крайові умови

$$\left. \frac{d\bar{\vartheta}(y)}{dy} \right|_{y=-l} = 0, \left. \frac{d\bar{\vartheta}(y)}{dy} \right|_{y=l} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi} \sin H\xi, \quad (13)$$

де $\bar{\vartheta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \vartheta(x, y) dx$ – трансформанта функції $\vartheta(x, y)$.

Загальний розв'язок рівняння (12) отримано у вигляді

$$\bar{\vartheta}(y) = C_1 e^{\xi y} + C_2 e^{-\xi y}$$

та з використанням крайових умов (13) визначено сталі інтегрування c_1 і c_2 . У результаті одержано частковий розв'язок задачі (12), (13)

$$\bar{\vartheta}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0 D(\xi, y)}{\lambda^0 \xi^2}, \quad (14)$$

де $D(\xi, y) = \frac{\sin H\xi}{\xi \sinh \xi(h+l)} \cosh \xi(l+y)$.

До співвідношення (14) застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є і визначено вираз для лінеаризованої функції $\vartheta(x, y)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(x, y) = \frac{2q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \xi x \frac{D(\xi, y)}{\xi} d\xi. \quad (15)$$

Шукане температурне поле $t(x, y)$ для наведеної структури визначають за допомогою отриманого нелінійного алгебраїчного рівняння із використанням співвідношень (9), (15) внаслідок підстановки в них конкретного виразу температурної залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу пластини та виконаних певних математичних перетворень.

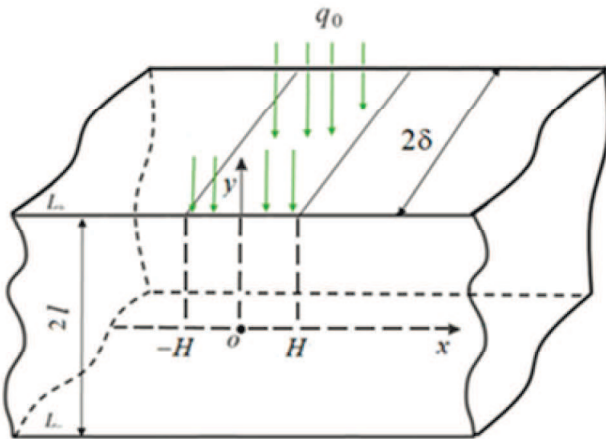


Рис. 1. Ізотропна пластина під дією теплового потоку / Isotropic plate under the influence of heat flow

Частковий приклад. Наведено залежність коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційного матеріалу пластини у вигляді співвідношення

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (16)$$

де λ, k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалу пластини.

Із використанням співвідношення (9) та виразу (16) отримано формулу для визначення температури $t(x, y)$

$$t(x, y) = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - 2k\vartheta(x, y)} \right). \quad (17)$$

Числовий експеримент та аналіз одержаних результатів. Матеріалом пластини вибрано кремній. В інтервалі температур $[0^\circ \text{C}; 1127^\circ \text{C}]$ залежність коефіцієнта теплопровідності кремнію від температури одержано способом інтерполяції у вигляді

$$\lambda(t) = 67,9 \frac{\text{Вт}}{\text{град} \cdot \text{м}} \left(1 - 0,0005 \frac{1}{\text{град}} t \right), \quad (18)$$

що є частковим випадком співвідношення (16).

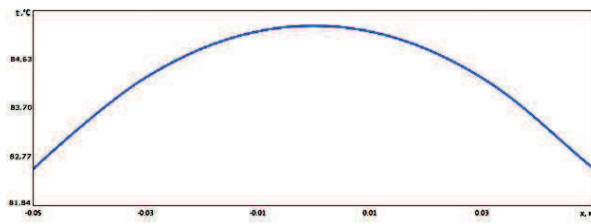
За формулами (6), (17) виконано числові обчислення розподілу температури за просторовими координатами в пластині для сталого значення коефіцієнта теплопровідності для кремнію ($\lambda_1 = 67,9 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$) за температури $t = 27^\circ \text{C}$ та лінійно змінного співвідношення (18). Вибрано такі значення вхідних даних: $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$; $l = 0,1 \text{ м}$; $H = 0,05 \text{ м}$. Проілюстровано зміну температури залежно від просторових координат x для $y = 0$ (рис. 2, а) та y для $x = 0,05$ (рис. 2, б). Із поведінки кривих видно, що температура як функція просторових координат є гладкою та монотонною і досягає максимальних значень на межевій поверхні пластини L_+ , на якій зосереджено тепловий потік. Числові розрахунки виконано з точністю 10^{-6} .

Отримані результати для вибраного матеріалу середовища (кремнію) за лінійної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності відрізняються від результатів, отриманих для сталого коефіцієнта теплопровідності, на 7 %. Незначна їх відмінність пояснюється тим, що значення температурного коефіцієнта теплопровідності для кремнію, як показує співвідношення (18), невелике.

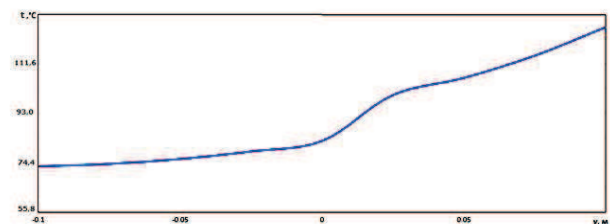
Обговорення результатів дослідження. Крайові задачі теплопровідності сформульовані відповідно до реального фізичного процесу, який досліджують у середовищах із локальним нагріванням. Завдяки цьому диференціальні рівняння теплопровідності та крайові умови чітко описують математичні моделі стаціонарного процесу теплопровідності, які відповідають певній фізичній моделі. Форма кривих на рис. 2, які побудовані на основі отриманих числових результатів аналітичним розв'язанням крайових задач, свідчить про їх відповідність фізичному процесу. Це підтверджується неперервністю температури як функції просторових координат та виконанням крайових умов на краях середовища.

У дослідженнях застосовано теорію узагальнених функцій для ефективного опису локального теплового нагрівання. Як наслідок, крайові умови містять розривну праву частину. Для лінеаризації нелінійної крайової задачі (7)–(8) застосовано перетворення Кірхгофа (9). У результаті отримано лінійну крайову задачу (10)–(11). Використано інтегральне перетворення й Фур'є і одержано аналітичні розв'язки (6), (17) крайових задач, якими визначено розподіл температури, геометрично відображений на рис. 2.

Наведені дослідження стосуються лише стаціонарного процесу теплопровідності. Надалі можна продовжити ці дослідження для нестаціонарних процесів теплопровідності й анізотропних термочутливих середовищ.



a



б

Рис. 2. Залежність температури $\theta(x, y)$ від просторових координат x (a) та y (б) /
Dependence of temperature $t(x, y)$ on spatial x (a) and y (b) coordinates

Оскільки в архітектурі пристроїв сучасної електронної техніки зосереджено окремі вузли та їх елементи у вигляді структур із локальним нагріванням, як наслідок, виникає потреба в розробленні математичних моделей процесу теплопровідності в таких середовищах. Ці моделі можуть бути як лінійними, так і нелінійними для ізотропних середовищ із композитних матеріалів. Унаслідок цього наведені математичні моделі теплопровідності є спрощеними, але на їх основі можна створювати складніші математичні моделі процесу теплопровідності для композитних середовищ.

На підставі отриманих числових розв'язків для лінійної та нелінійної крайових задач теплообміну запропоновано розробити обчислювальні алгоритми та програмні засоби для їх числової реалізації. Це дасть змогу здійснювати дослідження для низки матеріалів, що використовуються під час проектування цифрових електронних пристроїв, щодо впливу термочутливості на розподіл температури.

Запропоновано враховувати термочутливість конструкційних матеріалів середовищ для аналізу теплових режимів, що істотно ускладнює розв'язування відповідних лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності. Шукані розв'язки цих задач адекватніше описують поведінку температури як функції просторових координат.

Дослідження виконано для стаціонарного процесу теплопровідності, тому розроблені моделі є обмеженими і дають змогу визначати зміну температури лише за просторовими координатами. Задачі теплопровідності містять крайові умови першого, другого та третього родів на межових поверхнях середовищ, що є недоліком, хоча й не зменшує загальності досліджень.

Подальші дослідження можуть стосуватися розроблення математичних моделей для визначення температурних полів і аналізу теплових режимів для нестационарного процесу теплопровідності та урахування складніших крайових умов, зокрема теплового випромінювання.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено математичну модель визначення температурного поля та аналізу теплових режимів у середовищах, які зазнають локального зовнішнього теплового впливу. Удосконалено спосіб лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отримано в замкненому вигляді аналітичні розв'язки, які дають змогу аналізувати поведінку температури як функції просторових координат у вузлах та окремих елементах ізотропних середовищ.

Практична значущість результатів дослідження – на підставі отриманих аналітичних розв'язків лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для ізотропних теплоактивних просторових середовищ із зовнішнім нагріванням можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних режимів у окремих конструкційних елементах та вузлах електронних пристроїв, що зазнають локального зовнішнього теплового навантаження, з метою прогнозування їх режимів роботи, ідентифікації невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

Висновки / Conclusions

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурних полів, а надалі й аналізу температурних режимів, зумовлених локально зосередженим зовнішнім тепловим нагріванням у вигляді локально зосередженого теплового потоку для конструкцій, які геометрично описано ізотропною просторовою структурою у вигляді пластини. Внаслідок цього підвищено точність визначення температурних полів, що істотно впливає на ефективність методів проектування пристроїв, окремі елементи та вузли яких зазнають зовнішніх теплових навантажень. За результатами дослідження можна зробити такі основні висновки.

За допомогою лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів виконано аналіз температурних режимів, зумовлених локально зосередженим зовнішнім тепловим нагріванням для конструкцій, які геометрично описано ізотропною просторовою структурою у вигляді пластини.

Використано перетворення Кірхгофа, яке дало змогу звести нелінійну крайову задачу теплопровідності до лінійної та отримати у замкненому вигляді її аналітичний розв'язок.

На підставі отриманих аналітичних розв'язків як для лінійної, так і для нелінійної крайових задач теплообміну запропоновано розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації. Заплановано подальші дослідження для низки матеріалів, які використовують під час проектування цифрових пристроїв, щодо впливу їх термочутливості на розподіл температури у певних інтервалах температур використання наведених розроблених лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у просторових середовищах із зовнішнім локальним нагріванням у вигляді теплового потоку.

Запропоновано враховувати термочутливість конструкційних матеріалів для певних інтервалів температур, що істотно ускладнює розв'язування відповідних нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач дещо адекватніше до реального фізичного процесу описують поведінку температури як функції просторових координат.

References

1. Zhang, Zhong, Sun, Ying, Cao, Xiaojian, Xu, Jiajing, & Yao, Lu. (2024). A slice model for thermoelastic analysis of porous functionally graded material sandwich beams with temperature-dependent material properties. *Thin-Walled Structures*, 198, 111700. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111700>
2. Zhang, Z., Zhou, D., Fang, H., Zhang, J., & Li, X. (2021). Analysis of layered rectangular plates under thermo-mechanical loads considering temperature-dependent material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 92, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.036>
3. Xingwen, Peng, Xingchen, Li, Zhiqiang, Gong, Xiaoyu, Zhao, & Wen, Yao. (2022). A deep learning method based on partition modeling for reconstructing temperature field. *International Journal of Thermal Sciences*, 182, 107802. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2022.107802>
4. Ren, Yonggan, Huo, Ruili, Zhou, Ding, & Zhang, Zhong. (2023). Thermo-Mechanical Buckling Analysis of Restrained Columns Under Longitudinal Steady-State Heat Conduction. *Iranian Journal of Science and Technology – Transactions of Civil Engineering*, 47(3), 1411–1423. <https://doi.org/10.1007/s40996-022-01020-7>
5. Breukelman, H. J., Santofimia, M. J., & Hidalgo, J. (2023). Dataset of a thermal model for the prediction of temperature fields during the creation of austenite/martensite mesostructured materials by localized laser treatments in a Fe-Ni-C alloy. *Data in Brief*, 48, 109110. <https://doi.org/10.1016/j.dib.2023.109110>
6. Wen, Zhang, Min, Wu, Sheng, Du, Luefeng, Chen, Jie, Hu, & Xuzhi, Lai. (2023). Modeling of Steel Plate Temperature Field for Plate Shape Control in Roller Quenching Process. *IFAC-PapersOnLine*, 56(2), 6894–6899. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.493>
7. Zafar Hayat Khan, Khan, W.A., Ibrahim, S. M., Mabood, F. & Zaitang Huang. (2024). Effects of thermal boundary conditions on Stokes' second problem. *Results in Physics*, 60, 107662. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2024.107662>
8. Evstatieva, N., & Evstatiev, B. (2023). Modelling the Temperature Field of Electronic Devices with the Use of Infra-red Thermography. 13th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), Bucharest, Romania, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ATEE58038.2023.10108375>
9. Haoran, L., Jiaqi, Y., & Ruzhu, W. (2023). Dynamic compact thermal models for skin temperature prediction of portable electronic devices based on convolution and fitting methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 210, 124170. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124170>
10. Qianqian Zhang, Haopeng Song, Cun-Fa Gao. (2023). The 3-D problem of temperature and thermal flux distribution around defects with temperature-dependent material properties. *Thermal Science*, 27(5, Part B), 3903–3920. <https://doi.org/10.2298/TSCI221003028Z>
11. Vasyi Havrysh, Volodymyr Kochan. (2023). Mathematical models to determine temperature fields in heterogeneous elements of digital with thermal sensitivity taken into account. Proceedings of the 12 th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS' 2023, 2, 983–991. <https://doi.org/10.1109/IDAACS58523.2023.10348875>
12. Havrysh, V., Dzhumelia, E., Kachan, S., Serdyuk, P., & Maikher, V. (2024). Constructing mathematical models of thermal conductivity in individual elements and units of electronic devices at local heating considering thermosensitivity. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(5 (129)), 25–35. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.304804>
13. Havrysh, V., Dzhumelia, E., Kachan, S., Maikher, V., & Rabiichuk, I. (2024). Construction of mathematical models of thermal conductivity for modern electronic devices with elements of a layered structure. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(5 (130)), 34–44. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.309346>

V. I. Havrysh, R. R. Shkrab

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELING OF THE ANALYSIS OF TEMPERATURE REGIMES IN ELEMENTS OF ELECTRONIC DEVICES WITH LOCAL EXTERNAL HEATING AND IZ TAKING THERMOSENSITIVITY INTO ACCOUNT

The linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field and subsequently analyzing temperature regimes in isotropic spatial media subjected to external local thermal load are developed. In the case of a nonlinear boundary value problem, the Kirchhoff transform is applied to linearize the nonlinear heat conduction equation and nonlinear boundary conditions, resulting in a linearized second-order partial differential equation with a discontinuous right-hand side and partially linearized boundary conditions. For the final linearization of the partially linearized boundary conditions, the temperature was approximated by the spatial coordinate on the boundary surface of the heat-sensitive medium by a piecewise constant function, which made it possible to obtain a linear boundary value problem with respect to the Kirchhoff transform. The method of the integral Fourier transform was used to solve the linear boundary value problem and the resulting linearized boundary value problem, which resulted in the analytical solutions of these problems. For a thermosensitive medium, as an example, the linear dependence of the thermal conductivity of the structural material of a structure on temperature, which is often used in many practical problems, is chosen. As a result, an analytical solution in the form of a non-proprietary integral is obtained to determine the temperature distribution in this medium. A numerical analysis of the temperature behavior as a function of spatial coordinates for given values of geometric and thermophysical parameters is performed. To determine the numerical values of the temperature in the above structure, as well as to analyze the heat transfer processes caused by locally concentrated heat flux, software tools have been developed that have been used to perform a geometric representation of the temperature distribution depending on the spatial coordinates. The

developed linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field in spatial environments with external heating show that they are adequate to the real physical process. They make it possible to analyze such environments in terms of their thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and protect against overheating, which can cause failure not only of individual components and their individual elements, but also of the entire structure.

Keywords: temperature field, isotropic spatial environment, thermal conductivity, convective heat exchange, local external heating, thermal sensitivity of the material, heat flow.

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

Email: vasyli.gavrysh@lpnu.ua; <http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Шкраб Роман Романович, асистент, кафедра програмного забезпечення. Email: roman.r.shkrab@lpnu.ua

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Шкраб Р. Р. Математичне моделювання та аналіз температурних режимів у елементах електронних пристроїв з локальним зовнішнім нагріванням та із урахуванням термочутливості. *Український журнал інформаційних технологій*. 2024, т. 6, № 2. С. 139–146.

Citation APA: Havrysh, V. I., & Shkrab, R. R. (2024). Mathematical modeling of the analysis of temperature regimes in elements of electronic devices with local external heating and taking thermosensitivity into account. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 6(2), 139–146. <https://doi.org/10.23939/ujit2024.02.139>