

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ОДНОФАЗНОГО КОЛЕКТОРНОГО ДВИГУНА

<https://doi.org/>

@ Гавдьо І. Р., 2024

Внаслідок простоти конструкції та можливості отримати значні частоти обертання (до 20000–30000 об./хв) і великі пускові моменти, однофазні колекторні двигуни (ОКД) з послідовним збудженням й надалі перспективні для застосування в приладах електробудової техніки та у ручному електричному інструменті. Під час проєктування нових взірців ОКД, а також модернізації наявних двигунів цього типу необхідно використовувати адекватні математичні моделі ОКД, що й зумовлює актуальність дослідження. Мета статті – розробка математичної моделі перехідних процесів в ОКД на основі колових методів. В основу математичної моделі покладена розгалужена заступна схема магнітопроводу із зосередженими параметрами, яка дає змогу за розмірами магнітного кола, обмотковими даними і миттєвим значенням струму знайти розподіл магнітних потоків у вітках. Заступній схемі магнітопроводу ОКД відповідає система нелінійних рівнянь магнітного стану, складена за методом контурних потоків. У цій системі первинними невідомими є контурні магнітні потоки, а вторинними – магнітні потоки у вітках схеми. Встановлені співвідношення між потоками у вітках та контурними потоками за допомогою матриць з’єднань. Записана нелінійна система рівнянь магнітного кола ОКД у векторній формі. Наведено алгоритм розв’язання цієї системи ітераційним методом Ньютона. Записані рівняння рівноваги напруг та рівняння руху якоря, які необхідно інтегрувати чисельним методом для розрахунку перехідних процесів в ОКД. Використано явний метод чисельного інтегрування, який передбачає на кожному кроці інтегрування розв’язання системи рівнянь магнітного стану, тобто знаходження потоків у вітках заступної схеми. На підставі розв’язання системи рівнянь магнітного стану визначається робочий магнітний потік у повітряному проміжку, електро-рушійна сила обмотки якоря, електромагнітний момент та диференційні індуктивності обмоток якоря та збудження – величини, які входять до рівнянь рівноваги напруг та моментів. Запропонована математична модель перехідних процесів ОКД може бути використана для аналізу цих процесів, а також під час проєктування ОКД.

Ключові слова: однофазний колекторний двигун, заступна схема магнітного кола, рівняння магнітного стану та перехідних процесів.

Постановка проблеми

Однофазні колекторні двигуни з послідовним збудженням мають робочі характеристики, які подібні до характеристик двигунів постійного струму з послідовним збудженням. Цей тип двигунів

широко застосовується в приладах електропобутової техніки (міксери, блендери, швейні машини, порохотяги) та у ручному електричному інструменті (дрилі, тримери, шліфувальні машини, електрорубанки тощо). Застосування ОКД дає змогу отримати значні частоти обертання (до 20000–30000 об./хв), великі пускові моменти та порівняно малу масу для цієї корисної потужності. Порівняно з двигунами постійного струму в ОКД комутація погіршується внаслідок наведення трансформаторної електрорушійної сили в комутуючих секціях обмотки якоря. Цього недоліку позбавлені безщіткові двигуни постійного струму, однак їх використання передбачає застосування схеми керування, що призводить до збільшенні загальної вартості виробу. Отже, застосування ОКД для електропобутових приладів та електроінструменту залишається перспективним, що й зумовлює необхідність їх дослідження.

Актуальність дослідження

Під час проектування нових взірців ОКД, а також модернізації наявних двигунів цього типу необхідно використовувати адекватні математичні моделі ОКД, що й зумовлює актуальність дослідження.

Формулювання мети та завдань статті

Мета статті – розробка математичної моделі перехідних процесів в ОКД на основі колових методів. В основу математичної моделі покладена розгалужена заступна схема магнітопроводу, яка дає змогу за розмірами магнітного кола, обмотковими даними і миттєвим значенням струму знайти розподіл магнітних потоків у вітках та диференційні індуктивності обмоток. За цими даними розв'язуються рівняння перехідних процесів в ОКД.

Завдання статті – складання системи рівнянь, які описують заступну схему магнітопроводу, розробка методу її розв'язання, наведення рівнянь перехідного процесу, а також розробка алгоритму розв'язання рівнянь перехідного процесу за результатами розрахунку магнітного стану ОКД.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У фундаментальній праці [1] наведені рівняння та характеристики ОКД, а також основні настанови щодо проектування двигунів цього типу. Теоретичним та експериментальним дослідженням ОКД для приводу порохотягів присвячені праці [2, 3], в яких для оптимізації конструкції використаний метод скінченних елементів. Моделювання магнітного поля в ОКД за допомогою програмного засобу JMAG проведено у [4]. У [5] запропоновано виготовляти осердя ОКД з магнітно-м'якого композитного матеріалу, що дає змогу зменшити витрати міді, однак такий ОКД поступається за коефіцієнтом корисної дії двигунам відомої шихтованої конструкції. Питання проектного синтезу ОКД на основі комбінованого алгоритму оптимізації, а також із використанням узагальненого і векторного показників якості розглянуті у [6–8].

Польові методи [2–4] у дослідженні ОКД дають змогу отримати найвищу точність розрахунків, однак через трудомісткість їх застосування не завжди доцільне для інженерних задач. Впровадження нової конструкції ОКД [5] у виробництво пов'язане з перебудовою технологічного процесу, що потребує додаткових витрат і економічного обґрунтування. У [6–8] для оптимізації конструкції ОКД використовується пакет прикладних програм для автоматизованого проектування, однак немає даних про допущення, які прийняті під час створення цих програм, та про точність перевірних розрахунків.

На наш погляд, достатньої точності у математичному моделюванні магнітного стану та перехідних процесів в ОКД можна досягти з використання методів електричних і магнітних кіл. Розгалужена заступна схема застосована для аналізу магнітного стану асинхронного двигуна в [9], колекторного двигуна зі збудженням від постійних магнітів у [10], а також однофазного колекторного двигуна в [11]. Висока точність розрахунку магнітного стану колекторного двигуна зі збудженням від постійних магнітів підтверджена експериментально у [12].

Виклад основного матеріалу

1. Заступна схема магнітопроводу та рівняння магнітного стану ОКД

Для двополусної конструкції ОКД у [11] наведена заступна схема магнітного кола з зосередженими параметрами (рис.). У цій схемі магнітні опори замінюють ділянки магнітопроводу, в яких магнітне поле вважаємо однорідним. Ділянкам повітряного проміжку відповідають постійні магнітні опори, а феромагнітним ділянкам – нелінійні магнітні опори, які представлені залежністю намагнічуючої сили від магнітного потоку $F [\Phi]$.

Активна зона якоря під полюсом у межах полюсної поділки розділена радіальними площинами на m ділянок; для схеми, наведеної на рис., $m = 5$.

Заступній схемі магнітопроводу ОКД відповідає система нелінійних рівнянь магнітного стану, складена за методом контурних потоків. У цій системі первинними невідомими є контурні магнітні потоки, а вторинними – магнітні потоки у вітках схеми.

Якщо для нелінійних магнітних опорів врахувати співвідношення між контурними потоками та потоками у вітках, умови симетрії під полюсами, то отримуємо систему рівнянь магнітного стану (1) на одну полюсну поділку. Ця система містить $(m - 1)$ рівнянь якоря, два рівняння кіл статора та одне рівняння, що містить елементи статора і якоря, тобто всього $(m + 2)$ рівняння.

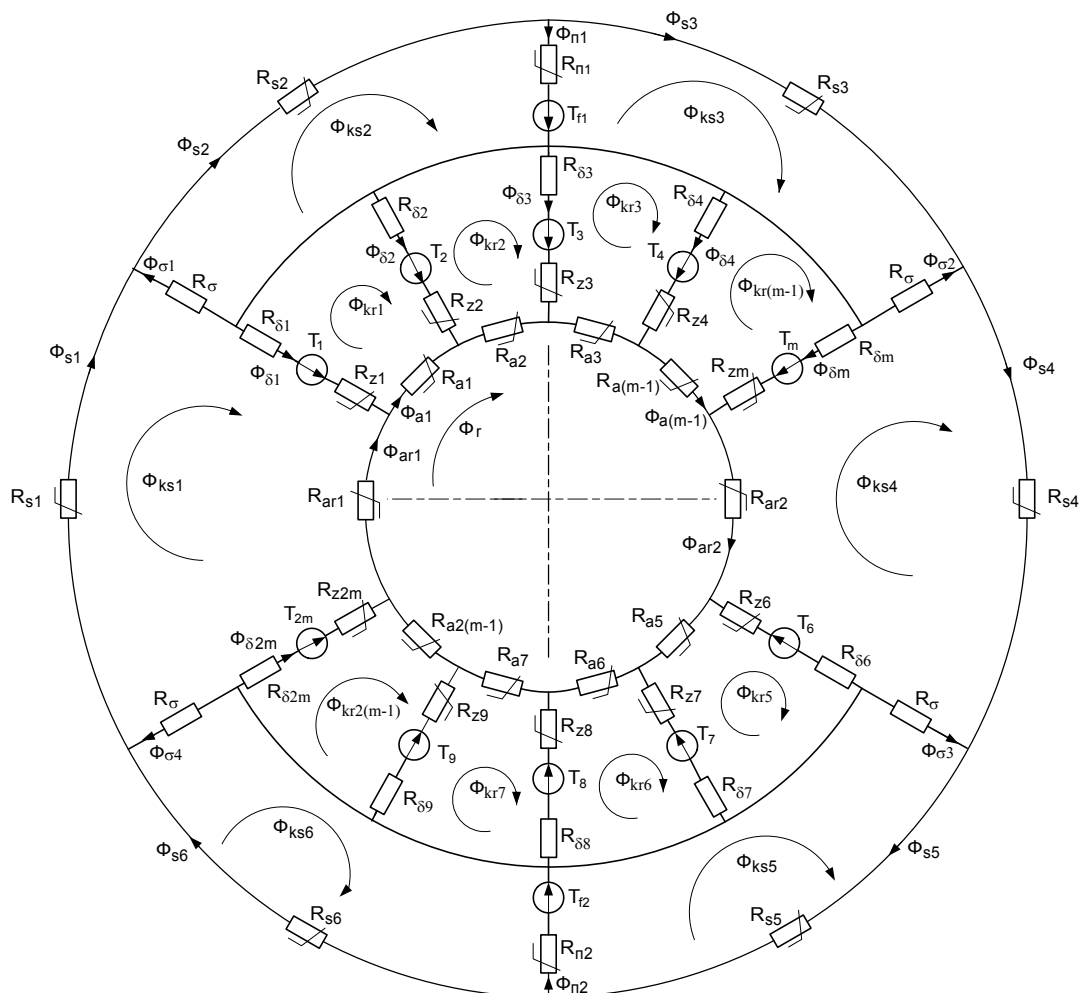


Рис. Заступна схема магнітного кола ОКД

$$-F_{z1} [\Phi_{\delta 1}] + R_{\delta 1} (\Phi_{kr1} - \Phi_{ks1}) + R_{\delta 2} (\Phi_{kr1} - \Phi_{kr2}) + F_{z2} [\Phi_{\delta 2}] - F_{a1} [\Phi_{a1}] + T_1 - T_2 = 0;$$

$$-F_{z2} [\Phi_{\delta 2}] + R_{\delta 2} (\Phi_{kr2} - \Phi_{kr1}) + R_{\delta 3} (\Phi_{kr2} - \Phi_{kr3}) + F_{z3} [\Phi_{\delta 3}] - F_{a2} [\Phi_{a2}] + T_2 - T_3 = 0;$$

$$-F_{z(m-1)} [\Phi_{\delta(m-1)}] + R_{\delta(m-1)} (\Phi_{kr(m-1)} - \Phi_{kr(m-2)}) + R_{\delta m} (\Phi_{kr(m-1)} + \Phi_{ks1}) + F_{zm} [\Phi_{\delta m}] - F_{a(m-1)} [\Phi_{a(m-1)}] + T_{m-1} - T_m = 0; \quad (1)$$

$$F_{s1} [\Phi_{s1}] + R_{\sigma} (\Phi_{ks1} - \Phi_{ks2}) + R_{\delta 1} (\Phi_{ks1} - \Phi_{kr1}) + F_{z1} [\Phi_{\delta 1}] - F_{ar1} [\Phi_{ar1}] + F_{zm} [\Phi_{\delta m}] + R_{\delta m} (\Phi_{ks1} + \Phi_{kr(m-1)}) + R_{\sigma} (\Phi_{ks1} + \Phi_{ks3}) - T_1 - T_m = 0;$$

$$R_{\sigma} (\Phi_{ks2} - \Phi_{ks1}) + F_{s2} [\Phi_{s2}] + F_{\pi 1} [\Phi_{\pi 1}] - T_{\pi} = 0;$$

$$R_{\sigma} (\Phi_{ks3} + \Phi_{ks1}) + F_{s3} [\Phi_{s3}] - F_{\pi 1} [\Phi_{\pi 1}] + T_{\pi} = 0.$$

Встановимо співвідношення між потоками у вітках та контурними потоками, яке необхідно знати під час розв'язування системи рівнянь магнітного стану.

Утворимо вектори-стовпці контурних потоків у вигляді

$$\vec{\Phi}_{kr} = (\Phi_{kr1}, \Phi_{kr2}, \dots, \Phi_{kr(m-1)})^* - \text{вектор-стовпець контурних потоків ротора};$$

$$\vec{\Phi}_{ks} = (\Phi_{ks1}, \Phi_{ks2}, \dots, \Phi_{ks3})^* - \text{вектор-стовпець контурних потоків статора};$$

$\vec{\Phi}_1 = (\Phi_{kr1}, \Phi_{kr2}, \dots, \Phi_{kr(m-1)}, \Phi_{ks1}, \Phi_{ks2}, \dots, \Phi_{ks3})^* - \text{вектор-стовпець контурних потоків, або первинних невідомих розміром } (m+2).$

Утворимо вектори-стовпці потоків у вітках та наведемо матриці, які дають змогу перейти від контурних потоків до потоків у вітках.

$$\vec{\Phi}_{\delta} = (\Phi_{\delta 1}, \Phi_{\delta 2}, \dots, \Phi_{\delta m})^* - \text{вектор-стовпець потоків у ділянках повітряного проміжку};$$

$$\vec{\Phi}_{\delta} = c_{\delta} \vec{\Phi}_1, \quad (2)$$

$$\text{де } c_{\delta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця з'єднань розміром } m \times (m+2);$$

$$\vec{\Phi}_s = (\Phi_{s1}, \Phi_{s2}, \Phi_{s3})^* - \text{вектор-стовпець потоків у ділянках ярма статора};$$

$$\vec{\Phi}_s = c_s \vec{\Phi}_{ks}; \quad c_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Phi}_{\sigma} = (\Phi_{\sigma 1}, \Phi_{\sigma 2}) - \text{вектор-стовпець потоків розсіяння};$$

$$\vec{\Phi}_{\sigma} = c_{\sigma} \vec{\Phi}_{ks}; \quad c_{\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Магнітний потік полюса подамо у вигляді

$$\Phi_{\pi 1} = \Phi_{ks2} - \Phi_{ks3} = c_{\pi} \vec{\Phi}_1, \quad (3)$$

де $c_{\pi} = 0 \dots 0 \ 1 \ -1$ – вектор-рядок розмірністю $m+2$;

$\vec{\Phi}_{ar} = (\Phi_{ar1}, \Phi_{a1}, \Phi_{a2}, \dots, \Phi_{a(m-1)})^* - \text{вектор-стовпець потоків у ділянках ярма ротора, який містить } m \text{ елементів};$

$$\vec{\Phi}_{ar} = c_{as} \vec{\Phi}_{ks} + c_{ar} \vec{\Phi}_{kr}^* ,$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & \\ \text{де } c_{as} = & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad \text{– матриця з'єднань розмірністю } m \times 3;$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{ap} = & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad \text{– матриця з'єднань розмірністю } m \times (m-1);$$

Вектор-стовпець потоків у вітках подамо у вигляді

$$\vec{\Phi}_2 = (\vec{\Phi}_\delta, \vec{\Phi}_s, \vec{\Phi}_{ap} \dots \vec{\Phi}_\sigma, \Phi_{\pi 1})^*.$$

Запишемо співвідношення між потоками у вітках та контурними потоками таким векторним рівнянням:

$$\vec{\Phi}_2 = f[\vec{\Phi}_1].$$

Утворимо вектор-стовпець намагнічуючих сил котушки збудження розміром $(m + 2)$ елементи

$$\vec{T}_f = (0, 0, \dots, -w_f i_a, w_f i_a)^*,$$

де i_a – струм якоря, який дорівнює струму збудження у випадку послідовного з'єднання обмоток ОКД; w_f – кількість витків обмотки збудження.

Утворимо вектор-стовпець різниць намагнічуючих сил ділянок якоря розміром $(m + 2)$ елементи

$$\Delta \vec{T}_a = (T_1 - T_2, T_2 - T_3, \dots, T_{(m-1)} - T_m, -T_1 - T_m, 0, 0)^*.$$

Запишемо намагнічуючу силу i -ї вітки якоря з координатою η_i у вигляді [13]

$$T_i = T_{amax} (2 \eta_i / \tau); \quad (4 \text{ а})$$

$$T_{amax} = (N / 4p) (i_a / 2a), \quad (4 \text{ б})$$

де η_i – кут між i -ю віткою якоря та віссю полюса; τ – полюсна поділка; N – загальна кількість провідників обмотки якоря; $2a$ – кількість паралельних гілок; p – кількість пар полюсів.

Перетворимо (4 а, б) до вигляду

$$T_i = \frac{N}{2p} \frac{1}{2a} \frac{1}{\tau} i_a \eta_i = k_T i_a \eta_i, \quad (5)$$

де $k_T = \frac{N}{2p} \frac{1}{2a} \frac{1}{\tau}$ – постійний коефіцієнт для цього ОКД.

У $(m - 1)$ рівняннях кіл якоря та у рівнянні з елементами кіл статора i якоря є різниці намагнічуючих сил віток якоря, які подамо у вигляді

$$\Delta T = T_{ai} - T_{a(i+1)} = k_T i_a (\eta_i - \eta_{(i+1)}).$$

Утворимо вектор-стовпець координат віток якоря

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, 0, 0)^*.$$

Тоді вектор-стовпець різниць намагнічуючих сил ділянок якоря запишемо у вигляді

$$\Delta \vec{T}_a = \kappa_T i_a c_T \vec{\eta}, \quad (6)$$

$$\text{де } c_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – квадратна матриця розміру } (m+2).$$

Отже, записана за законами Кірхгофа нелінійна система рівнянь магнітного кола ОКД у векторній формі матиме такий вигляд:

$$\vec{f}[\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2] + \Delta \vec{T}_a + \vec{T}_f = 0; \quad (7a)$$

$$\vec{\Phi}_2 = f[\vec{\Phi}_1]. \quad (7б)$$

Застосуємо для розв'язання цієї системи ітераційний метод Ньютона. Підстановкою лінійного векторного рівняння (7, б) у (7, а) можна виключити вторинні невідомі $\vec{\Phi}_2$, але тоді отримаємо громіздку та незручну для розв'язання систему.

Використаємо для розв'язання системи (7 а, б) алгоритм, наведений у [14]. Лінійне векторне рівняння, породжуване системою (7 а, б) нелінійних векторних рівнянь на j -ій ітерації, матиме вигляд

$$A^{(j-1)} \cdot \Delta \vec{\Phi}_1^{(j)} = -\vec{H}_1^{(j-1)}, \quad (8)$$

де $\Delta \vec{\Phi}_1^{(j)}$ – поправка кореня на j -ій ітерації; $\vec{H}_1^{(j-1)} = \vec{f}[\vec{\Phi}_1^{(j-1)}, \vec{\Phi}_2^{(j-1)}] + \Delta \vec{T}_a + \vec{T}_f$ – значення нев'язки, обчислене для $(j-1)$ -го наближення невідомих $\vec{\Phi}_1$ та $\vec{\Phi}_2$; $A^{(j-1)} = m_1^{(j-1)} + m_2^{(j-1)} \cdot m_{12}^{(j-1)}$ – значення матриці Якобі, обчислене для $(j-1)$ -го наближення коренів $\vec{\Phi}_1$ та $\vec{\Phi}_2$;

$$m_1^{(j-1)} = \frac{d\vec{f}[\vec{\Phi}_1^{(j-1)}, \vec{\Phi}_2^{(j-1)}]}{d\vec{\Phi}_1}; \quad m_2^{(j-1)} = \frac{d\vec{f}[\vec{\Phi}_1^{(j-1)}, \vec{\Phi}_2^{(j-1)}]}{d\vec{\Phi}_2}; \quad m_{12}^{(j-1)} = \frac{d\vec{\Phi}_2[\vec{\Phi}_1^{(j-1)}]}{d\vec{\Phi}_1} \quad \text{– значення}$$

похідних, обчислене для $(j-1)$ -го наближення векторів $\vec{\Phi}_1$ та $\vec{\Phi}_2$;

Для отримання j -го наближення кореня $\vec{\Phi}_1$ використаємо формулу

$$\vec{\Phi}_1^{(j)} = \vec{\Phi}_1^{(j-1)} + \Delta \vec{\Phi}_1^{(j)}. \quad (9)$$

2. Рівняння перехідних процесів та алгоритм їх розв'язання

Для розрахунку перехідних процесів в ОКД необхідно інтегрувати чисельним методом систему диференціальних рівнянь, яка містить рівняння рівноваги напруг та рівняння руху якоря. Використаємо явний метод чисельного інтегрування, який передбачає на кожному кроці інтегрування розв'язання системи рівнянь магнітного стану (7 а, б), тобто знаходження потоків у вітках заступної схеми. На підставі цих даних визначаємо робочий магнітний потік повітряного проміжку, електрорушійну силу обмотки якоря, електромагнітний момент та диференційні індуктивності обмоток якоря і збудження – величини, які входять до рівнянь рівноваги напруг та моментів.

Запишемо рівняння напруг ОКД для випадку послідовного з'єднання обмоток якоря і збудження у вигляді

$$\frac{d\Psi_a}{dt} + \frac{d\Psi_f}{dt} + i_a (r_a + r_f) + e_a - u_t = 0, \quad (10)$$

де Ψ_a , Ψ_f – повні потокозчеплення обмоток якоря та збудження відповідно; r_a – повний активний опір кола якоря; r_f – активний опір обмотки збудження; e_a – електрорушійна сила від обертання, наведена в обмотці якоря; u_t – прикладена однофазна напруга.

Неведемо повні потокозчеплення обмоток якоря та збудження у вигляді

$$\frac{d\Psi_a}{dt} = (L_{a\delta} + L_{a\sigma}) \frac{di_a}{dt}; \quad (11a)$$

$$\frac{d\Psi_f}{dt} = (L_{f\delta} + L_{f\sigma}) \frac{di_a}{dt}, \quad (11б)$$

де $L_{a\delta}$, $L_{f\delta}$ – диференціальні індуктивності обмоток якоря та збудження відповідно, які зумовлені полем у повітряному проміжку; $L_{a\sigma}$, $L_{f\sigma}$ – індуктивності розсіяння обмоток якоря та збудження відповідно; $L_{a\sigma} = \lambda_{a\sigma} I_a$; $L_{f\sigma} = \lambda_{f\sigma} I_a$; $\lambda_{a\sigma}$, $\lambda_{f\sigma}$ – питомі індуктивності розсіяння обмоток якоря та збудження відповідно, які визначаються за відомими формулами, наведеними у [13]; I_a – активна довжина магнітопроводу якоря ОКД.

З врахуванням (11, а, б) перетворимо рівняння (10) до зручного для чисельного інтегрування вигляду

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{u_t - i_a (r_a + r_f) + e_a}{L_{a\delta} + L_{a\sigma} + L_{f\delta} + L_{f\sigma}}. \quad (12)$$

Отже, для розв'язання рівняння (12) необхідно знати миттєві значення електрорушійної сили від обертання e_a та диференціальних індуктивностей $L_{a\delta}$, $L_{f\delta}$.

Електрорушійна сила обмотки якоря визначається за відомою формулою [13]

$$e_a = c_m \cdot \omega \cdot \Phi_\delta, \quad (13)$$

де ω – кутова частота обертання якоря; Φ_δ – повний потік у повітряному проміжку; $c_m = (p N) / (2 \pi a)$ – коефіцієнт, постійний для цього ОКД.

Потік Φ_δ дорівнює сумі потоків окремих ділянок повітряного проміжку, які визначаються під час розрахунку магнітного кола ОКД

$$\Phi_\delta = I_a \int_0^\pi B_\eta d\eta = I_a \sum_{i=1}^m B_\eta \Delta\eta_i = \sum_{i=1}^m \Phi_{\delta i}, \quad (14)$$

де B_η – магнітна індукція ділянки повітряного проміжку з координатою η ; $\Delta\eta_i$ – дуга, яка відповідає i -й ділянці повітряного проміжку.

Запишемо потокозчеплення обмотки якоря, зумовлене потоком у повітряному проміжку, у вигляді

$$\Psi_{a\delta} = \frac{N}{2a} \Phi_\delta. \quad (15)$$

Враховуючи (2), отримаємо

$$\Phi_\delta = \sum_{i=1}^m \Phi_{\delta i} = c_\psi \cdot \vec{\Phi}_\delta = c_\psi (c_\delta \cdot \vec{\Phi}_1), \quad (16)$$

де $c_\psi = (1, 1, \dots, 1)$ – вектор-рядок, який містить m одиничних елементів.

З (15) і (16) отримаємо вираз для визначення диференціальної індуктивності $L_{a\delta}$

$$L_{a\delta} = \frac{d\Psi_{a\delta}}{di} = \frac{N}{2a} c_\psi (c_\delta \frac{d\vec{\Phi}_1}{di}). \quad (17)$$

Формулу для визначення диференціальної індуктивності $L_{f\delta}$ отримаємо, враховуючи (3)

$$L_{f\delta} = \frac{d\Psi_{f\delta}}{di} = w_f \frac{d\Phi_{п1}}{di} = w_f \left(c_{п} \frac{d\vec{\Phi}_1}{di} \right). \quad (18)$$

Отже, для визначення диференціальної індуктивності $L_{a\delta}$ на кожному кроці інтегрування необхідно знайти похідну $d\vec{\Phi}_1/di$. Диференціюючи систему (7, а, б) за струмом якоря i_a , отримаємо

$$\frac{df[\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2]}{d\vec{\Phi}_1} \cdot \frac{d\vec{\Phi}_1}{di_a} + \frac{df[\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2]}{d\vec{\Phi}_2} \cdot \frac{d\vec{\Phi}_2}{di_a} + k_T \cdot c_T \cdot \vec{\eta} + \vec{w}_f = 0; \quad (19, a)$$

$$\frac{d\vec{\Phi}_2}{di_a} - \frac{d\vec{\Phi}_2}{d\vec{\Phi}_1} \cdot \frac{d\vec{\Phi}_1}{di_a} = 0, \quad (19, б)$$

де $\vec{w}_f = (0, 0, \dots, -w_f, w_f)^*$ – вектор-стовпець кількості витків котушки збудження розміром $(m + 2)$ елементи.

Після перетворення (19, а, б) отримаємо

$$A \cdot \frac{d\vec{\Phi}_1}{di_a} = -k_T \cdot c_T \cdot \vec{\eta} - \vec{w}_f, \quad (20)$$

де A – значення матриці Якобі за (8).

Вирішимо (20) щодо похідної

$$\frac{d\vec{\Phi}_1}{di_a} = (A^{-1}) \cdot (-k_T \cdot c_T \cdot \vec{\eta} - \vec{w}_f), \quad (21)$$

Підставляючи (21) до (17) та (18), отримаємо

$$L_{a\delta} = \frac{N}{2a} c_{\psi} \left[c_{\delta} \cdot (A^{-1}) \cdot (-k_T \cdot c_T \cdot \vec{\eta} - \vec{w}_f) \right]; \quad (22)$$

$$L_{f\delta} = w_f \left[c_{п} (A^{-1}) \cdot (-k_T \cdot c_T \cdot \vec{\eta} - \vec{w}_f) \right]. \quad (23)$$

Представимо рівняння моментів ДПС ПМ у вигляді

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{em} - M_0, \quad (24)$$

де M_{em} – електромагнітний момент двигуна; M_0 – момент опору механізму на валу; J – момент інерції якоря.

Визначимо електромагнітний момент двигуна через потоки у ділянках повітряного проміжку

$$M_{em} = 2p \frac{D_a}{2} \int_0^{\pi} B_{\eta} l_{\delta} i_a d\eta = 2p \frac{D_a}{2} \sum_{i=1}^m B_{\eta} l_{\delta} i_a \Delta\eta_i = 2p \frac{D_a}{2} i_a \sum_{i=1}^m \Phi_{\delta i}. \quad (25)$$

Враховуючи (16), отримаємо

$$M_{em} = 2p \frac{D_a}{2} i_a c_{\psi} (c_{\delta} \cdot \vec{\Phi}_1). \quad (26)$$

Висновки

Повна система рівнянь перехідних процесів ОКД складається із системи рівнянь магнітного стану та рівнянь рівноваги напруг і моментів. В основу математичної моделі ОКД покладена розгалужена заступна схема магнітного кола. Наведена система рівнянь магнітного стану, що відповідає заступній схемі, та метод її розв'язання. Наведені рівняння перехідних процесів в ОКД – рівняння рівноваги напруг та моментів. Наведено алгоритм знаходження на кожному кроці інтегрування системи рівнянь рівноваги напруг і моментів необхідних величин (магнітний потік

повітряного проміжку, електрорушійна сила обмотки якоря, електромагнітний момент та диференційні індуктивності обмоток якоря і збудження) на основі результатів попереднього вирішення система рівнянь магнітного стану. Запропонована математична модель перехідних процесів ОКД може бути використана для аналізу цих процесів, а також під час проєктування ОКД.

Перспективи подальших досліджень

На основі розробленої математичної моделі перехідних процесів ОКД можуть бути отримані рекомендації щодо оптимального проєктування двигунів цього типу.

Список джерел

1. Pustola J. Maszyny komutatorowe dla automatyki. Warszawa : Wydawnictwa naukowo-techniczne, 1971, 316 s.
2. Tuncay R. N., Yilmaz M., Onculoglu C., Kanca G. Theoretical and experimental study of universal motor for vacuum cleaners. ELECO'99 International conference on electrical and electronics engineering.
3. Tuncay R. N., Yilmaz M., Onculoglu C. The design methodology to develop new-generation universal motors for vacuum cleaners. Electric machines and drives conference, 2001. IEMDC 2001 IEEE International. DOI: 10.1109/IEMDC.2001.939431.
4. Karaliūnas B. Computer modeling of the characteristics and magnetic field of single – phase commutator motor. Proc. of the XV Int. Conf. on Electromagnetic Disturbances, EMD. Technologija. Kaunas – Bialystok, 2008. Pp. 61–64. URL: http://www.actawm_pb_edu_plvol2no3karaliunas.pdf.
5. Cros J., Viarouge P., Chalifour Y., Figueroa J. A new structure of universal motor using soft magnetic composites. IEEE transactions on industry applications. march/april 2004. Vol. 40. no 2.. Pp. 550–557. URL: https://www.researchgate.net/publication/3171746_A_New_Structure_of_Universal_Motor.
6. Пуйло Г. В., Пирковский С. Н., Бабийчук О. Б. Проектный синтез однофазных коллекторных двигателей с адаптацией обобщенного показателя качества. Lviv Polytechnic National University Institutional Repository. 2003, С. 176–181. URL: <http://ena.lp.edu.ua>.
7. Пирковский С. Н. Проектный синтез однофазного коллекторного двигателя на основе комбинированного алгоритма оптимизации. *Электротехнические и компьютерные системы*. 2015. № 17 (93). С. 35–41. URL: <http://dspace.opu.ua > jspui > bitstream>.
8. Пирковский С. Н., Бабийчук О. Б., Процына З. П. Проектный синтез однофазных коллекторных двигателей на основе векторного показателя качества. *Електромашинобудування та електрообладнання*. Київ : Техніка, 2005. Вип. 64. С. 67–71. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua > irbis_nbuv > cgiirbis_64.
9. Гавдьо І. Р. Електромагнітні процеси в асинхронних двигунах з екранованими полюсами : авторефер. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.09.01. “Електричні машини і апарати” / НУ “Львівська політехніка” Львів, 2005. 17 с.
10. Гавдьо І. Р. Математична модель магнітного стану колекторного двигуна з магнітоелектричним збудженням. *Електроенергетичні та електромеханічні системи*. 2019. Вип. 1. № 1. С. 10–16. URL: <https://science.lpnu.ua > maketno12019zdoi1-10-16>.
11. Гавдьо І. Р. Математична модель магнітного стану однофазного колекторного двигуна. *Електроенергетичні та електромеханічні системи*. 2022. Т. 5. № 1. С. 48–54. URL: <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/476acb43-9873-4149-b1e0-1a8d500e5221/content>.
12. Гавдьо І. Р. Магнітне поле двигуна постійного струму зі збудженням від постійних магнітів. *Електроенергетичні та електромеханічні системи*. 2023. Т. 6 № 1. С. 31–37. URL: <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/476acb43-9873-4149-b1e0-1a8d500e5221/content>
13. Яцун М. А. Електричні машини : навч. посіб. Львів : Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2004. 440 с.
14. Фильц Р. В., Лябук Н. Н. Математическое моделирование явнополюсных синхронных машин. Львов : Свит, 1991. 176 с.

References

1. Pustola J. (1971). Maszyny komutatorowe dla automatyki. Warszawa : Wydawnictwa naukowo-techniczne (in Polish).
2. Tuncay, R. N., Yilmaz, M., Onculoglu, C., & Kanca, G. Theoretical and experimental study of universal motor for vacuum cleaners. ELECO'99 International conference on electrical and electronics engineering (in English).

3. Tuncay, R. N., Yilmaz M., & Onculoglu C. (2001). The design methodology to develop new-generation universal motors for vacuum cleaners. Electric machines and drives conference, IEMDC 2001 IEEE International. DOI: 10.1109/IEMDC.2001.939431 (in English).
4. Karaliūnas, B. (2005). Computer modeling of the characteristics and magnetic field of single – phase commutator motor. Proc. of the XV Int. Conf. on Electromagnetic Disturbances, EMD. Technologija. Kaunas – Bialystok, 61–64. URL: <http://www.actawm.pb.edu.pl/vol2no3karaliunas.pdf> (in English).
5. Cros, J., Viarouge, P., Chalifour, Y., & Figueroa, J. (march/april 2004). A new structure of universal motor using soft magnetic composites. *IEEE transactions on industry applications*, 40, 2, 550–557. URL: https://www.researchgate.net/publication/3171746_A_New_Structure_of_Universal_Motor (in English).
6. Pujlo, H. V., Pirkovskiy, S. N., & Babijczuk, O. B. (2003). Proektnyi syntezyz odnofaznykh kolektornykh dvihatelej s adaptatsiej obobschenoho pokazatelja kaczestva. Lviv : Polytechnic National University Institutional Repository, 176–181. URL: <http://ena.lp.edu.ua> (in Russian).
7. Pirkovskiy, S. N. (2015). Proektnyi syntezyz odnofaznoho kolektornoho dvihatelia na osnove kombinirovanoho alhoritma optimizatsii. *Elektrotehniczeskie i kompjuternye sistemy*, 17 (93), 35–41. URL: <http://dspace.opu.ua/bitstream/12019/10-16> (in Russian).
8. Pirkovskiy, S. N., Babijczuk, O. B., & Protsyna, Z. P. (2005). Proektnyi syntezyz odnofaznykh kolektornykh dvihatelej na osnove vektornoho pokazatelja kachestva. *Elektromashynobuduvania ta elektroobladnania*. Kyiv : Technika, 64, 67–71. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/irbis_nbuv/cgiirbis_64 (in Russian).
9. Havdo I. R. (2005). Elektromahnitni protsesy v asynkhronnykh dvyhunakh z ekranovanymy poliusamy : avtorefer. dys. na zdobutia nauk. stupenia kand. tekhn. nauk : spets. 05.09.01. “Elektrychni mashyny i aparaty” / NU “Lvivska politehnika”. Lviv (in Ukrainian).
10. Havdo, I. R. (2019). Matematychna model mahnitnoho stanu kolektornoho dvyhuna z mahnitoelektrycznym zbudzheniam. *Elektroenerhetyczni ta elektromechaniczni systemy*, 1, 1, 10–16 URL: <https://science.lpnu.ua/maketno12019zdoi1-10-16> (in Ukrainian).
11. Havdo, I. R. (2022). Matematychna model mahnitnoho stanu odnofaznoho kolektornoho dvyhuna. *Elektroenerhetyczni ta elektromechaniczni systemy*, 5, 1, 48–54. URL: <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/476acb43-9873-4149-b1e0-1a8d500e5221/content> (in Ukrainian).
12. Havdo, I. R. (2023). Mahnitne pole dvyhuna postijnoho strumu zi zbudzheniam vid postijnykh mahnitiv. *Elektroenerhetyczni ta elektromechaniczni systemy*, 6, 1, 31–37. URL: <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/476acb43-9873-4149-b1e0-1a8d500e5221/content> (in Ukrainian).
13. Jatsun, M. A. (2004). Elektrychni mashyny. Lviv : Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu “Lvivska politehnika” (in Ukrainian).
14. Filts, R. V., Liabuk, N. N. (1991). Matematicheskoe modelirovanije javnopoliusnykh sinchronnykh mashyn. Lvov : Svit (in Russian).

I. Havdo

Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechanics and Computerized Electromechanical Systems,
Ihor.r.havdo@lpnu.ua

MATHEMATICAL MODEL OF TRANSIENT PROCESSES SINGLE-PHASE COMMUTATOR MOTOR

@ Havdo I., 2024

Due to the simplicity of the design and the possibility of obtaining significant rotation frequencies (up to 20,000 - 30,000 rpm) and large starting torques, single-phase commutator motors (SPCM) with series excitation continue to be promising for use in household electrical appliances and hand-held electric tools. During the design of new samples of SPCM, as well as modernization of existing engines of this type, it is necessary to use adequate mathematical models of SPCM, which determines the relevance of the study. The purpose of the article is the development of a mathematical model of transient

processes in SPCM based on circular methods. The basis of the mathematical model is a branched substitute scheme of the magnetic circuit with concentrated parameters, which makes it possible to find the distribution of magnetic fluxes in the loops based on the dimensions of the magnetic circle, winding data and the instantaneous value of the current. The system of nonlinear equations of the magnetic state, composed by the method of contour magnetic flux, corresponds to the substitute scheme of the SPCM magnetic circuit. In this system, the primary unknowns are the loop magnetic fluxes, and the secondary ones are the magnetic fluxes in the branches of the scheme. Relationships between fluxes in branches and contour fluxes are established using connection matrices. The nonlinear system of equations of the SPCM magnetic circuit is written in vector form. The algorithm for solving this system by Newton's iterative method is presented. Equilibrium equations of voltages and equations of armature motion are recorded, which must be integrated by a numerical method to calculate transient processes in SPCM. An explicit method of numerical integration is used, which involves solving the system of equations of the magnetic state at each step of integration, i.e. finding the magnetic fluxes in the branches of the substitute circuit. On the basis of the solution of the system of equations of the magnetic state, the working magnetic flux in the air gap, the electromotive force of the armature winding, the electromagnetic moment and the differential inductances of the armature and excitation windings are determined - quantities that are included in the equations of the balance of voltages and moments. The proposed mathematical model of transient processes of SPCM can be used for the analysis of these processes, as well as during the design of SPCM.

Keywords: single-phase commutator motor, substitute scheme of the magnetic circuit, equation of the magnetic state and transient processes.