

Н. Лопух, М. Притула, Н. Притула, Я. П'янило
 Центр математичного моделювання
 Інституту прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я.С. Підстригача НАН України,

РОЗРАХУНОК ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНИХ УМОВ У ЗАДАЧАХ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

© Лопух Н., Притула М., Притула Н., П'янило Я., 2009

Досліджено рух газу в пористих середовищах складної структури, який описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Запропоновано метод його розв'язування і досліджено вплив коефіцієнта проникності на розподіл тиску в пласті.

Motion of gas in porous environments, which is described nonlinear equation in derivative parts, is investigated in this paper. The method of it untiing is offered and influence of permeability coefficient on distributing of pressure in a layer is investigational.

Вступ

При проектуванні, аналізі і визначенні перспектив розроблення газових та газоконденсатних родовищ, експлуатації газових сховищ необхідно визначати кількість експлуатаційних і нагнітальних свердловин, їх дебетів, забійних і гирлових тисків, температуру газу [1, 2].

Процеси, що відбуваються в пласті при розробленні родовищ природних газів та експлуатації газових сховищ описуються нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних. Для визначення показників їх роботи з урахуванням неоднорідності пласта за колекторськими властивостями, довільним розташуванням різнодебітних свердловин, нерівномірності просування межі розділу газ–вода і т.п., необхідно інтегрувати диференціальні рівняння неусталеної фільтрації газу, води і конденсату за відповідних початкових і граничних умов.

Колектори природного газу характеризуються неоднорідністю та мінливістю параметрів пласту. Потужність продуктивних відкладень газового покладу може змінюватися в дуже широких межах. Коефіцієнти проникності і пористості пласту зазнають значних змін за висотою і площею газового покладу.

Лабораторні і промислові дослідження показують залежність коефіцієнтів проникності і пористості від зміни пластового тиску. Згідно з цими дослідженнями коефіцієнт проникності за умов зниження тиску може зменшуватися до 50% і більше порівняно з коефіцієнтом проникності при початковому пластовому тиску.

Метою роботи є дослідження впливу коефіцієнта проникності на розподіл пластового тиску.

Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset R^2$ – двомірна область (рис.1). На Ω задана множина точок з координатами $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, \dots, n$ та значення тисків у цих точках. Необхідно знайти розв'язок $p(x, y, t)$ рівняння, яке описує дифузію газу в пористому середовищі

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k(x, y, p) h(x, y)}{m(p)z(p)} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k(x, y, p) h(x, y)}{m(p)z(p)} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right] = \\ & = 2a(x, y) m(x, y) h(x, y) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{z(p)} \right] + 2Qh(x, y) p_{am} \end{aligned} \quad (1)$$

при виконанні умови балансу газу

$$Q_{zan} = \frac{T_{am}}{P_{am}} \int_0^F \int_0^h \frac{p m}{T z} dF dh \approx \frac{T_{cm}}{P_{cm}} \frac{\bar{p}}{\bar{T} \bar{z}} \bar{m} \bar{h} F.$$

Рівняння (1) на границі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ області Ω задовольняє крайові умови: умову Діріхле на Γ_1

$$p(\bar{x}) = p_1, \quad \bar{x} \in \Gamma_1; \quad (2)$$

умову Неймана на Γ_2

$$\Phi p(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_2, \quad (3)$$

де

$$\Phi p \stackrel{def}{=} \frac{k \cdot h}{m \cdot z} \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{k \cdot h}{m \cdot z} \frac{\partial p}{\partial y} n_y; \quad n_x = \cos(\mathbf{n}, x), \quad n_y = \cos(\mathbf{n}, y)$$

(тут для скорочення запису аргументи не враховуються); Γ_2 – зовнішня границя області Ω ; Γ_1 – границя області $\Omega_1 \in \Omega$, яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків; \mathbf{n} – зовнішня нормаль до границі області $\Omega_1 \subset R^2$; $k(x, y, p)$, $m(x, y)$, $h(x, y)$ – коефіцієнти проникності, пористості, газонасичена товщина пласта в точці (x, y) відповідно; F – площа пласта; Q_{zan} – запас газу в пласті ПСГ; z – коефіцієнт стисливості газу; m – коефіцієнт динамічної в'язкості; p_{am} – тиск газу за стандартних умов. Риска згори означає середнє значення відповідної величини.

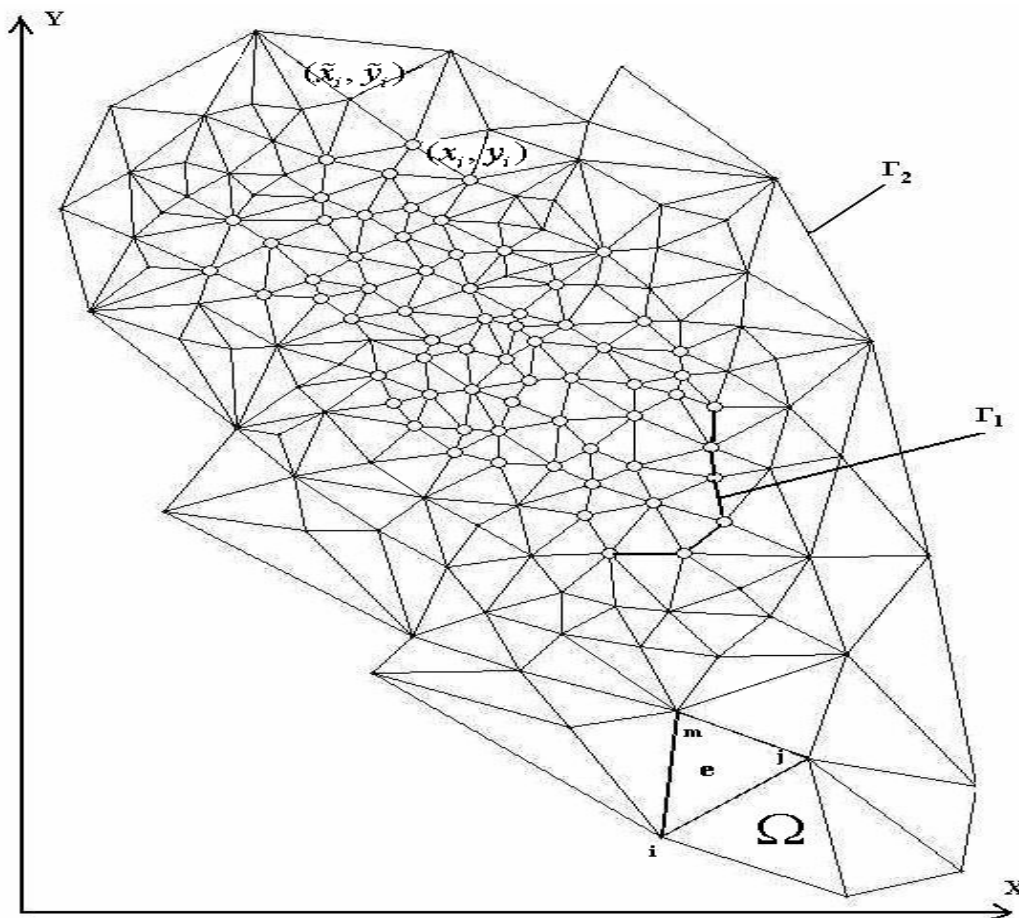


Рис.1. Область розбиття на трикутні елементи пласта Мринського підземного сховища газу

Побудова розв'язку методом скінченних елементів (МСЕ)

Область Ω (рис.1) розбивається на скінченні трикутні елементи. Область розбивають так, щоб координати заміряних значень шуканого розв'язку збігалися з координатами вершин трикутників. На рис.1 (x_i, y_i) – координати точок, в яких відомі значення шуканого розв'язку в початковий момент часу, а $(\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j)$ – вузли вершин трикутників у МСЕ, значення в яких необхідно знайти.

Всі вершини сортуються за принципом північно-західного кута, і завдяки списку ребер створюється послідовність трикутних елементів. Послідовність елементів із координатами дає змогу побудувати глобальну матрицю вузлів і локальні матриці для кожного елемента.

Алгоритм МСЕ будуємо на основі рівняння другого порядку відносно невідомої функції u вигляду :

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + gu = f, \quad x \in \Omega \subset R^2 \quad (4)$$

$$u(x) = u_1, \quad x \in \Gamma_1; \quad (5)$$

$$\Phi u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad (6)$$

а $g \equiv const$ – деяка постійна величина.

Знаходження узагальненого розв'язку задачі (1–3) полягає у мінімізації наступного функціонала:

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + gu^2 - 2fu \right) dx. \quad (7)$$

Наближений розв'язок u_h варіаційної задачі (4–7) будується на основі елементарних розв'язків, які мають вигляд

$$u_e = N_e q_e, \quad (8)$$

де $N_e = (\mathbf{j}_i, \mathbf{j}_j, \mathbf{j}_m)$ – матриця базисних функцій; $q_e = (u_i, u_j, u_m)^T$ – матриця, яка отримується із значень шуканого розв'язку у вершинах трикутних елементів. Верхній індекс T означає операцію транспонування, а індекс e – елементарний трикутник.

При поділі області на трикутні елементи базисні функції можна вибирати у вигляді:

$$\mathbf{j}_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2S_e} (a_i + b_i x_1 + c_i x_2).$$

Тут S_e – площа елемента, а коефіцієнти a_i, b_i, c_i так залежать від координат вершин елементів:

$$a_i = x_1^{(j)} x_2^{(m)} - x_2^{(j)} x_1^{(m)}; \quad b_i = x_2^{(j)} - x_2^{(m)}; \quad c_i = x_1^{(m)} - x_1^{(j)}, \quad i, j, m = 1..3.$$

Тут верхні індекси, взяті в дужки, означають номери вершин трикутного елемента.

На підставі варіаційного формулювання (7) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_j u_j (A \mathbf{j}_i, \mathbf{j}_j) = (f, \mathbf{j}_i), \quad i, j = 1..n, \quad (9)$$

де (u, v) – скалярний добуток функцій u та v . Система (9) формується із матриць

$$A_e (A_e = K_e + M_e),$$

де

$$K_e = \int_{\Omega_e} (\nabla N_e)^T \nabla N_e d\Omega, \quad (10)$$

$$M_e = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} j_i^2 & j_i j_j & j_i j_m \\ j_i j_j & j_j^2 & j_j j_m \\ j_i j_m & j_j j_m & j_m^2 \end{pmatrix} d\Omega, \quad f(x_1, x_2) = N_e(x_1, x_2) f_e, \quad (11)$$

$$\nabla N_e = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \end{pmatrix} (j_i, j_j, j_m). \quad (12)$$

Якщо (12) підставити в (10), то K_e набуде вигляду :

$$K_e = \frac{1}{2S_e} \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ b_i b_m + c_i c_m & b_j b_m + c_j c_m & b_m^2 + c_m^2 \end{pmatrix}.$$

Використавши перетворення на елементі, обчислимо функціонал (7):

$$\int_{\Omega_e} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{du}{dx_i} \frac{du}{dx_j} dx = ((a_{11}b_i + a_{21}c_i)b_j \frac{1}{4S_e} + (a_{12}b_i + a_{22}c_i)c_j \frac{1}{4S_e}),$$

$$\int_{\Omega} g j_i^m j_j^l dx = g \frac{m!l!}{(m+l+2)!} |S_e| = \begin{cases} g \frac{2}{3!} |S_e|, & i=j \\ g \frac{1}{4!} |S_e|, & i \neq j \end{cases}.$$

Із врахуванням співвідношення $\Omega = \sum_e \Omega_e$ та всіх доданків у формулі (7) будується СЛАР, яка розв'язується методом Гаусса.

Для подання рівняння (1) у вигляді (4) вводиться заміна $u := p^2$ та використовується явна різницева схема дискретизації за часом

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} = \frac{u - u_*}{\Delta t}.$$

Тоді коефіцієнти у рівнянні (4) матимуть вигляд

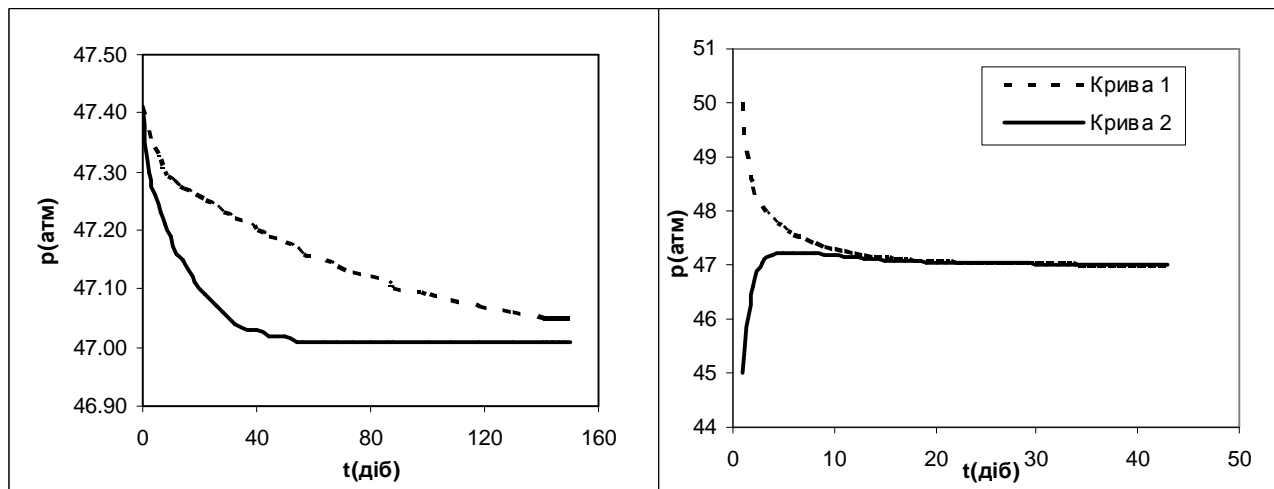
$$d = \frac{\mu m}{k \sqrt{u} \cdot \Delta t}, \quad f = \frac{\mu m}{k \sqrt{u}} \frac{u_*}{\Delta t} - \frac{4\mu m z}{k} q p_{am},$$

де Δt – крок дискретизації за часом, u_* – значення розв'язку, отримане на попередньому часовому кроці.

Обчислювальний експеримент проводився на основі розрахунку пластового тиску Мринського підземного сховища газу (рис.1). Область пласта розбита на 202 трикутні елементи із 114 вузлів, з яких 67 вузлів відповідають робочим свердловинам, а 18 вузлів є граничними точками.

У процесі багаторічної експлуатації сховища встановлено: середня потужність пласта $\bar{h} = 18.2$, коефіцієнт пористості дорівнює $m = 0.3$, проникність – $k = 1.1e-12$. Для проведення числових експериментів за початкові дані взяли пластовий тиск в центральній частині області $p[1] = 50$ атм. і на границі $p_{\Gamma} = 45$ атм. Визначаються газодинамічні параметри пласта в нейтральний період роботи газосховища (це період часу між завершенням закачування газу і початком відбору).

На рис. 2, а показано залежність середньопластового тиску від часу при різних значеннях коефіцієнта проникності. На рис. 2, б показана залежність від часу падіння тиску в центральній частині пласту та зростання тиску на границі газосховища.



а

б

Рис.2. Залежність середньопластового тиску від часу при $k = 1.1 \cdot 10^{-12}$ (крива 1) (а) та при $k = 5.1 \cdot 10^{-12}$ (крива 2); значення тисків в середині (крива 1) та на границі області (крива 2) (б)

Висновки

Числові експерименти показали, що зміна середньопластового тиску суттєво залежить від величини коефіцієнта проникності пласту. При його збільшенні швидкість зміни пластового тиску збільшується. В нейтральний період (після припинення закачування газу в сховище) швидкість зміни пластового тиску на границі є дещо вищим, ніж в області закачування газу.

1. Коротаева Ю.П., Маргулова Р.Д. Добыча, подготовка и транспорт природного газа и конденсата: Справочное руководство в 2-х томах. – М.: Недра, 1984. – 360 с. 2. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.: Издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 245 с.