УДК 004.94

Д. Федасюк, Т. Муха
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ З УРАХУВАННЯМ ВИПАРОВУВАННЯ НА ПОВЕРХНІ ПЛАСТИНИ

© Федасюк Д., Муха Т., 2009

Досліджено процес теплообміну в одновимірній області з врахуванням випаровування. Побудовано модель цього процесу. Знайдено аналітичний і числовий розв'язки цієї задачі і перевірено точність числового розв'язку. Здійснено порівняння між охолодженням з використанням випаровування та охолодженням без випаровування.

A process of heat exchange in a one-dimensional region with taking into account evaporation is investigated. A model of this process is built. For this problem are found numerical and analytical solutions and is made verification of accuracy of numerical solution. Comparison between cooling with and without using evaporation is made.

Постановка проблеми

Традиційні моделі відведення тепла враховують лише теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Однак тепло може відводитися ефективніше, якщо застосувати ще й охолодження за рахунок випаровування. В такому випадку теплота від охолоджуваного тіла відводиться в навколишнє середовище не лише шляхом теплообміну за законом Ньютона, але й за рахунок випаровування у вигляді питомої теплоти випаровування.

Завдання ефективного відведення тепла постає при проектуванні багатьох пристроїв, оскільки зазвичай багато приладів мають елементи з високою інтенсивністю тепловиділення. Наприклад, в процесі роботи приладу нагрівається мікросхема. Постає питання відведення тепла (охолодження), особливо коли температура стає такою, що загрожує виходом з ладу приладу. Для вирішення проблеми може бути використана капсула-запобіжник з рідиною, що має високу швидкість випаровування, яка, тріснувши в момент, коли температура мікросхеми стає критичною (такою, що загрожує виходом з ладу приладу), запобігає перегріву і виходу з ладу всього приладу.

За подібним принципом організувавши постійну подачу рідини на ребра радіатора, можна теж охолоджувати частини приладів, що нагріваються. Отже, постає завдання: змоделювати теплообмін з врахуванням випаровування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Насамперед слід сказати, що дослідження впливу процесу випаровування на розподіл температури є відносно новим напрямком у галузі дослідження процесів теплообміну порівняно з дослідженнями процесів провідності і конвекції. З цієї причини кількість моделей і публікацій з цієї тематики не є такою великою, як кількість публікацій, в яких розглядаються традиційні моделі теплообміну.

Carsie A. Hall, Calvin Mackie [2] розглядають модель процесу переходу тіла з рідкого в твердий стан. Перехід з одного агрегатного стану в інший спричинений інтенсивним випаровуванням на поверхні, завдяки якому теплота відводиться в навколишнє середовище у вигляді питомої теплоти випаровування. Вони вивели напіваналітичний розв'язок поставленої задачі, однак увага більше зосереджена на дослідженні процесу переходу з одного агрегатного стану в інший.

Chan Ho Song, Dae-Young Lee, Sung TackRo [3] досліджують процес охолодження ребер радіатора, який охолоджується повітрям, додатково за рахунок випаровування. В своїй роботі вони знаходять точний розв'язок поставленої задачі. Однак їхня модель побудована так, що враховує проходження потоку повітря через досліджуваний об'єм.

J.H. Lienhard [1] подає результати дослідження моделей теплових трубок, в яких теж використовується ефект охолодження за рахунок випаровування. Також подані ідеї для обчислення величини потоку випаровування з плоскої поверхні.

Однак в жодному з цих досліджень не будується числовий і аналітичний розв'язок і не здійснюється їх порівняння, а також не здійснюється апроксимування в загальному випадку нелінійної залежності потоку випаровування від температури рідини.

Мета дослідження

Метою дослідження є побудова моделі процесу теплообміну з урахуванням випаровування, що дасть змогу визначити температуру тіла в будь-якій його точці у будь-який момент часу; дослідити вплив і ефективність охолодження за рахунок випаровування.

Опис задачі

Розглядається процес теплообміну в нескінченній пластині завтовшки D (рис. 1). Температура пластини (твердого тіла) в початковий момент часу рівна T_m. З твердим тілом контактує шар рідини, товщина якого набагато менша від товщини пластини D.

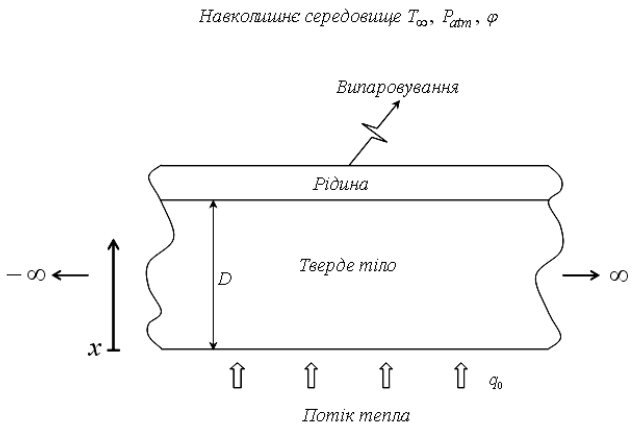

Рис. 1. Одновимірна модель охолодження через випаровування

Рідина в початковий момент часу має температуру T_m. Шар рідини взаємодіє із зовнішнім середовищем, яке має температуру T_∞, тиск P_{atm} та відносну вологість φ. Знизу тверде тіло нагрівається потоком тепла, нормальна складова якого має величину q_0. Із нижньої грані теплота передається кондукцією до верхньої.

Фізико-математична модель

Процес теплопровідності в твердому тілі описується наступним диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}, \tag{1}$$

де $T_S = T_S(x,t)$ – температура твердого тіла, t – час, x – просторова координата, α ($\alpha = \frac{k_S}{c \cdot \rho}$) – коефіцієнт температуропровідності твердого тіла $\left[\frac{м^2}{c}\right]$.

Крайові умови [2]:

при $x = 0$
$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = \dot{m}'' h_{fg} + \bar{h}(T_s - T_\infty), \tag{2}$$

при $x = D$
$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = q_0, \tag{3}$$

де k_s – коефіцієнт теплопровідності твердого тіла $\left[\frac{Вт}{м \cdot К}\right]$, $\dot{m}''$ – потік випаровування рідини $\left[\frac{кг}{м^2 \cdot с}\right]$, h_{fg} – питома теплота випаровування рідини $\left[\frac{Дж}{кг}\right]$, $\bar{h}$ – коефіцієнт конвективного теплообміну з навколишнім середовищем $\left[\frac{Вт}{м^2 \cdot К}\right]$; q_0 – величина нормальної складової потоку тепла $\left[\frac{Вт}{м^2}\right]$.

Початкові умови:
$$T_s(x, t = 0) = T_f(t = 0) = T_m. \tag{4}$$

Потік випаровування $\dot{m}''$ обчислюється за формулою [1]:
$$\dot{m}'' = g^* \left(m_f - m_\infty\right), \tag{5}$$

де g^* визначається з співвідношення (6)
$$g^* = \frac{\bar{h}}{c_f} Le^{-2/3}, \tag{6}$$

$Le = \frac{Pr}{Sc}$ – число Льюіса, Pr – число Прандтла, Sc – число Шмідта.

Різниця масової частки пари $\left(m_f - m_\infty\right)$ отримується, коли масова частка пари біля межі поділу “рідина–газ” набагато менша за одиницю.

Масова частка пари на межі поділу “рідина–газ”:
$$m_f = \frac{X_f M_f}{X_f M_f + \left(1 - X_f\right) M_g} = \frac{P_{sat}(T_f)}{P_{sat}(T_f) + \left[P_{atm} - P_{sat}(T_f)\right]\frac{M_g}{M_f}} \cong \frac{M_f}{M_g} \frac{P_{sat}(T_f)}{P_{atm}}. \tag{7}$$

Масова частка пари далеко від межі поділу “рідина-газ”:
$$m_\infty = \frac{X_\infty M_f}{X_\infty M_f + \left(1 - X_\infty\right) M_g} = \frac{\varphi P_{sat}(T_\infty)}{\varphi P_{sat}(T_\infty) + \left[P_{atm} - \varphi P_{sat}(T_\infty)\right]\frac{M_g}{M_f}}, \tag{8}$$

де M_f і M_g – молярні маси рідини і газу відповідно; X_f і X_∞ – молярна частка пари безпосередньо біля межі поділу “рідина–газ” і далеко від неї, визначаються за формулами:
$$X_f = \frac{P_{sat}(T_f)}{P_{atm}}, \tag{9}$$
$$X_\infty = \frac{\varphi P_{sat}(T_\infty)}{P_{atm}}. \tag{10}$$

Числове розв’язування

Для розв’язування поставленої задачі використовується метод сіток. Для цього розв’язок апроксимується $T(y_i, t_n) \approx T_i^n$. Похідні заміняються наступними скінченно-різнецевими співвідношеннями:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{(x_i,t_n)} \approx \frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}$$
$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t_n)} \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{h^2} \quad (11)$$

Для наближення похідних скінченно-різнецевими співвідношеннями використано шаблон (рис. 2):

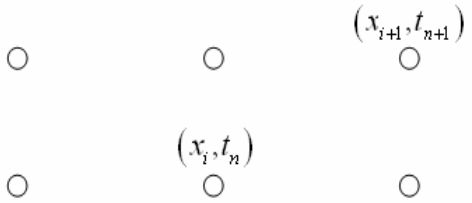

Рис. 2. Шаблон наближення похідних скінченно-різнецевими співвідношеннями

Тоді задача набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}=\alpha\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{h^2}\right),\ i=\overline{1,N-1},\ n=\overline{0,K-1} \\ T_i^0=T_m,\ i=\overline{0,N} \\ -k\dfrac{T_N^{n+1}-T_{N-1}^{n+1}}{h}=\left(AT_0^{n+1}+B\right)\cdot h_{fg}+\bar{h}\left(T_N^{n+1}-T_\infty\right),\ n=\overline{0,K-1} \\ -k\dfrac{T_1^{n+1}-T_0^{n+1}}{h}=q_0,\ n=\overline{0,K-1} \end{cases} \quad (12)$$

Оскільки використовується неявна схема, то для знаходження температури на кожному шарі розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ P & -(1+2P) & P & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & P & -(1+2P) & P \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & S_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n+1} \\ T_N^{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{h}{k}q_0 \\ -F_1^N \\ \vdots \\ -F_{N-1}^n \\ S_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

де

$$P=\frac{\alpha\cdot\tau}{2h^2}, \quad (14)$$

$$S_1=1+\frac{h}{k}\left(A\cdot h_{fg}+\bar{h}\right), \quad (15)$$

$$S_2=-\frac{h}{k}\left(B\cdot h_{fg}-\bar{h}\cdot T_\infty\right), \quad (16)$$

$$F_i^n=P\cdot T_{i+1}^n+(1-2P)\cdot T_i^n+P\cdot T_{i-1}^n. \quad (17)$$

A та B – константи для апроксимації $\dot{m}''$ ($\dot{m}''=A\cdot T+B$).

У загальному випадку $\dot{m}''$ нелінійно залежить від температури, оскільки $P_{sat}(T_f)$ є нелінійною функцією температури. У межах цієї роботи нелінійна функція $P_{sat}(T_f)$ наближається лінійною. Для апроксимації функції $P_{sat}(T_f)$ використано метод найменших квадратів.

Матриця системи тридіагональна, тому система розв'язується методом прогонки.

Аналітичний розв'язок

Спрощення нелінійної в загальному випадку залежності $\dot{m}''$ від температури до лінійної дає змогу знайти аналітичний розв'язок, який використано для оцінювання точності числового методу.

Методом Фур'є [4] знайдено аналітичний розв'язок задачі (1)–(4):

$$T(x,\tau) = a \cdot x + R + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\alpha\left(\frac{\mu_n}{d}\right)^2 \tau} \cdot Cos\frac{\mu_n}{d} x, \tag{18}$$

де послідовність $\{\mu_n\}$ – послідовність розв'язків рівняння $\frac{\mu_n}{A_k d} = ctg\mu_n$.

Коефіцієнти

$$A_n = \frac{I_{2n} - I_{3n}}{I_{1n}}, \tag{19}$$

де

$$I_{1n} = d \cdot \frac{\mu_n + Sin\mu_n \cdot Cos\mu_n}{2\mu_n}, \tag{20}$$

$$I_{2n} = \frac{d}{\mu_n}\left(T_m - R\right) \cdot Sin\mu_n, \tag{21}$$

$$I_{3n} = \frac{q_{0k} \cdot d^2}{\mu_n}\left(Sin\mu_n + \frac{Cos\mu_n - 1}{\mu_n}\right). \tag{22}$$

$$a = q_{0k}, \tag{23}$$

$$R = \frac{B_k - q_{0k}(1 + A_k \cdot d)}{A_k}, \tag{24}$$

де

$$A_k = \frac{1}{k}(A \cdot h_{fg} + \bar{h}), \tag{25}$$

$$B_k = -\frac{1}{k}(B \cdot h_{fg} - \bar{h} \cdot T_\infty), \tag{26}$$

$$q_{0k} = -\frac{q_0}{k}. \tag{27}$$

Отримані результати

Для реалізації знаходження числового розв'язку розроблено програмне забезпечення мовою C++.

При проведенні числових експериментів використовувались значення:

$T_m = 293\ ^0K$, $T_\infty = 293\ ^0K$, $q_0 = 12000\frac{Bm}{м^2}$, $D = 0{,}005\ м$;

$Le = 1$, $M_g = M_{air} = 28{,}97$, $M_f = M_{water} = 18{,}02$.

Матеріали та їхні властивості наведені в табл. 1.

Для апроксимації функції $P_{sat}(T_f)$ лінійною використано метод найменших квадратів. При апроксимуванні використано такі вузли і значення (табл. 2).

Таблиця 1

Матеріали та значення коефіцієнтів для них [5–8]

Тверде тіло: срібло		
$k_s, \left[\frac{Вт}{м \cdot К}\right]$	$\alpha, \left[\frac{м^2}{с}\right]$	$\bar{h}, \left[\frac{Вт}{м^2 \cdot К}\right]$
429	$1{,}7386018 \cdot 10^{-4}$	750
Рідина: вода		
$h_{fg}, \left[\frac{Дж}{кг}\right]$		
2437560		

Таблиця 2

Значення тиску насичення води для різних температур

$T_f, {}^0K$	273	283	293	303	313	323	333	343	353	363	373
$P_{sat}(T_f)$, кПа	0,6028	1,2147	2,3166	4,2075	7,3163	12,2362	19,7615	30,9247	47,0341	69,7084	100,9095

При реалізації методу сіток задана рівномірна сітка розбиття розмірністю 100 (по часу) $\times$ 500 (по просторовій координаті) комірок.

Динаміку процесу теплообміну з урахуванням випаровування та без випаровування відображено на рис. 3 (константи пораховані при $P_{atm} = 100000$, $\varphi = 0$: $A = 9{,}85077232 \cdot 10^{-4}$, $B = -0{,}288267127$).

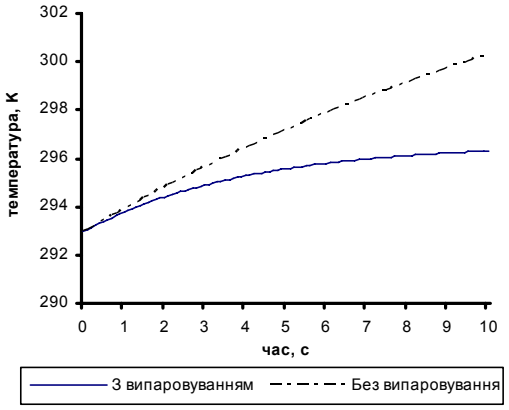

Рис. 3. Графіки середніх температур твердого тіла при $\varphi = 0$ та $\varphi = 0{,}75$

При порівнянні числового розв'язку з аналітичним отримано, що максимальна абсолютна похибка в кінцевий момент часу $\Delta T_{\max} = 0{,}01603\,K$.

Введемо таку величину

$$\psi = \frac{T_{e,end} - T_{e,begin}}{T_{0,end} - T_{0,begin}}, \tag{28}$$

де ψ – відношення збільшення середньої температури тіла при нагріванні із використанням охолодження за рахунок випаровування в кінцевий момент часу порівняно з початковим до

аналогічного збільшення температури без використання випаровування. $T_{e,end}$ – середня температура пластини в кінцевий момент часу при теплообміні з врахуванням випаровування, $T_{e,begin}$ – температура пластини в початковий момент часу при теплообміні з врахуванням випаровування; $T_{0,end}$ і $T_{0,begin}$ – аналогічні величини при теплообміні без врахування випаровування.

У результаті числового експерименту отримано, що при теплообміні із використанням ефекту випаровування в кінцевий момент часу $t = 10\,c$ температура твердого тіла на 3,9802 К нижча за температуру, коли теплообмін відбувається без випаровування. ψ=0,4539, або у процентному відношенні 45,39%. Це приблизно у 2 рази менше.

При відносній вологості $\varphi = 0{,}75$ характер процесу аналогічний до процесу при відносній вологості $\varphi = 0$. Константи A і B пораховані при $P_{atm} = 100000$, $\varphi = 0{,}75$ мають наступні значення $A = 9{,}85077232 \cdot 10^{-4}$, $B = -0{,}2885365577$).

При порівнянні результатів числового експерименту із значеннями аналітичного розв'язку отримано, що максимальна абсолютна похибка в кінцевий момент часу $\Delta T_{\max} = 0{,}0023\,K$.

Отримані результати показують, що при теплообміні із урахуванням випаровування в кінцевий момент часу $t = 10\,c$ температура твердого тіла на 3,7886 К нижча за температуру, коли теплообмін відбувається без випаровування. ψ у цьому випадку дорівнює 48,02. Це означає, що збільшення середньої температури тіла при теплообміні з урахуванням випаровування становить 48,02% від аналогічного збільшення температури без використання випаровування.

У результаті аналізу впливу коефіцієнта конвективного теплообміну $\bar{h}$ на ψ виявлено, що залежність, як і слід було очікувати, є лінійною, і при зміні $\bar{h}$ в межах від 10 до 800 $\left[\frac{Bm}{м^2 \cdot K}\right]$ значення коефіцієнта ψ змінюється від 0,4391 до 0,4835. З цього видно, що вплив на кінцеву температуру пластини теплообміну з навколишнім середовищем за рахунок конвекції є набагато менший від впливу охолодження за рахунок випаровування. І навіть істотне збільшення конвективного теплообміну мало впливає на значення ψ .

Висновки

Побудована фізико-математична модель процесу теплообміну з урахуванням випаровування, яка дає можливість дослідити процес охолодження пластини за рахунок випаровування рідини з її поверхні, знайти температуру пластини в будь-якій її точці в будь-який момент часу. Показано, наскільки ефективним і перспективним є застосування випаровування з метою забезпечення необхідного температурного режиму.

1. Lienhard J.H. A Heat Transfer Textbook, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2003. – 749 p. 2. Carsie A. Hall, Calvin Mackie. Semi-analytic solutions for freezing induced by evaporative cooling. International Journal of Heat and Mass Transfer 44 (2001) pp.1161-1170 3. Chan Ho Song, Dae-Young Lee, Sung TackRo. Cooling enhancement in an air-cooled finned heat exchanger by thin water film evaporation. International Journal of Heat and Mass Transfer 46 (2003) pp.1241–1249. 4. В.И. Егоров. Точные методы решения задач теплопроводности. Учебное пособие. – СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2006. – 48 с. 5. Федасюк Д.В. Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Видавництво Державного університету «Львівська політехніка», 1999. – 228 с. 6. http://twtmas.mpei.ac.ru/mas/Worksheets/Therm/T_T_4_Tab_04_48.mcd. 7. http://www.matweb.com/index.aspx 8. http://www.envmodels.com/index.php?lang=en