УДК 517.958:536.12

Л. Журавчак, Н. Забродська
Карпатське відділення Інституту геофізики
ім. С.І. Субботіна НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТУ ВИКЛИКАНОЇ ПОЛЯРИЗАЦІЇ У ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧАХ ГЕОЕЛЕКТРОРОЗВІДКИ

© Журавчак Л., Забродська Н., 2009

Розглянуто задачі геоелектророзвідки постійним струмом у кусково-однорідному півпросторі, які зводяться до задач теорії потенціалу з умовами ідеального та неідеального електричного контакту на межі поділу середовищ. За допомогою математичного моделювання враховано вплив ефекту викликаної поляризації та отримано обчислювальний алгоритм, який ґрунтується на поєднанні функцій Гріна для півпростору й фундаментальних розв'язків для простору рівнянь Лапласа з непрямими методами граничних та приграничних елементів. Досліджено випадки поверхневої, об'ємної і змішаної поляризації для середовищ, що поляризуються .

The influence of an induced polarization effect in problems of the potential theory using mathematical modeling is considered. The numerical-analytical algorithm bases on a combination of the special fundamental solution of the Laplace's equation for a half-space and fundamental solution of the Laplace's equation for a space with indirect methods of boundary and near-boundary elements and allows to investigate surface, volume and mixed polarization. This technique is approved for problems of geoelectrics by a direct current.

Вступ

Метод викликаної поляризації (ВП) ґрунтується на вивченні вторинних електричних полів, які виникають в земній корі під дією електричного струму [1, 2]. Ці поля мають електрохімічне походження, пов'язане з процесами, які відбуваються внаслідок контакту твердої речовини гірських порід з вологою, що міститься у внутрішній порах. На практиці викликана поляризація створюється імпульсами постійного струму, в проміжках між якими вимірюється вторинне поле ВП, або змінним струмом різної частоти переважно до 100 Гц. Вторинні електричні заряди утворюються тільки в неоднорідних середовищах, складених з твердої і рідкої фаз. У таких середовищах на границі фаз існує подвійний електричний шар, який характеризується упорядкованим положенням іонів. Наявність такої упорядкованої структури за появи зовнішнього джерела поля сприяє розвитку складних електрохімічних і електрокінетичних процесів. При цьому на одних ділянках поступово нагромаджуються заряди позитивного, а на інших – негативного знаку. Так в середовищі утворюються електричні диполі, які і є джерелами поля ВП. Після відключення зовнішнього поля вторинні заряди поступово розсмоктуються.

До складу гірської породи можуть входити речовини трьох типів: діелектрики (більшість породотвірних мінералів), іонні провідники (флюїд, який заповнює пори і тріщини та містить розчини солей) і електронні провідники (рудні мінерали). Найчастіше, коли тверда фаза представлена діелектриком, струм тече тільки в рідкій фазі. Отже, вектор напруженості електричного поля направлений паралельно подвійному електричному шару. При звуженні пор подвійний електричний шар починає впливати на рух зарядів різного знаку. У результаті в областях зміни діаметра пор нагромаджуються електричні заряди. Явище ВП в іонопровідних гірських породах проявляється досить слабо – поле вторинних зарядів, що виникли при протіканні електричного струму в земній корі, не перевищує перших відсотків від первинного поля. Якщо в середовищі

присутні мінерали з електронним типом провідності, такі як сульфіди (пірит, халькопірит та ін.), графіт, магнетит, або металеві техногенні об'єкти, то тверда фаза уже не є діелектриком, і струм тече впоперек подвійного електричного шару. При цьому відбуваються істотно інтенсивніші електрохімічні і електрокінетичні процеси, і поле вторинних джерел, які виникають на межі твердої і рідкої фази, може становити десятки відсотків від первинного поля.

Вторинні заряди можуть розподілятися в середовищі двома способами. У випадках, коли тверда фаза представлена діелектриком або коли в середовищі присутні вкраплені руди, вторинні заряди розподіляються у всьому об'ємі середовища, тобто існує об'ємна поляризація речовини. Для масивних руд чи техногенних металевих об'єктів вторинні заряди виникають на межі тіла, яке має електронну провідність, і йдеться про поверхневу поляризацію.

Як випливає з викладеного, явище викликаної поляризації проходить найінтенсивніше за наявності у середовищі електронопровідних мінералів. Тому метод ВП є одним з основних методів рудної геофізики [3, 4]. Причому, оскільки інтенсивність аномалій ВП пропорційна площі поверхні електронних провідників, метод дає змогу картувати не тільки масивні, але й вкраплені руди. Очевидно, що метод ВП може успішно застосовуватися і для вивчення техногенних металевих об'єктів (трубопроводів, металевих резервуарів та ін.). Є інформація, що хімічні процеси, пов'язані з наявністю вуглеводнів у гірських породах, можуть у визначених умовах приводити до утворення мінералів з електронною провідністю. Це явище відкриває перспективи використання методу ВП для пошуку і картування родовищ вуглеводнів. Крім того, метод ВП використовується для розв'язання гідрогеологічних і геоекологічних задач. В основу цього покладено залежність викликаної поляризації від вмісту у породах води та її мінералізації. Нарешті, його застосовують при геокартувальних роботах в комплексі з методом опорів [5–9].

Оскільки аналітичні розв'язки задач теорії потенціалу стосовно до кусково-однорідних областей класичними методами можна знайти тільки для включень канонічної чи близької до неї форми, то для об'єктів довільної форми при математичному моделюванні в останні роки все ширше використовують числові та числово-аналітичні методи, орієнтовані на застосування сучасних швидкодіючих комп'ютерів. Використання непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) [10] має низку незаперечних переваг при моделюванні процесів у кусково-однорідних середовищах, оскільки дає змогу точно задовольняти вихідні рівняння моделі, доступно описує необмежені і напівбезмежні об'єкти. Застосування цього методу потребує дискретизації тільки меж об'єкта та поділу середовищ, що економить обсяг оперативної пам'яті під час роботи алгоритму і дає порівняно високу точність розрахунків у внутрішніх точках. Однак, при обчисленні потенціалу електричного поля поблизу межі тіла та меж контакту точність розрахунків різко зменшується [11], а знаходження густини струму вимагає попереднього аналітичного виділення особливості (головного значення). З огляду на це у багатьох випадках, на нашу думку, доцільно застосовувати непрямий метод приграничних елементів (НМПГЕ) [12], який можна розглядати як один з варіантів методу джерела і віднести до непрямих методів досліджень, оскільки введені для одержання розв'язку задачі невідомі не є фізичними змінними.

Математична модель для знаходження потенціалу електричного поля з врахуванням викликаної поляризації

Розрахунки полів ВП зводяться до визначення поляризованого поля, яке існує в середовищі, і подальшого обчислення різниці поляризованого і первинного полів. Під поляризованим полем розуміємо сумарне поле, яке діє в період заряджання, під первинним – поле струмів в перший момент заряджання, коли ефектами ВП можна знехтувати. У будь-який фіксований момент заряджання поляризоване поле задовольняє рівняння Лапласа і обчислюється тими самими способами, що і поле постійного струму, при тих самих граничних умовах, але при ускладнених умовах контакту, різних для випадків поверхневої, об'ємної чи змішаної викликаної поляризації. При поверхневій поляризації розглядають ефект окремого електронопровідного включення чи покладу суцільної руди, що знаходяться в середовищі з іонною провідністю, при об'ємній поляризації – сумарний ефект поляризації багатьох електронопровідних включень.

Розглянемо кусково-однорідний півпростір $\Omega = \cup_{m=1}^{M} \Omega_m$, що складається з вміщуючого геосередовища Ω_1 та M-1 включень Ω_s (s=2,…,M). Потенціал $U^{(m)}(x)$ (m=1,…,M) цього поля у вміщуючому середовищі та включеннях описується рівнянням Лапласа:

$$P_0^m(U^{(m)}(x)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U^{(m)}(x)}{\partial x_i^2} = 0,\ x \in \Omega_m,\ m = 1,...,M, \qquad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$ – декартові координати.

Для врахування різних типів умов контакту у середовищах, які поляризуються, на межах поділу середовищ $\partial\Omega^s$ розглянуто три випадки [12]:

1) **поверхневої поляризації**:

$$U^{(1)}(x) - U^{(s)}(x) = -\lambda_s \frac{\partial U^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)}, \qquad \sigma_1 \frac{\partial U^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \sigma_s \frac{\partial U^{(s)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)},\ x \in \partial\Omega_s, \qquad (2)$$

2) **об'ємної поляризації**:

$$U^{(1)}(x) = U^{(s)}(x), \qquad \sigma_1^* \frac{\partial U^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \sigma_s^* \frac{\partial U^{(s)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)},\ x \in \partial\Omega_s \qquad (3)$$

3) **змішаного типу**, коли виникають і поверхнева, й об'ємна поляризації:

$$U^{(1)}(x) - U^{(s)}(x) = -\lambda_s \frac{\partial U^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)},\ \sigma_1^* \frac{\partial U^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \sigma_s^* \frac{\partial U^{(s)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)},\ x \in \partial\Omega_s \qquad (4)$$

де λ_s – коефіцієнт поверхневої поляризації на межі поділу середовищ $\partial\Omega_s$, σ_m – електропровідність Ω_m, $\mathbf{n}(x)$ – зовнішня однозначно визначена одинична нормаль до межі $\partial\Omega_1$ області Ω_1, $\sigma_m^* = \sigma_m(1 - \eta_m)$, η_m – коефіцієнт викликаної поляризованості середовища в Ω_m.

Для врахування ефекту викликаної поляризації і порівняння результатів розглянуто неполяризоване середовище, у якому на межі контакту задано умови неперервності потенціалу і нормальних складових густини струму:

$$U^{(1)}(x) = U^{(s)}(x), \qquad \sigma_1 \frac{\partial U^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \sigma_s \frac{\partial U^{(s)}(x)}{\partial \mathbf{n}(x)},\ x \in \partial\Omega_s. \qquad (5)$$

Перша з рівностей (5) виконується лише тоді, коли на межі поділу відсутні контактні електрорушійні сили (е.р.с.). У випадку наявності останніх при переході через межу поділу спостерігатиметься стрибок потенціалу, який дорівнюватиме за величиною цій контактній е.р.с.

Денна границя $\Gamma_d = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty,\ x_3 = 0\}$ півпростору електроізольована всюди, за винятком ділянок $\Gamma_{dj} \subset \Gamma_d$, в яких розміщені джерела струму:

$$-\sigma_1 \frac{\partial U^{(1)}(x_1, x_2, 0)}{\partial \mathbf{n}(x_1, x_2, 0)} = j(x_1, x_2, 0), \qquad (x_1, x_2, 0) \in \Gamma_d, \qquad (6)$$

$$-\sigma_1^* \frac{\partial U^{(1)}(x_1, x_2, 0)}{\partial \mathbf{n}(x_1, x_2, 0)} = j(x_1, x_2, 0), \qquad (x_1, x_2, 0) \in \Gamma_d, \qquad (7)$$

де $j(x_1, x_2, 0) \neq 0$ при $(x_1, x_2, 0) \in \Gamma_{dj}$, $j(x_1, x_2, 0) = 0$ при $(x_1, x_2, 0) \notin \Gamma_{dj}$.

Граничну умову (6) вибираємо для неполяризованих середовищ та у випадку поверхневої поляризації, а (7) – для випадків об'ємної та змішаної поляризації.

Як бачимо, введення нової характеристики моделі середовища – поляризованості дозволяє зберегти структуру основних рівнянь і спростити розв'язування прямих і обернених задач геоелектророзвідки для моделей об'єктів, що поляризуються.

Основні положення НМГЕ та НМПГЕ. Побудова інтегральних зображень розв'язків крайової задачі та граничних інтегральних рівнянь

Висвітлимо основні положення НМГЕ [10] та НМПГЕ [11]. З цією метою розглянемо множину $\mathbf{R}^3(M)$, складену з M просторів $\mathbf{R}^3_m$, яка володіє такими властивостями: $\mathbf{R}^3_m \cap \mathbf{R}^3 = \Omega_m \cup \partial\Omega_m$, $\mathbf{R}^3(M) \cap \mathbf{R}^3 = \Omega \cup \Gamma_d$, $\mathbf{R}^3_m \cap \mathbf{R}^3_s = \partial\Omega_s$. Розглянемо області $B_m \subset \mathbf{R}^3$ такі, що $\Omega_m \subset B_m$, $\partial\Omega_m \cap \partial B_m = \varnothing$. Уведемо зовнішні приграничні області $G_m = B_m \setminus \Omega_m$, а також невідомі функції $\varphi^{(mG)}(x)$, $\varphi^{(m\Gamma)}(x)$, які відповідно описують розподіл фіктивних джерел в G_m та на межах поділу середовищ $\Gamma_1 = \cup_{s=2}^{M}(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_s), \Gamma_s = \partial\Omega_s$. Після розширення областей визначення функцій $U^{(m)}(x)$ на $\mathbf{R}^3_m$ та з врахуванням того факту, що вибір джерел на границі півпростору у вигляді $\psi(x_1, x_2, 0) = -2j(x_1, x_2, 0)/\sigma_1$ для неполяризованих середовищ та у випадку поверхневої поляризації або $\psi(x_1, x_2, 0) = -2j(x_1, x_2, 0)/\sigma_1^*$ для випадків об'ємної та змішаної поляризації забезпечує виконання умов (6), (7), рівняння (1) перепишемо у вигляді:

$$P_0^1(U^{(1)}(x)) = -\varphi^{(1\gamma)}(x)\chi_1^\gamma - \psi(x_1, x_2, 0), x \in \mathbf{R}^3_1,$$

$$P_0^m(U^{(m)}(x)) = -\varphi^{(m\gamma)}(x)\chi_m^\gamma, x \in \mathbf{R}^3_m, m = 2,..., M, \quad (8)$$

де χ_m^G, χ_m^Γ – відповідно характеристичні функції областей G_m та меж Γ_m, тобто $\chi_m^\gamma = 1$ при $x \in \gamma_m$, $\chi_m^\gamma = 0$ при $x \notin \gamma_m$, $\gamma \in \{\Gamma, G\}$.

Використавши функцію Гріна оператора $P_0^1(U^{(1)}(x))$ для півпростору, яка автоматично задовольняє граничні умови (6), (7) при $j(x_1, x_2, 0) = 0$, та фундаментальні розв'язки операторів $P_0^s(U^{(s)}(x))$ для простору, для знаходження невідомого потенціалу електричного поля та похідної від нього по нормалі, отримаємо інтегральні зображення [11]:

$$U^{(1)}(x, \sigma_1) = \int_{\gamma_1} \Phi_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1)\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) + \int_{\Gamma_{dj}} \Phi_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1)\psi(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi), x \in \mathbf{R}^3_1, \quad (9)$$

$$U^{(s)}(x, \sigma_s) = \int_{\gamma_s} \Phi_3^{(s)}(x, \xi, \sigma_s)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi), \ x \in \mathbf{R}^3_s, \quad (10)$$

$$\frac{\partial U^{(1)}(x, \sigma_1)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \int_{\gamma_1} F_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1)\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) + \int_{\Gamma_{dj}} F_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1)\psi(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi), \ x \in \mathbf{R}^3_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial U^{(s)}(x, \sigma_s)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \int_{\gamma_s} F_3^{(s)}(x, \xi, \sigma_s)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi), \ x \in \mathbf{R}^3_s, \quad (12)$$

де $\Phi_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1) = \frac{1}{4\pi\sigma_1 r} + \frac{1}{4\pi\sigma_1 r'}$ – функція Гріна оператора $P_0^1(U^{(1)}(x))$ для півпростору;

$\Phi_3^{(s)}(x, \xi, \sigma_s) = \frac{1}{4\pi\sigma_s r}$ – фундаментальні розв'язки операторів $P_0^s(U^{(s)}(x))$ для простору;

$F_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1) = \frac{\partial \Phi_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1)}{\partial \mathbf{n}(x)}, F_3^{(s)}(x, \xi, \sigma_s) = \frac{\partial \Phi_3^{(s)}(x, \xi, \sigma_s)}{\partial \mathbf{n}(x)}, \ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3_m,$

$r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - \xi_i)^2}$, $r' = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2 + (x_3 + \xi_3)^2}$. Зрозуміло, що тут і надалі значення σ_1 вибираємо для неполяризованих середовищ та у випадку поверхневої поляризації, а значення σ_1^* – для випадків об'ємної та змішаної поляризації.

Спрямувавши у (9)–(12) x з середини областей Ω_m до меж поділу $\partial\Omega_s$ для задоволення умов контакту з (2)–(5), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi^{(m\gamma)}(\xi)$ з заданими на денній поверхні функціями $j(\xi) = j(\xi_1, \xi_2, 0)$.

У випадку поверхневої поляризації маємо ГІР:

$$\int_{\gamma_1} (\Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1))\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) - \int_{\gamma_s} \Phi_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi) =$$

$$= 2\int_{\Gamma_{dj}} (\frac{1}{\sigma_1}\Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1))j(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi),\ x \in \partial\Omega_s, \qquad (13)$$

$$\sigma_1 \int_{\gamma_1} F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1)\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) - \sigma_2 \int_{\gamma_s} F_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi) =$$

$$= 2\int_{\Gamma_{dj}} F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1)j(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi),\ x \in \partial\Omega_s. \qquad (14)$$

У випадку об'ємної поляризації маємо ГІР:

$$\int_{\gamma_1} \Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*)\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) - \int_{\gamma_s} \Phi_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s^*)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi) =$$

$$= \frac{2}{\sigma_1^*}\int_{\Gamma_{dj}} \Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*)j(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi),\ x \in \partial\Omega_s, \qquad (15)$$

$$\sigma_1^* \int_{\gamma_1} F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*)\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) - \sigma_s^* \int_{\gamma_s} F_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s^*)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi) =$$

$$= 2\int_{\Gamma_{dj}} F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*)j(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi),\ x \in \partial\Omega_s. \qquad (16)$$

У випадку змішаної поляризації маємо ГІР:

$$\int_{\gamma_1} (\Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*))\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) - \int_{\gamma_s} \Phi_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s^*)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi) =$$

$$= 2\int_{\Gamma_{dj}} (\frac{1}{\sigma_1^*}\Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1^*))j(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi),\ x \in \partial\Omega_s, \qquad (17)$$

доповнені рівняннями (16).

Для неполяризованих середовищ у випадку ідеального електричного контакту маємо ГІР:

$$\int_{\gamma_1} \Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1)\varphi^{(1\gamma)}(\xi)d\gamma_1(\xi) - \int_{\gamma_s} \Phi_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s)\varphi^{(s\gamma)}(\xi)d\gamma_s(\xi) =$$

$$= \frac{2}{\sigma_1}\int_{\Gamma_{dj}} \Phi_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1)j(\xi)d\Gamma_{dj}(\xi),\ x \in \partial\Omega_s, \qquad (18)$$

доповнені рівняннями (14).

Просторова дискретизація математичної моделі

Оскільки здійснити аналітичне інтегрування у граничних інтегральних рівняннях (13)–(18) для прикладних задач внаслідок довільності форми включень Ω_s і функцій $\varphi^{(m\gamma)}(\xi)$ та $j(\xi)$ практично неможливо, здійснимо просторову дискретизацію за допомогою таких кроків. Уведемо граничні $\Gamma_v^m (v = 1,...,V_m)$ та приграничні елементи $G_v^m (v = 1,...,V_m)$ із заданими у них «фіктивними» джерелами струму невідомої інтенсивності, апроксимованими константами $d_v^{\gamma m}$. Застосуємо метод колокації для задоволення конкретних контактних умов (вибраних з (3)–(6)) у середині граничних

елементів – точках $x \in \Gamma_w^s$ $(w = 1,...,V_s$, $\Gamma_w^s = \partial G_w^s \cap \partial\Omega_s$, $\cup_{w=1}^{V_s} \Gamma_w^s = \partial\Omega_s)$. Тоді замість (13)–(18) одержимо системи алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для знаходження невідомих $d_v^{\gamma m}$:

у випадку поверхневої поляризації:

$$\sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} (\Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1)) d\gamma_v^1(\xi) - \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma s} \int_{\gamma_v^s} \Phi_3^{(s)}(x^w, \xi, \sigma_s) d\gamma_v^s(\xi) =$$

$$= 2 \int_{\Gamma_{dj}} (\frac{1}{\sigma_1} \Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1)) j(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi),\ x^w \in \partial\Omega_s, \quad (19)$$

$$\sigma_1 \sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1) d\gamma_v^1(\xi) - \sigma_s \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma s} \int_{\gamma_v^s} F_3^{(s)}(x^w, \xi, \sigma_s) d\gamma_v^s(\xi) = 2 \int_{\Gamma_{dj}} F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1) j(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi); \quad (20)$$

у випадку об'ємної поляризації:

$$\sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} \Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) d\gamma_v^1(\xi) - \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma 2} \int_{\gamma_v^s} \Phi_3^{(2)}(x^w, \xi, \sigma_s^*) d\gamma_v^s(\xi) =$$

$$= \frac{2}{\sigma_1^*} \int_{\Gamma_{dj}} \Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) j(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi), \qquad x^w \in \partial\Omega_s, \quad (21)$$

$$\sigma_1^* \sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) d\gamma_v^1(\xi) - \sigma_s^* \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma s} \int_{\gamma_v^s} F_3^{(s)}(x^w, \xi, \sigma_s^*) d\gamma_v^s(\xi) =$$

$$= 2 \int_{\Gamma_{dj}} F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) j(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi); \quad (22)$$

у випадку поляризації змішаного типу**:**

$$\sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} (\Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*)) d\gamma_v^1(\xi) - \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma 2} \int_{\gamma_v^s} \Phi_3^{(2)}(x^w, \xi, \sigma_s^*) d\gamma_v^s(\xi) =$$

$$= 2 \int_{\Gamma_{dj}} (\frac{1}{\sigma_1^*} \Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) + \lambda_s F_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1^*) j(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi),\ x^w \in \partial\Omega_s, \quad (23)$$

та систему рівнянь (22);

у випадку ідеального контакту:

$$\sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} \Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1) - \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma s} \int_{\gamma_v^s} \Phi_3^{(s)}(x^w, \xi, \sigma_s) d\gamma_v^s(\xi) = \frac{2}{\sigma_1} \int_{\Gamma_{dj}} \Phi_{3h}^{(1)}(x^w, \xi, \sigma_1) j(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi), x^w \in \partial\Omega_s, \quad (24)$$

та система рівнянь (20).

Підставивши одержані як розв'язки відповідних систем рівнянь (19), (20); (20), (21); (22), (23); (20), (24) $d_v^{\gamma m}$ у (9)-(12), знайдемо потенціал електричного поля $U^{(m)}(x, \sigma_m)$ та його напруженість $E^{(m)}(x, \sigma_m) = -\frac{\partial U^{(m)}(x, \sigma_m)}{\partial \mathbf{n}(x)}$ у будь-яких точках півпростору, включаючи межі поділу середовищ та денну поверхню:

$$U^{(1)}(x, \sigma_1) = \sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int_{\gamma_v^1} \Phi_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1) d\gamma_v^1(\xi) + \int_{\Gamma_{dj}} \Phi_{3h}^{(1)}(x, \xi, \sigma_1) \psi(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi), x \in \Omega_1 \cup \partial\Omega_1, \quad (25)$$

$$E^{(1)}(x,\sigma_1) = -\sum_{v=1}^{V_1} d_v^{\gamma 1} \int\limits_{\gamma_v^1} F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1) d\gamma_v^1(\xi) - \int\limits_{\Gamma_{dj}} F_{3h}^{(1)}(x,\xi,\sigma_1)\psi(\xi) d\Gamma_{dj}(\xi)\,, \quad (26)$$

$$U^{(s)}(x,\sigma_s) = \sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma s} \int\limits_{\gamma_v^s} \Phi_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s) d\gamma_v^s(\xi)\,,\ E^{(s)}(x,\sigma_s) = -\sum_{v=1}^{V_s} d_v^{\gamma s} \int\limits_{\gamma_v^s} F_3^{(s)}(x,\xi,\sigma_s) d\gamma_v^s(\xi)\,, x \in \Omega_s \cup \partial\Omega_s\,. \quad (27)$$

Зауважимо, що густину струму, використовуючи (26) та другу з формул (27), знаходимо так: $j^{(m)}(x,\sigma_m) = \sigma_m E^{(m)}(x,\sigma_m)$.

Способи розрахунку позірної поляризованості

На основі лабораторних і польових експериментів встановлено, що в загальному випадку е.р.с. викликаної поляризації залежить від мінерального складу гірських порід і руд, їх структури й текстури, вологонасиченості, мінералізації, складу і властивостей електроліту, інтенсивності й тривалості струму поляризації [12]. Утворення викликаних потенціалів починається через соті та десяті частки секунди після ввімкнення струму. З часом е.р.с. ВП зростає спочатку швидко, а потім сповільнюється і через 2–5 хвилин досягає насичення (своєї верхньої межі). Величина е.р.с. і швидкість досягнення нею максимального значення залежать від зазначених факторів і переважно від густини струму поляризації. При слабких струмах ($j \approx$ 10-100 мкА/см^2), які переважно використовують в електророзвідці, викликана поляризація іонних й електронних провідників лінійно залежить від густини струму. Тому для більшості випадків можна вважати, що е.р.с. ВП пропорційна напруженості поля, яке її викликає:

$$E_{BП}^{(m)}(x,\sigma_m) = \eta_m E^{(m)}(x,\sigma_m)\,, \quad (28)$$

де η_m – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який характеризує поляризованість гірської породи в області Ω_m. З формули (27) випливає, що

$$\eta_m = \frac{E_{BП}^{(m)}(x,\sigma_m)}{E^{(m)}(x,\sigma_m)} = \frac{\partial U_{BП}^{(m)}(x,\sigma_m)}{\partial \mathbf{n}(x)} \Big/ \frac{\partial U^{(m)}(x,\sigma_m)}{\partial \mathbf{n}(x)}\,. \quad (29)$$

Під час практичних вимірювань у неоднорідному середовищі результат обчислення за формулою (29) називають позірною поляризованістю і позначають $\eta_k^{(m)}$.

Потенціал поля ВП обчислюють як різницю потенціалів повного поляризованого поля $U_{П}^{(m)}(x,\sigma_m)$ або $U_{П}^{(m)}(x,\sigma_m^*)$ і первинного поля $U_0^{(m)}(x,\sigma_m)$:

$$U_{BП}^{(m)}(x,\sigma_m) = U_{П}^{(m)}(x,\sigma_m) - U_0^{(m)}(x,\sigma_m)\ ,\ U_{BП}^{(m)}(x,\sigma_m^*) = U_{П}^{(m)}(x,\sigma_m^*) - U_0^{(m)}(x,\sigma_m)\ ,$$

де $U_0^{(m)}(x,\sigma_m)$ – отримують як розв'язок задачі (1), (5), (6), $U_{П}^{(m)}(x,\sigma_m)$ – як розв'язок задачі (1), (2), (6), $U_{П}^{(m)}(x,\sigma_m^*)$ – як розв'язок однієї з задач: (1), (3), (7) або (1), (4), (7).

Як бачимо, при розрахунках полів викликаної поляризації можна успішно використати методику розв'язування задач електроророзвідки постійним струмом, яка дає значення потенціалу, напруженості та інших характеристик первинного поля, а також позірного питомого опору $\rho_k^{(m)}$ в неоднорідних середовищах [1].

Числові дослідження

Обчислювальні експерименти проведено для випадку, коли у півпросторі на глибині $h_0 = 2$ м розміщено включення у формі паралелепіпеда з розмірами $p_1 = 4$ м, $p_2 = 4$ м, $p_3 = 2$ м. Джерела струму інтенсивністю +1 та -1 знаходилися відповідно у точках $x^A = (-20,0,0), x^B = (20,0,0)$. Всі

геометричні параметри є безрозмірними, оскільки з врахуванням критерію подібності вони зменшені порівняно з реальними у сто разів. Позірний питомий опір на денній поверхні обчислювали за формулою:

$$\rho_k(x) = k_u \left| U_0^{(1)}(x_N, \sigma_m) - U_0^{(1)}(x_M, \sigma_m) \right|,$$

де x^N та x^M – координати рухомих пунктів спостережень,

$k_u = \frac{1}{\Phi_{3h}^{(1)}(x^M, x^A, \sigma_m)} - \frac{1}{\Phi_{3h}^{(1)}(x^M, x^B, \sigma_m)} + \frac{1}{\Phi_{3h}^{(1)}(x^N, x^B, \sigma_m)} - \frac{1}{\Phi_{3h}^{(1)}(x^N, x^A, \sigma_m)}$ – геометричний коефіцієнт установки.

Досліджувались закономірності зміни характеристик електричного поля від фізичних та геометричних параметрів включення: його електропровідності, коефіцієнтів поверхневої поляризації й об'ємної поляризованості та розмірів – з метою формулювання практичних рекомендацій при розпізнаванні локальних неоднорідностей.

Граничну поверхню паралелепіпеда розбивали на 32 граничні елементи і на них будували пригранічні елементи висотою 0,5, тобто СЛАР (19), (20); (20), (21); (22), (23); (20), (24) складалась з 64 рівнянь. Зазначимо, що розмірності всіх фізичних величин вибирались у системі СІ.

Маючи оперативну числову наближену процедуру розв'язування прямої тривимірної задачі та використовуючи сукупність площівних даних для знаходження розв'язку оберненої, ми одержимо результат, який залежно від якості виміряних даних та точності програмного забезпечення можна буде оцінити в діапазоні від трансформації в позірне тривимірне середовище до повної інверсії. Створення оперативної тривимірної системи інтерпретації вимагає значного часу, оскільки потребує поступового нагромадження нового досвіду і поетапності у розвитку пропонованого підходу. Цю роботу можна розглядати як початковий етап такої системи, який містить програмне забезпечення для розв'язування прямої задачі та елементи розпізнавання для оберненої.

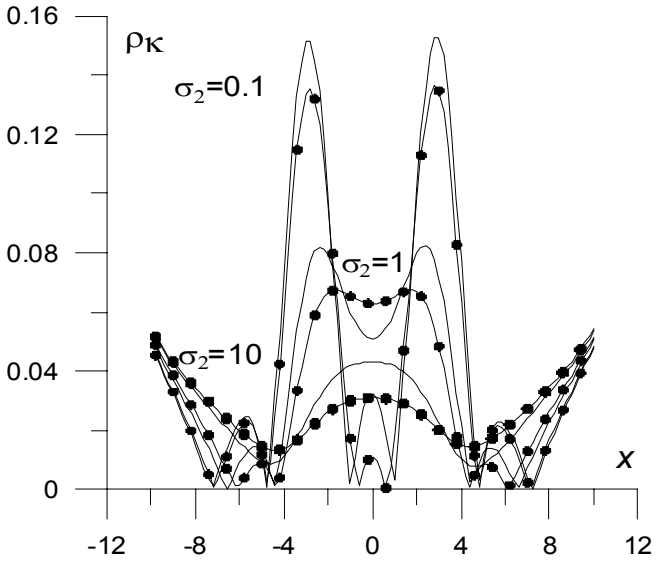

Рис. 1. Числові результати позірного опору для неполяризованого (криві з символами) і об'ємно поляризованого ($\eta_2 = 0.5$, криві без символів) включення при різних його провідностях $\sigma_2 = 0.1, 1.0, 10.0$ *См/м*

Традиційний спосіб одержання візуалізованої інформації з електророзвідувальних даних полягає в трансформації значень потенціалу електричного поля у різні позірні величини. Вона здійснюється шляхом зіставлення даних, отриманих для реального змодельованого об'єкта з даними для однорідного середовища з врахуванням геометрії живильної та приймальної ліній. Для визначення місця залягання включення, оцінки його електричних характеристик та об'єму, еквівалентного запасам сировини, нами розглянуті елементи тривимірної інтерпретації результатів профілювання на основі значень потенціалу електричного поля у позірні питомий опір та поляризованість. За значеннями ρ_k (рис. 1) можна оцінити співвідношення між коефіцієнтами електропровідності середовища і включення, а також виявити краї включення, які проявляються глобальними мінімумами.

На рис. 2 зображено результати позірної поляризованості, обчислені за формулою (29) та помножені на 100%, при врахуванні впливу різних типів поляризації: поверхневої (рис. 2а), об'ємної (рис. 2б) та сумарного ефекту обох цих типів (рис. 2в).

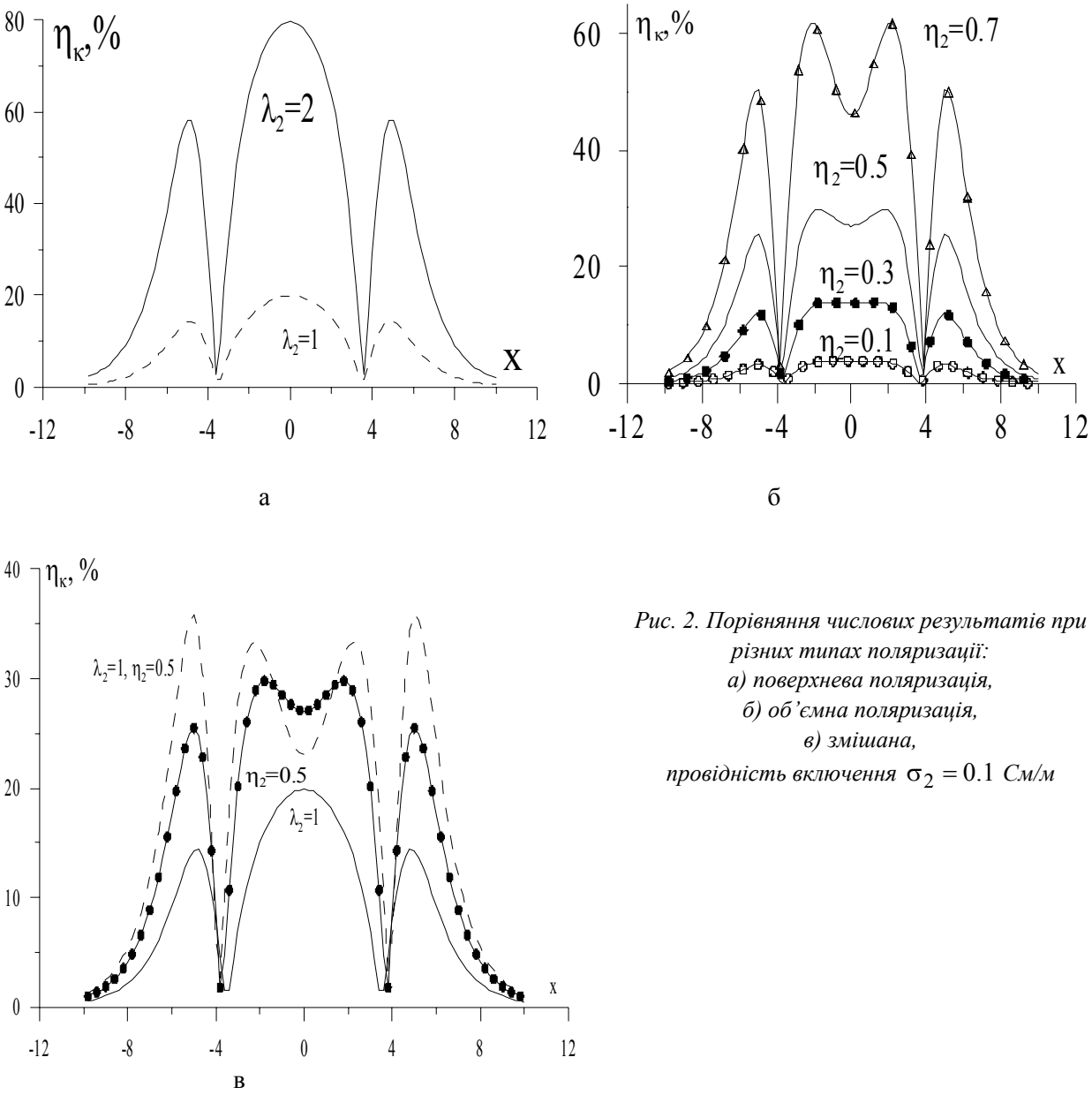

Рис. 2. Порівняння числових результатів при різних типах поляризації:
а) поверхнева поляризація,
б) об'ємна поляризація,
в) змішана,
провідність включення $\sigma_2 = 0.1$ *См/м*

Як бачимо, збільшення поляризованості включення η_2 та коефіцієнта поляризації λ_2 призводить до збільшення амплітуди кривих. Межі включення відбиваються мінімумами на усіх кривих, що дає змогу визначати його геометричне положення.

Висновки

Запропонована методика дає змогу:

1) знаходити потенціал електричного поля з урахуванням ефектів викликаної поляризації у кусково-однорідному півпросторі з включеннями довільної форми;

2) розміщувати точкові та скінченних розмірів джерела різних типів і точки спостереження у будь-якому місці півпростору, моделюючи наземні та свердловинні вимірювання;

3) на основі розв'язків прямої задачі моделювати ефективні трансформації для оперативної обробки великих масивів площівних даних при тривимірній інтерпретації.

З усього викладеного випливає, що запропонована для розв'язування прямих тривимірних задач у провідному кусково-однорідному півпросторі методика є ефективною, а розвиток створеного на її основі програмного забезпечення може відбуватись із врахуванням таких факторів. Окрім розглянутого кусково-однорідного півпростору, варто дослідити ще й шарувату модель з включеннями довільної форми, оскільки вона істотна для сучасних умов застосування електророзвідки. Водночас для оперативнішої обробки великих масивів площівних даних під час розв'язування оберненої задачі геоелектрики слід одержати інтерпретаційні формули на базі кривих позірного питомого опору та позірної поляризованості.

Отримані результати можуть бути використані для створення методів розпізнавання у пошуковій геофізиці при оконтуренні покладів корисних копалин, у матерілознавстві та дефектоскопії при визначенні положення та розмірів чужорідних включень і дефектів.

1. Электроразведка: Справочник геофизика / Под ред. А.Г. Тархова. – М.: Недра, 1979. – 518 с. 2. Жданов М.С. Электроразведка. – М.: Недра, 1986. – 316 с. 3. Комаров В.А. Электроразведка методом вызванной поляризации. – Л.: Недра, 1980. – 391 с. 4. Карасев А.П., Птицын А.Б., Юдицких Е.Ю. Быстрые переходные процессы вызванной поляризации. – Новосибирск: Наука, 2005. – 291 с. 5. Кожевников Н.О., Артеменко И.В. Моделирование влияния диэлектрической релаксации в мерзлых породах на переходную характеристику незаземленной петли // Криосфера Земли. – 2004. – Т. VIII, №2. – С. 30–39. 6. Kozhevnikov, N.O., and Antonov, E.Y. Fast-decaying IP in frozen unconsolidated rocks and potentialities for its use in permafrost-related TEM studies // Geophysical Prospecting, 2006, 54, pp. 383–397. 7. Yeltsov .N., Epov M.I., Antonov E.Yu. Reconstruction Of Cole-Cole Parameters from IP Induction Sounding Data // Journal of the Balkan Geophysical Society, Vol.5, No 1, Feb. 2002, pp. 15–20. 8. Эпов М.И., Антонов Е.Ю., Павлов Е.В. Связь частотной дисперсии электромагнитных параметров и пространственной неоднородности среды с высоким разрешением в электроразведке // Геология и геофизика. – 2004. – Т. 45. – № 6. – С. 734–743. 9. Электроразведка методом сопротивлений / Под ред. В.К. Хмелевского и В.А. Шевнина. – М.: МГУ, 1994. – 160 с. 10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с. 11. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод пограничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с. 12. Матвеев Б.К. Электроразведка при поисках месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1982. – 375 с.