

\*С. Гладун, Я. П'янило, М. Притула  
\*ДК "Укртрансгаз" НАК "Нафтогаз України",  
Центр математичного моделювання ІППММ  
ім. Я.С. Підстригача НАН України

## НЕСТАЦІОНАРНА ДИФУЗІЯ ГАЗУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ

© Гладун С., П'янило Я., Притула М., 2009

**Досліджено математичну модель дифузії газу в пористих середовищах циліндричної форми із зосередженим джерелом в центрі. На основі вивчення поведінки розв'язків такої моделі та впливу на нього різного роду неузгодженостей знайдені умови мінімізації відхилення розв'язку від його реального значення.**

**In work the mathematical model of diffusion of gas in porous environments of the cylindrical form with the concentrated source in the centre is investigated. On the basis of studying of behaviour of decisions of such model, and influence on it of any nonagreements, conditions of minimisation of a deviation of the decision from its real value are found.**

### Постановка проблеми та огляд результатів

Однією із важливих особливостей притоку газу до свердловини є значні втрати тиску в привибійній зоні пласту. Так, на привибійну зону радіусом 0.4 м припадає, в реальних пластах-колекторах при незначних дебітах і при стаціонарній фільтрації газу за законом Дарсі, близько 20% всіх втрат тиску. Із збільшенням депресії на пласт втрати тиску в околі свердловини зростають. Також зростає відповідна частка загальних втрат тиску, яка припадає на привибійну зону пласту в умовах недосконалого за характером розкриття свердловини, порушення закону Дарсі і при нестационарному притоку газу до свердловини [1,2]. Величина втрати тиску в околі свердловини суттєво впливає в умовах водонапірного режиму на підтягування конусу води, що обмежує величину її максимального дебіту. На величину максимального дебіту впливає і обмеженість знизу тиску газу на гирлі свердловини. Оскільки основними параметрами газосховищ є їх піковість (сумарний максимальний відбір газу за заданий час) та мінімальні часові інтервали відборів і закачування, це зумовлює вивчення газодинамічних процесів в привибійних зонах [3,4]. Складність такого вивчення полягає в тому, що розрахунок основних параметрів газу в околі свердловини та ідентифікацію гідродинамічних параметрів вибійної зони потрібно проводити одночасно. Не менша проблема виникає і з побудовою адекватних математичних моделей і методів. Це пов'язано, в першу чергу, з дискретністю вхідних даних та їх точністю. На основі цих даних будуються початково-граничні умови відповідних задач математичної фізики. При їх розв'язуванні виникають питання існування, стійкості розв'язку та забезпечення з потрібною точністю відповідних балансових показників. Неточності в замірах, усереднення розподілених параметрів, дискретизація, метод та багато інших факторів впливають на неузгодженість початково-граничних умов з одного боку, та рівнянь математичної фізики, які описують рух газу в околі зосереджених джерел – з іншого. Це приводить доволі часто до результатів із значними похибками або до неможливості отримати будь який результат. Отримати обґрунтований результат без вивчення поведінки розв'язків від різного роду можливих (згаданих вище) неузгодженостей неможливо. Більше того, необхідно знайти спосіб максимально нейтралізувати такий негативний вплив на розв'язок задачі.

**Метою роботи** є дослідження особливостей поведінки розв'язку задачі на параметри газу в околі зосереджених джерел, які виникають за неузгоджених початково-граничних умов, та знаходження способів їх усунення.

З літератури відомо, що при невеликих товщинах пластів розподіл тиску на його поверхні достатньо добре описується нелінійним диференціальним рівнянням [1–3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kh}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{kh}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 2mh \left( \frac{\partial p}{\partial t} \frac{p}{z} + 2qp_{am} \right), \quad (1)$$

де  $k, m, h$  – коефіцієнти проникності, пористості, ефективна газонасичена товщина пласту відповідно;  $p$  – тиск газу у точці пласту з координатами  $x, y$  в момент часу  $t$ ;  $\mu, z$  – відповідно коефіцієнти динамічної в'язкості і стисливості газу;  $q$  – густина відбору газу. Параметри  $k, \mu$  залежать як від координат, так і від часу. Якщо розглядати розподіл тиску в області свердловини, то рівняння (1) доцільно записати в циліндричних координатах. Враховуючи, що область свердловини порівняно із всім сховищем є невеликою, параметри, які входять до рівняння (1), можна вважати сталими за координатою на деякому проміжку часу. За таких допущень рівняння (1) в циліндричних координатах матиме вигляд [2]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{D}{p_0} \frac{\partial p}{\partial \tau}, \quad (2)$$

де  $r$  – радіус-вектор, проведений з центра свердловини, за Лейбензоном

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left( 1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta},$$

$p_0, p_2$  – початкове значення тиску та значення тиску на границі області,

$$\beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu}.$$

Нехай радіус зовнішнього кола  $S_0$  дорівнює  $a$ , радіус концентричного йому внутрішнього кола  $\tilde{s}$  дорівнює  $b$ . Задамо граничні умови: на зовнішній границі  $S_0$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0;$$

на внутрішній границі  $-P = P_2 \equiv const$ . Тут  $P = p^2$ ,  $P_2 = p_2^2$ ,  $P_0 = p_0^2$ . Початковий розподіл тиску є сталим і дорівнює  $P_0$ . За таких умов розв'язок рівняння (2) при заданих початкових і граничних умовах має вигляд

$$P = P_2 - 2(P_0 - P_2) \sum_{m=1}^{\infty} D_m \exp\left(-\frac{P_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right). \quad (3)$$

У рівності (3) позначено:

$$D_m = \frac{(b\lambda_m) Z_1(b\lambda_m) Z_0(r\lambda_m)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}$$

$$Z_0(\lambda_m r) = J_0(\lambda_m r) + A_m N_0(\lambda_m r),$$

$$Z_1(\lambda_m r) = J_1(\lambda_m r) + A_m N_1(\lambda_m r),$$

$J_i(\lambda_m r)$  – функція Бесселя дійсного аргументу порядку  $i$   $N_i(\lambda_m r)$  – функція Неймана порядку  $i$ ,  $\lambda_m$  – корені рівняння

$$J_0(\mu x) N_1(x) - J_1(x) N_0(\mu x) = 0, \quad (4)$$

$$\mu = b/a, \quad a\lambda_m = x, \quad b\lambda_m = \mu x.$$

Ваговий дебіт свердловини за відомим розподілом тиску в області обчислюється за формулою

$$G = \frac{2\pi nkhg}{\beta(n+1)\mu} \left[ r \frac{\partial P}{\partial r} \right]_{r=b}$$

Якщо використати знайдений розподіл тиску в останній формулі, то отримаємо

$$G = \frac{4\pi nkhg(P_0 - P_2)}{\beta(n+1)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m)^2 Z_1(b\lambda_m) Z_1(r\lambda_m) \exp\left(-\frac{p_0\tau\lambda_m^2}{D}\right)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}$$

Використовуючи властивості функцій Бесселя та Неймана, після тотожних перетворень з останньої формули отримаємо

$$G = \frac{4\pi nkhg(P_0 - P_2)}{\beta(n+1)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp\left(-\frac{p_0\tau\lambda_m^2}{D}\right), \quad (5)$$

де

$$B_m = \frac{2N_1^2(a\lambda_m)}{N_0^2(b\lambda_m) - N_1^2(a\lambda_m)}$$

### Обчислювальний експеримент

Обчислювальний експеримент проводився за таких значень параметрів: початковий пластовий тиск  $p_n=50$  атм, тиск на внутрішньому контурі  $p_c=49$  атм, внутрішній радіус  $r_c=0.1$  м, зовнішній радіус  $r_k=750$  м, абсолютна точність знаходження коренів  $\epsilon_k=0.000001$ , абсолютна точність обчислення сум  $\epsilon_c=0.001$ , коефіцієнт проникності  $k=1.02d-12$  м<sup>2</sup>, коефіцієнт пористості  $m=0.2$ , коефіцієнт динамічної в'язкості  $\mu=1.223d-5$ , густина газу в стандартних умовах  $\rho_0=0.682$  кг/м<sup>3</sup>, температура газу  $T=300$  К, газова стала  $R=510$  Дж/кг °К для різних значень часів. Зауважимо, що в цьому випадку початкові і граничні умови є неузгодженими, оскільки при  $t=0$  та  $r=r_c$  функція розподілу тиску  $p(r,t)$  має розрив першого роду (стрибок  $|p_c - p_n|$ ). Результати обчислень подані у вигляді рисунків (рис. 1–4).

Таблиця 1

Значення перших коренів рівняння (4)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda$	0.494	4.056	7.255	10.426	13.586	16.742	19.896	23.047	26.197

Таблиця 2

Значення доданків, що стоять під сумами у формулах, які забезпечують задану точність

m	r	$D_m$	$D_m \exp\left(-\frac{p_0\tau\lambda_m^2}{D}\right)$		$B_m$	$B_m \exp\left(-\frac{p_0\tau\lambda_m^2}{D}\right)$	
			1h	5h		1h	5h
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.00E-01	-5.58E-01	-5.56E-01	-5.48E-01	4.01E-06	3.99E-06	3.94E-06
2	1.00E-01	-5.38E-02	-3.84E-02	-1.61E-02	4.12E-06	2.94E-06	1.23E-06
3	1.00E-01	-3.19E-02	-1.08E-02	-6.65E-04	4.77E-06	1.62E-06	9.93E-08
4	1.00E-01	-2.33E-02	-2.50E-03	-7.85E-06	5.29E-06	5.67E-07	1.78E-09
5	1.00E-01	-1.85E-02	-4.18E-04		5.73E-06	1.29E-07	
6	1.00E-01	-1.55E-02	-4.90E-05		6.13E-06	1.94E-08	
7	1.00E-01	-1.34E-02	-3.94E-06		6.49E-06	1.91E-09	
1	3.00E+02	-5.41E-01	-5.38E-01	-5.31E-01	9.70E-02	9.65E-02	9.52E-02
2	3.00E+02	-1.72E-01	-1.23E-01	-5.12E-02	-9.41E-02	-6.71E-02	-2.81E-02
3	3.00E+02	1.61E-02	5.47E-03	3.36E-04	-1.82E-01	-6.17E-02	-3.79E-03
4	3.00E+02	9.52E-03	1.02E-03	3.21E-06	7.42E-01	7.96E-02	2.50E-04

1	2	3	4	5	6	7	8
5	3.00E+02	-9.52E-01	-2.15E-02		1.88E-01	4.25E-03	
6	3.00E+02	-5.00E-03	-1.58E-05		5.68E-01	1.79E-03	
7	3.00E+02	-6.39E-03	-1.88E-06		-3.12E-01	-9.20E-05	
1	6.00E+02	-5.20E-01	-5.18E-01	-5.11E-01	5.38E-01	5.36E-01	5.29E-01
2	6.00E+02	2.79E-02	1.99E-02	8.31E-03	-3.83E-01	-2.73E-01	-1.14E-01
3	6.00E+02	-2.90E-02	-9.84E-03	-6.04E-04	3.72E-01	1.26E-01	7.75E-03
4	6.00E+02	-2.56E-02	-2.75E-03	-8.64E-06	-4.71E-01	-5.05E-02	-1.59E-04
5	6.00E+02	5.83E-03	1.32E-04		8.77E-01	1.98E-02	
6	6.00E+02	-3.38E-03	-1.07E-05		-1.73E+01	-5.45E-02	
7	6.00E+02	3.14E-03	9.24E-07		-1.23E+00	-3.63E-04	
1	7.40E+02	-5.15E-01	-5.12E-01	-5.06E-01	1.48E+00	1.47E+00	1.46E+00
2	7.40E+02	2.15E-02	1.54E-02	6.42E-03	7.71E+00	5.50E+00	2.30E+00
3	7.40E+02	-9.59E-03	-3.25E-03	-2.00E-04	-6.66E+00	-2.26E+00	-1.39E-01
4	7.40E+02	5.82E-03	6.24E-04	1.96E-06	9.32E+00	1.00E+00	3.14E-03
5	7.40E+02	-4.05E-03	-9.13E-05		-1.58E+01	-3.56E-01	
6	7.40E+02	3.04E-03	9.62E-06		4.04E+01	1.28E-01	

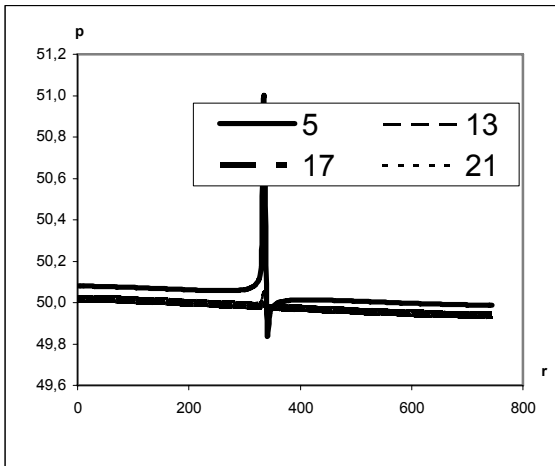


Рис. 1. Залежність розподілу пластового тиску від радіуса для різних значень часу (цифра означає кількість годин від початку відбору)

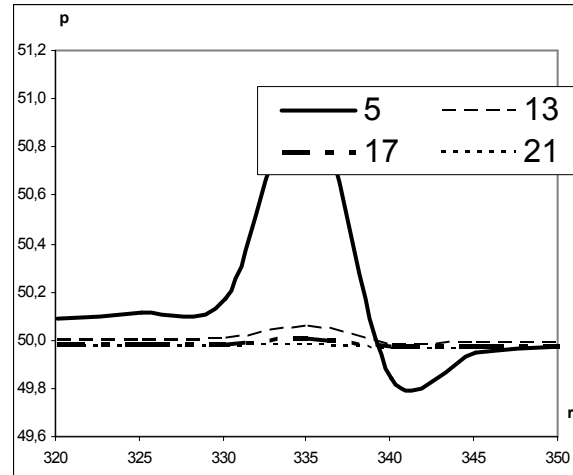


Рис. 2. Залежність розподілу пластового тиску від радіуса в околі особливої точки для різних значень часу (цифра означає кількість годин від початку відбору)

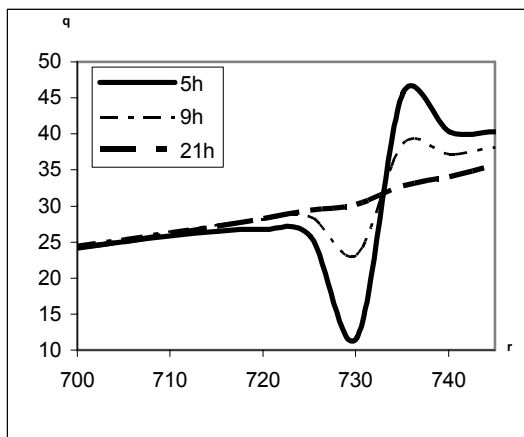


Рис. 3. Залежність дебіту свердловини від радіуса в околі особливої точки для різних значень часу (цифра означає кількість годин від початку відбору)

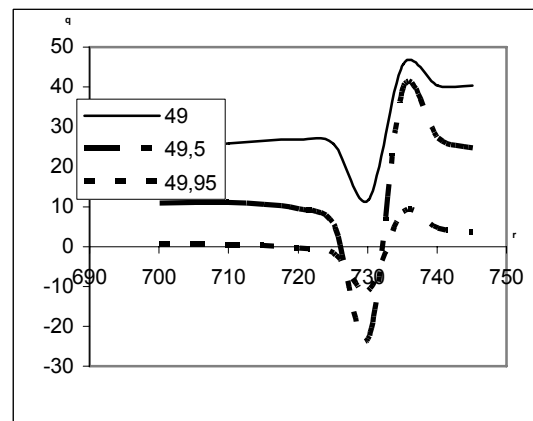


Рис. 4. Залежність дебіту свердловини від радіуса в околі особливої точки для різних значень граничної умови на внутрішньому контурі (цифра означає величину пластового тиску в атмосферах)

### Висновки та рекомендації

1. З отриманих результатів видно, що за рахунок неузгодженості початкових і граничних умов виникають особливі точки як при обчисленні тиску, так і при обчисленні відбору газу.
2. Особливі точки функцій  $p(r,t)$  та  $q(r,t)$  не збігаються, що вимагає їх окремого дослідження.
3. В околі особливих точок за рахунок неузгодженості початкових і граничних умов значення функцій суттєво відхиляються від своїх дійсних значень.
4. Як видно з рис. 1–3, величина впливу неузгодженості початкових і граничних зменшується з часом, отже, отримані розв'язки необхідно використовувати при достатньо великих значеннях часу.
5. Результати обчислень, подані на рис. 4, показують, що узгодженість початкових і граничних умов веде до зменшення відхилення знайденого розв'язку від реального.
6. З проведених досліджень випливає, що для уникнення появи відхилення знайденого розв'язку від дійсного необхідна узгодженість початкових і граничних умов. У протилежному випадку таку неузгодженість необхідно враховувати при побудові відповідних диференціальних рівнянь – моделі руху газу.
7. Як видно із результатів обчислень, поданих в таблицях, поведінку шуканих розв'язків визначають декілька перших доданків відповідних сум. Функції Бесселя та Неймана мають осцилюючий характер і особливість в нулі. Така їх особливість вимагає достатньо точного їх обчислення при розв'язуванні рівняння (4).

1. Тетерев И.Г., Шешуков Н.Л., Нанивский Е.М. *Управление процессами добычи газа*. – М.: Недра, 1981. – 248 с. 2. Лапук Б.Б. *Теоретические основы разработки месторождений природных газов*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 296 с. 3. П'янило Я.Д., Притула М.Г. *Дослідження впливу параметрів пласту та привибійної області свердловини на розрахунок дебіту свердловини // Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології*. – 2002. – №392. – С.45–49. 4. Притула М.Г., П'янило Я.Д., Савула С.В. *Розрахунок дебіту свердловини з врахуванням глибини спуску ліфтової труби // Нафтова і газова промисловість*. – 2002. – № 3. – С. 25–28.