

Недоліком цього алгоритму є те, що необхідно постійно перебудовувати дерево оптимального згорання схем для знаходження кожної з підсхем.

Висновок

Запропоновано та розкрито особливості стратегій та алгоритмів послідовного пакування схем із заданими характеристиками та обмеженнями. Розглянуті алгоритми піддаються реалізації на ПК і можуть бути базою для реалізації ефективних програмних засобів вирішення задачі пакування схем із заданими характеристиками та обмеженнями.

1. Базилевич Р.П. *Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств.* – Львов: Вища школа: Изд-во при Львов. гос. ун-те, 1981. – 168 с. 2. Базилевич Р.П., Подольський І.В. *Особливості організації пакету програм для ієрархічної кластеризації схем* // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Радіоелектроніка та телекомунікації”. – 2002. – № 440. – С. 139–144. 3. Базилевич Р.П., Подольський І.В. *Ієрархічна кластеризація – ефективний засіб розв’язування неполіноміальних комбінаторних задач схемного типу високої розмірності* // Штучний інтелект. – 2002. – № 3. – С. 474–483. 4. Charles J. Alpert, *The ISPD98 Circuit Benchmark Suite.* ISPD98 Monterey CA USA, 1998. 5. R. P. Bazylevych, R. A. Melnyk and O. G. Rybak. “Circuit Partitioning for FPGAs by the Optimal Circuit Reduction Method”, *VLSI DESIGN 2000, Vol. 11, No. 3, pp. 237–248.*

УДК 519.878.5

І. Дияк*, М. Копитко, А. Коркуна

Львівський національний університет імені Івана Франка,

*кафедра прикладної математики,

кафедра математичного моделювання соціально-економічних процесів

КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

© Дияк І., Копитко М., Коркуна А., 2009

Досліджено напружено-деформований стан просторової конструкції складної форми за допомогою програмного комплексу Comsol Multiphysic 3.4. Показано, що використання заданих за замовчуванням у Comsol Multiphysic 3.4 параметрів побудови сітки методу скінченних елементів приводить до отримання неправильних розв’язків задачі. Проведено додаткові числові експерименти, які дали змогу виробити правильний алгоритм розв’язування задач деформування трубоподібних конструкцій. Запропоновано підхід, за яким можна за незначного збільшення обчислювальних затрат розв’язати задачу.

Research of elastic problem of a spatial complex form construction is carried out with Comsol Multiphysic 3.4 program. It is shown, that use default parameters of finite elements mesh of construction at Comsol Multiphysic 3.4. gives incorrect numerical results of a problem. Additional numerical experiments which have allowed to develop correct algorithm of the decision of problems of deformation of pipelike designs was carried out. The approach which allows to receive the correct results at insignificant increase of computing resources is offered.

Постановка задачі

Інженерна конструкція як просторовий об’єкт, який зображений на рис.1, перебуває під дією внутрішнього навантаження постійної інтенсивності. Необхідно визначити її напружено-деформований стан.

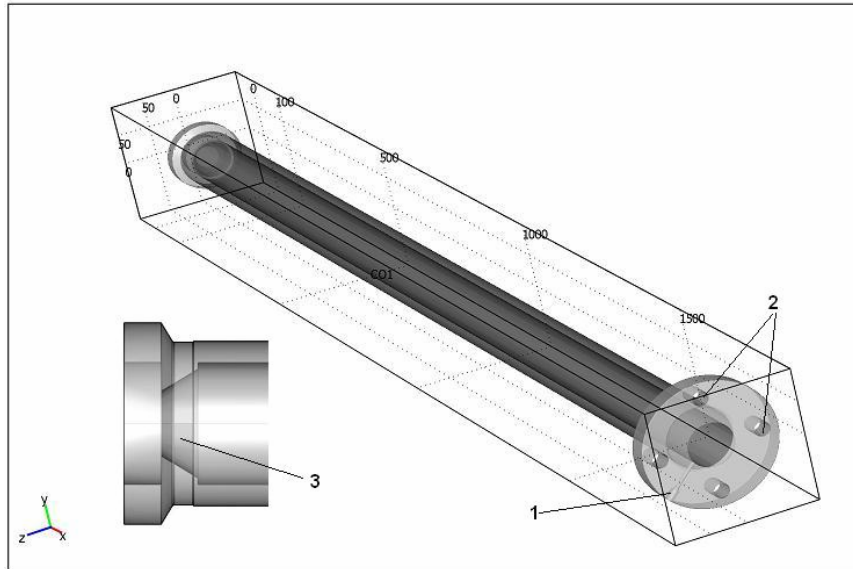


Рис. 1. Загальний вигляд конструкції: 1 – порожнина; 2 – отвори; 3 – кінець трубки

Враховуючи наявність у геометрії даного об'єкта вирізів, позначених цифрами 1, 2, для розрахунку необхідно використовувати постановку задачі теорії пружності у просторовій декартовій системі координат – x, y, z .

Напружено-деформований стан пружного середовища, яке займає область Ω (об'єм конструкції), описується рівняннями лінійної теорії пружності [3,6]:

рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

геометричними співвідношеннями Коші

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad (2)$$

фізичними співвідношеннями (закон Гука)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{G} \sigma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формули (1)–(3) утворюють систему з 15 диференціальних рівнянь відносно 6 компонент напружень, 6 компонент деформації і 3 компонент переміщень. Отже, виходить замкнена система рівнянь, яка доповнюється кінематичними

$$u_x = u_x^0, \quad u_y = u_y^0, \quad u_z = u_z^0 \quad x, y, z \in \partial\Omega_u \quad (4)$$

і статичними

$$\sigma_{nx} = p_x; \quad \sigma_{ny} = p_y; \quad \sigma_{nz} = p_z \quad x, y, z \in \partial\Omega_\sigma \quad (5)$$

граничними умовами.

Варіаційне формулювання задачі

Необхідно знайти функцію $u \in V \equiv \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \partial\Omega_u\}$ і надає мінімуму функціоналу Лагранжа [7, 8]

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Au, u) d\Omega - \int_{\Omega} p^T u d\Omega. \quad (6)$$

Метод розв'язування

Для розв'язування просторової задачі теорії пружності (6), можна використати один з варіантів методу скінченних елементів (МСЕ) [5,7,8]. Очевидно, що застосування МСЕ вимагає вирішення таких проблем, як побудова геометрії конструкції, розбиття її на скінченні елементи, формування глобальної матриці жорсткості, розв'язання системи лінійних рівнянь великого розміру ($\approx 10\,000 \div 500\,000$ рівнянь). Також ясно, що кожна з перелічених проблем для вказаної геометрії є непростою задачею. Саме з таких міркувань, для вирішення задачі розрахунку напружено-деформованого стану конструкції вибрано програмний комплекс Comsol Multiphysic 3.4 (попередні версії носили назву Femlab)[4], який дає змогу моделювати фізичні процеси у наукових і інженерних розробках з використанням МСЕ.

Результати числових експериментів

1. Розв'язування просторової задачі теорії пружності у пакеті Comsol Multiphysic 3.4. Стандартний підхід. Першим етапом розв'язування задачі є побудова геометрії конструкції у декартовій системі координат. Результатом цього кроку є область, зображена на рис. 1. Особливістю цієї конструкції є її розміри: довжина (координата x) дорівнює $L = 1\,760$ м; внутрішній радіус трубки $R1 = 44,5$ м, зовнішній радіус трубки $R2 = 32,5$ м, тобто товщина трубки $h = 24$ м. Отже, відношення $L/R=39,5$.

Наступним кроком є вибір матеріалу, тобто значення модуля Юнга $E = 2e11$ Па і коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.33$. Також задаються умови закріплення і навантаження границь. Для цієї конструкції задано умови жорсткого закріплення поверхонь $x = 0$ і $x = 1\,760$ (торці конструкції). Всі інші поверхні вільні від закріплення. На внутрішній поверхні конструкції задано нормальне, рівномірно розподілене навантаження -100 Па.

У пакеті Comsol Multiphysic 3.4 є можливість використовувати різні типи скінченних елементів і різний порядок апроксимації. Також можна використовувати свої параметри топології побудови сітки. Після вибору параметрів МСЕ, які пропонуються за замовчуванням, отримано сітку лагранжевих квадратичних апроксимацій на тетраедрах, зображену на рис. 2. Кількісні характеристики сітки такі: 34 349 елементів, степенів свободи 170 295.

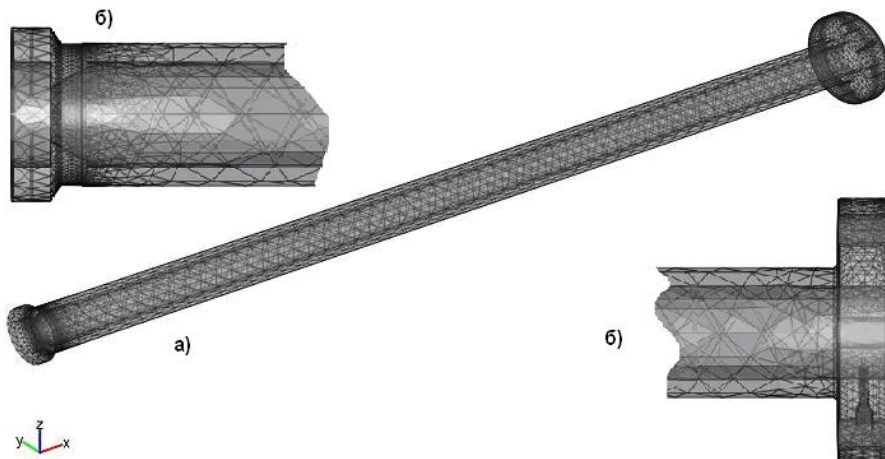


Рис. 2. Сітка розбиття конструкції на тетраїдальні елементи (34349):
а – конструкція цілковито; б – розбиття торців

Після виконання процесу розв'язування системи лінійних рівнянь, який на комп'ютері з такими характеристиками: Intel(R)Core(TM)2Duo CPU E 4500 2,20GHz та 1.99Гб ОЗУ, тривав 2100 с, отримано значення усіх переміщень, деформацій і напружень конструкції. На рис. 3 наведено вигляд конструкції внаслідок деформації під дією заданого навантаження.

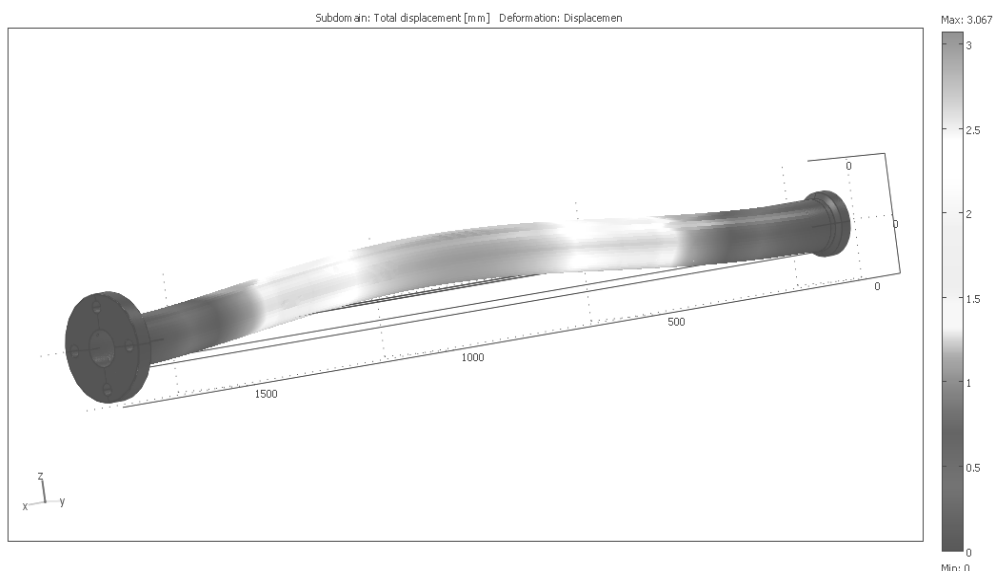


Рис. 3. Деформація конструкції під дією навантаження (глобальне переміщення)

Очевидно, що отримані результати викликають подив, оскільки задане навантаження не залежить ні від координати x , ні від кругової координати. Тобто конструкція навантажена постійним внутрішнім тиском. Необхідно було перевірити, чим викликана несиметричність деформації конструкції: похибкою обчислень чи неосесиметричністю конструкції? Згущення сітки МСЕ до 204 017 елементів вимагає використання потужнішого комп'ютера, однак результат деформування отримано аналогічний.

Для відповіді на виникле запитання і отримання задовільного розв'язку задачі необхідно було провести ряд числових експериментів, основна ідея яких полягала в наступному: від найпростішого до складнішого, тобто від задачі Ляме до просторової задачі для заданої конструкції. Тобто спочатку розглядалася задача деформування циліндра, довжиною 1760 м, товщиною 20 м і радіусом 44 м з різними умовами на торцях під дією рівномірного навантаження. Таку задачу можна розв'язувати як в осесиметричній двовимірній постановці, так і в просторовій тривимірній. Також для умов симетрії на торцях задача має аналітичний розв'язок [6].

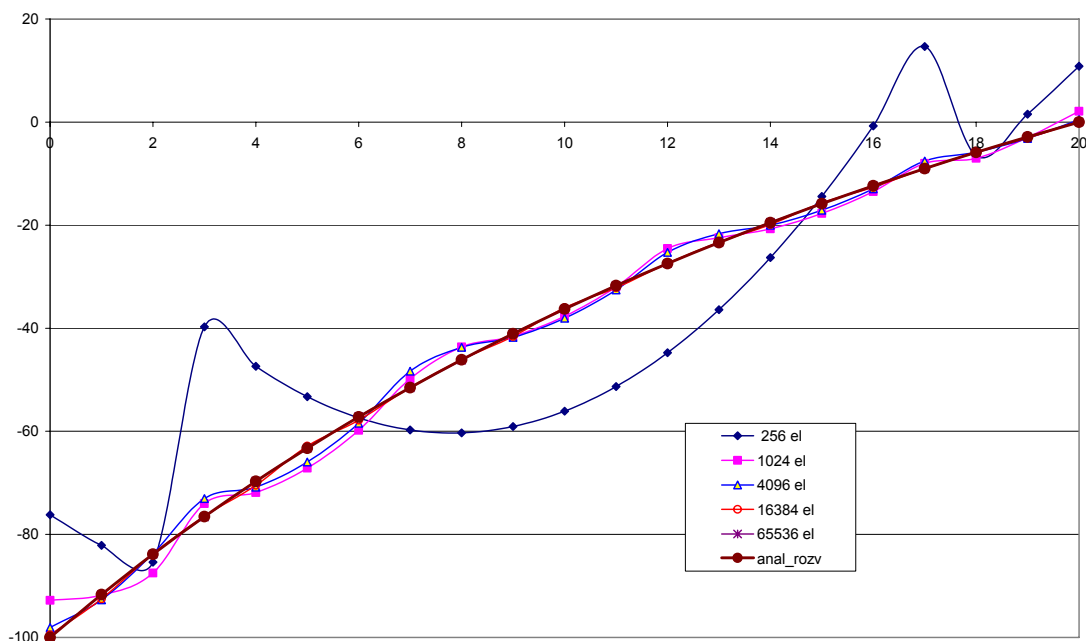


Рис. 4. Значення напруження σ_{rr} вздовж товщини циліндра для різної кількості трикутних елементів

2. *Розв'язування задачі Ляме.* Розглянемо циліндр довжиною 1760 м, товщиною 20 м і радіусом 44 м з умовами симетрії на торцях під дією нормального рівномірного навантаження -100 Pa на внутрішній поверхні. Розв'язок даної задачі відповідає задачі Ляме (плоска деформація), тобто залежить тільки від радіуса. Однак для дослідження залежності числового розв'язку від сітки МСЕ розв'язувалась осесиметрична задача для заданих розмірів циліндра. Розв'язування проводилось з використанням трикутних і прямокутних квадратичних елементів.

На рис. 4 наведено значення напруження σ_{rr} вздовж товщини циліндра для різної кількості трикутних квадратичних елементів порівняно з аналітичним розв'язком. Для побудови сітки використано стандартні засоби пакета. Згущення за замовчуванням здійснюється в два рази за кожною координатою. Тобто як видно з рис.4, відбувається різке збільшення кількості елементів. Розв'язок з доброю точністю отримується лише на сітці з 16 384 елементів. Для оцінки розв'язку обчислено значення відносної похибки напруження σ_{rr} для різних сіток трикутних елементів. Похибка менша від 5% отримується тільки на сітці з 4 096 елементів.

Для розв'язання цієї задачі використано також прямокутні елементи. Сітку прямокутних елементів вибирали так: по довжині циліндра завжди – 20 елементів, а по товщині згущувалась – 2, 4, 8, 16, 32 і т.д. Очевидно, що елементи, враховуючи розміри циліндра, були дуже витягнуті вздовж координати z : 88:10, 88:5, ..., 88:0.625. Однак це не вплинуло на розв'язок задачі. На рис. 5 наведено значення відносної похибки обчислення напруження σ_{rr} вздовж радіуса циліндра для різних сіток прямокутних елементів [1,6].

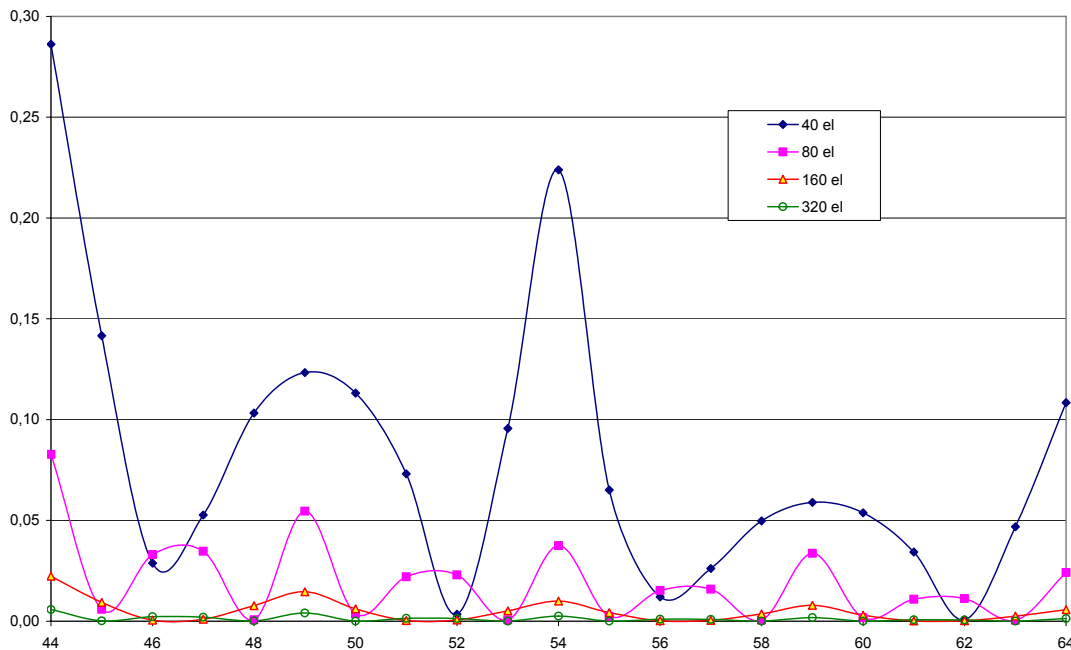


Рис. 5. Залежність відносної похибки обчислення напруження σ_{rr} вздовж радіуса циліндра для різної кількості прямокутних елементів

Оцінюючи результати, наведені на рис. 4, 5, можна зробити висновок, що використання стандартних засобів пакета для побудови сітки МСЕ не завжди є ефективним. Для задачі Ляме можна отримати розв'язок з майже однаковою точністю, використовуючи 4 096 трикутних елементів (17 426 рівнянь) або 160 прямокутних елементів (1 394 рівнянь).

3. *Розв'язування просторової задачі для жорстко закріпленого циліндра.* Оскільки розв'язування задачі Ляме не викликало якихось проблем, тому на наступному кроці розв'язувалась задача для жорстко закріпленого циліндра довжиною 1 760 м, товщиною 20 м і радіусом 44 м під дією нормального рівномірного навантаження -100 Pa на внутрішній поверхні. Дана задача є осесиметричною, тому її можна розв'язувати і як осесиметричну двовимірну, і як тривимірну. Для повнішого наближення до поставленої задачі (див. рис. 1) розглядалася тривимірна задача для половинки циліндра з умовами симетрії на поверхнях $y = 0$.

Для побудови сітки використано стандартні засоби пакета. На рис. 6 наведено сітку з найменшої кількості тетраедрів (2 149) при заданні параметра розбиття Predefined mesh size як Normal. Необхідно звернути увагу на наближення геометрії внутрішньої поверхні циліндра. Очевидно, що це дуже груба апроксимація, і сподіватися на задовільний розв'язок задачі не можна. На рис. 7 наведено вигляд деформованого циліндра, отриманий на сітці з 2 149 елементів. Отримана очевидна несиметричність розв'язку як по довжині циліндра (площина $x = 880$ є площиною симетрії задачі), так і по радіусу (наприклад, площина $y = 0$) свідчить про абсолютну неправильність розв'язку задачі.

Провівши три рази згущення стандартної сітки (від 2 149, 5 739, 16 185 до 47 573 елементів), вдалось отримати розв'язок задачі, візуально задовільний. Сітка з 47 573 тетраедальних елементів (236 577 рівнянь) значно краще наближає циліндричну поверхню, однак є далекою від рівномірної чи симетричної. Розв'язок, отриманий на сітці з 47 573 елементів, вже повністю відповідає фізичному змісту задачі (задовольняє умови симетрії), однак містить локальні збурення, викликані скінченноелементною сіткою.

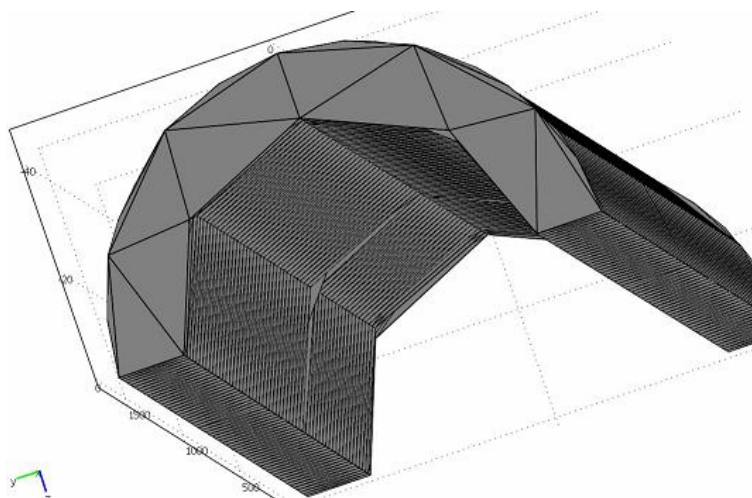


Рис. 6. Сітка розбиття на 2149 елементів

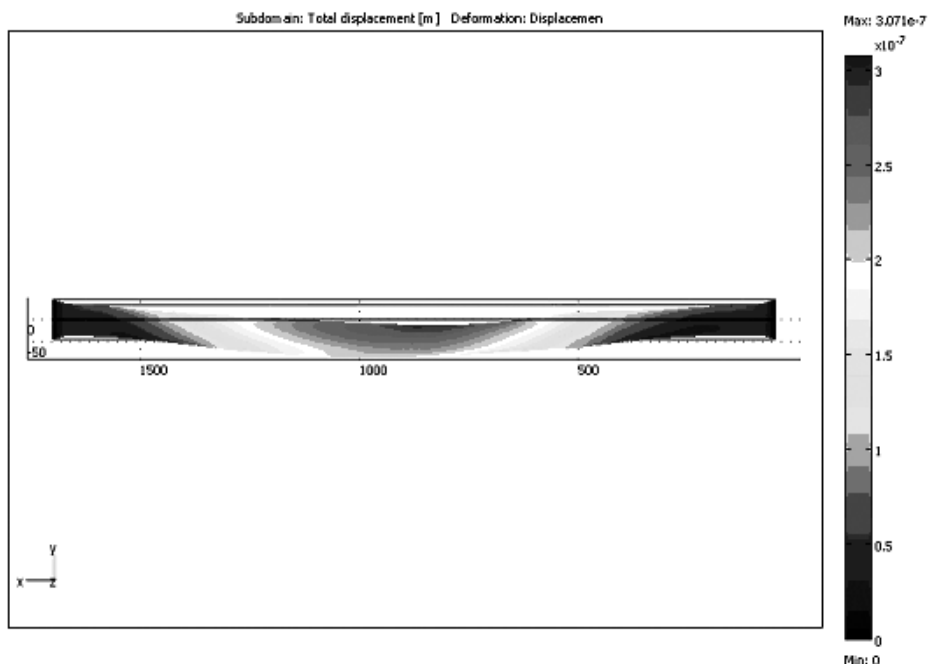


Рис. 7. Деформація циліндра в площині ХZ (погляд зовні циліндра), отримана на сітці з 2149 елементів

Очевидно, що згущення сітки покращує результати. Однак це, своєю чергою, приводить до різкого збільшення обчислювальних затрат, і на певному етапі не вистачає ресурсів наявного комп'ютера. Тому необхідно вибирати сітки МСЕ, адаптовані до конкретної задачі. Для даного циліндра, наприклад, достатньо змінити параметр розбиття по довжині циліндра. Задавши параметр розрідження сітки по довжині циліндра 0.5, отримаємо сітку з 1926 елементів. Результат розв'язування задачі на сітці з 1926 елементів показано на рис. 8. Візуально розв'язок цілком задовільний і майже не відрізняється від розв'язку, отриманого з використанням 47 573 елементів. Такий результат отримується завдяки кращому наближенню поверхонь циліндра і симетричності сітки. Очевидно, що подальше згущення такої сітки покращує результати при менших обчислювальних затратах.

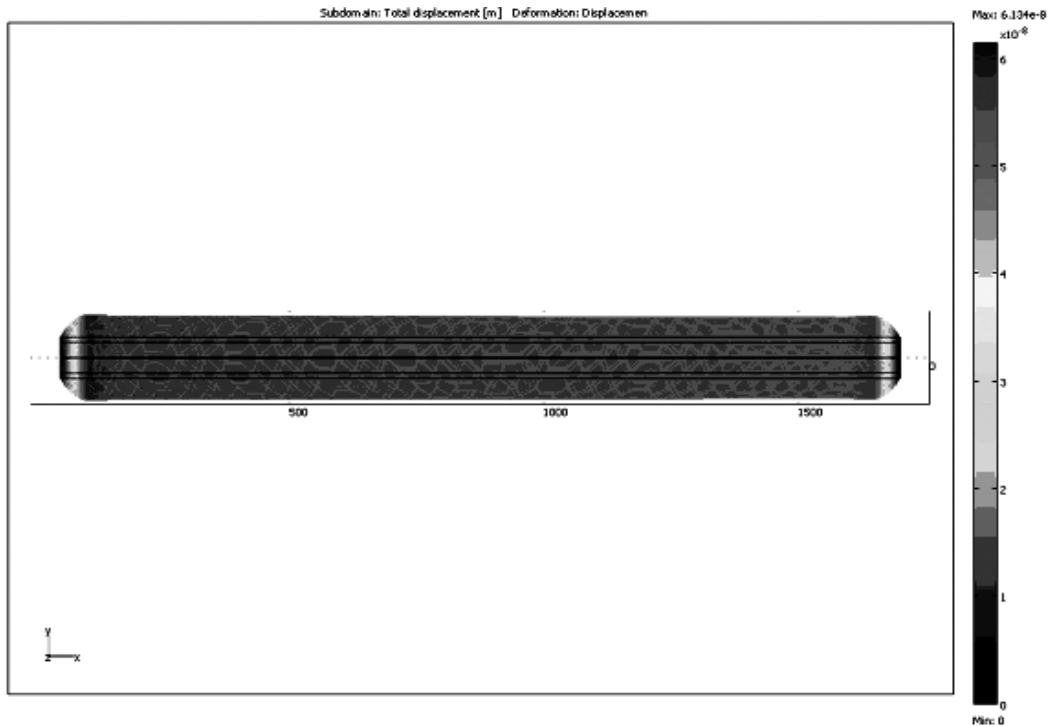


Рис. 8. Деформація циліндра в площині UX (погляд з середини циліндра), отримана на сітці з 1926 елементів

4. Розв'язування просторової задачі теорії пружності для половинки конструкції. Проведені попередньо числові експерименти дозволили виробити підхід до розв'язання поставленої у п.1 задачі. Як видно з рис. 1, конструкція має площину симетрії, паралельну осі x і проведену по середині отвору (1). Оскільки навантаження на конструкцію не залежить від координат, то площину симетрії конструкції можна взяти за площину симетрії задачі деформування. Це дає змогу зменшити обчислювальні затрати в середньому вдвічі.

Використання стандартного розбиття для половини конструкції не дає можливості отримати задовільні результати. На рис. 9, а наведено вигляд деформованої конструкції, порохований на сітці з 17 018 елементів. Сітка будувалась з параметрами за замовчуванням. Неприродний характер деформування для рівномірно розподіленого навантаження свідчить про похибку обчислення при заданому розбитті. Отримання подібного розв'язку при частково нерівномірному навантаженні можна сприйняти як цілком правдоподібний. Тому дуже важливо при числовому розв'язуванні задач деформування проводити детальний аналіз збіжності та стійкості наближеного розв'язку.

Для отримання допустимого розв'язку поставленої задачі було побудовано сітку з 19 457 елементів з заданням параметра розрідженості вздовж довжини 0.5. Результат деформації конструкції зображений на рис. 9, б.

На рис. 10 наведено графіки головних напружень на внутрішній поверхні конструкції (навантаженій), порашовані на двох вищенаведених сітках: 19 457 елементів і 17 018 елементів. Як видно з рис. 9, 10, незначне збільшення кількості елементів, викликане покращеною топологією, дає можливість значно покращити результати. Наяність осциляцій у графіках викликана похибкою обчислень. Суцільна лінія показує, що отримані на покращеній сітці результати можна вважати задовільними з практичного погляду.

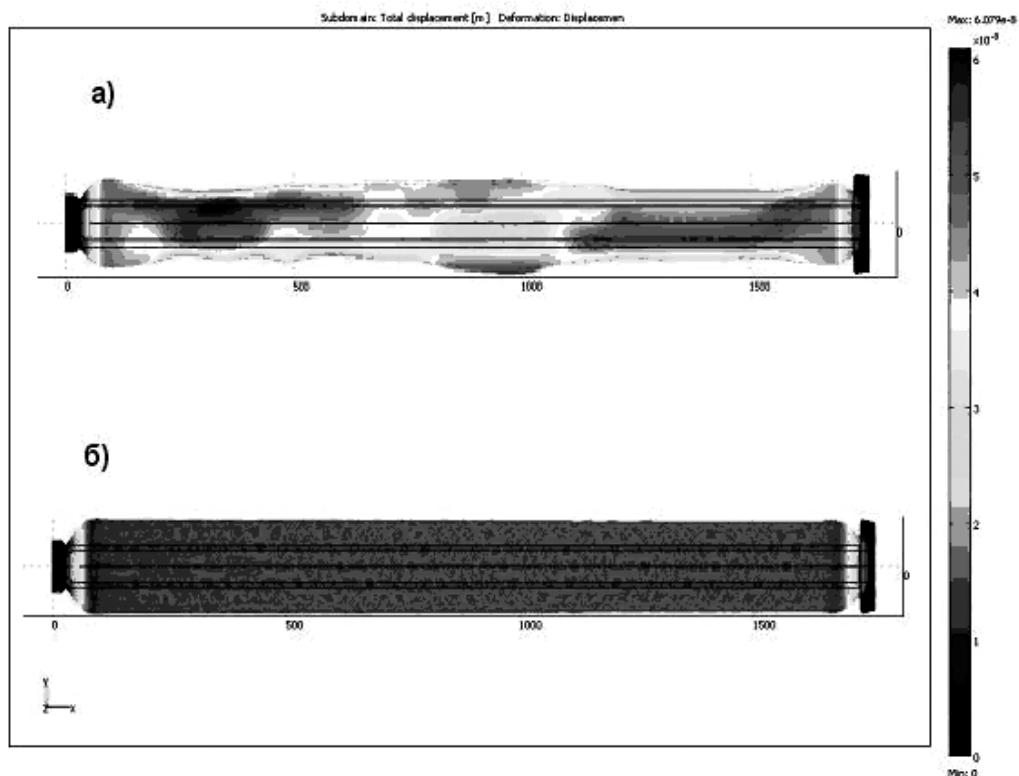


Рис. 9. Деформація конструкції, отримана на сітці з 17 018 елементів (а) і 19 457 елементів (б)

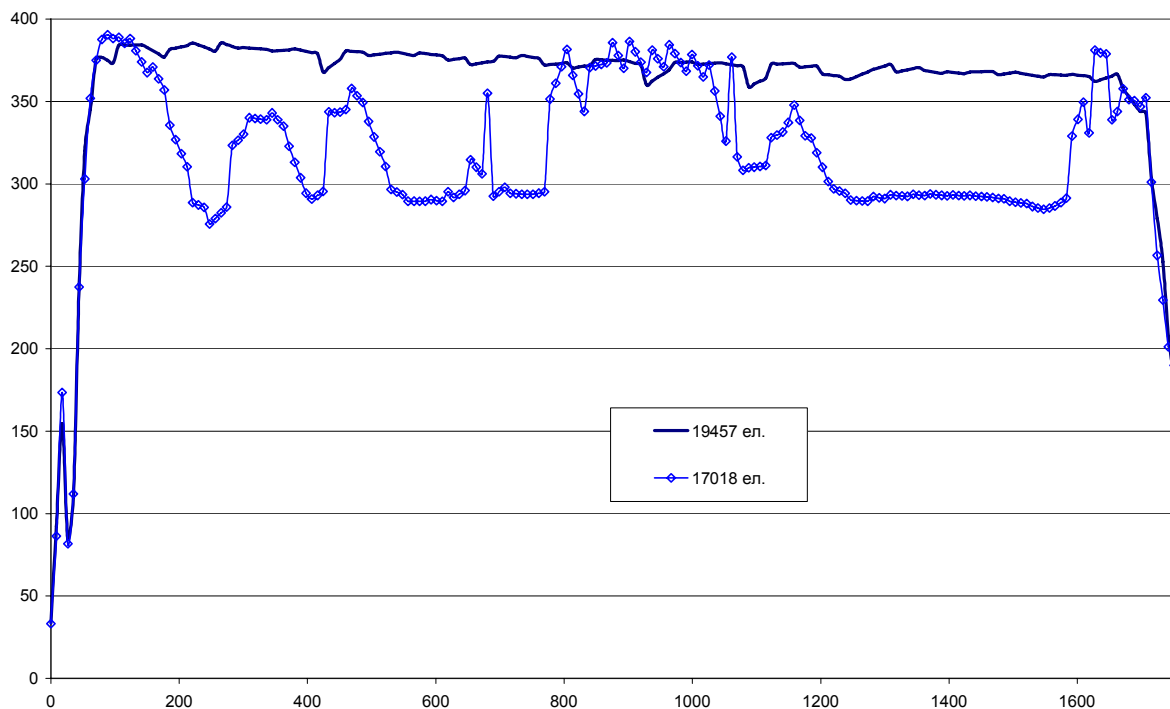


Рис. 10. Розподіл головних напружень на внутрішній поверхні конструкції

Висновки

Провівши числові експерименти, можна зробити висновки:

- Використання пакета Comsol Multiphysics 3.4 для розв'язування задач деформування конструкцій складної геометрії вимагає детального дослідження числових розв'язків з метою перевірки їх достовірності. Це, своєю чергою, приводить до потреби в потужному комп'ютері.

- Числові розв'язки задач, отримані на недосконалій сітці і наведені на рис. 3, 7, 9а, свідчать про те, що до подібного деформування (фактично втрати стійкості) можуть приводити незначні дефекти геометрії конструкції, які з'являться у процесі виготовлення, експлуатації тощо.

1. Григоренко А.Я., Дыяк И.И., Макара В.М. Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел // Прикл. механика. – 1998. – 43(44), №5. – С. 24–31. 2. Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Алгоритмичний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 10–16. 3. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с. 4. Меламед Л. Э. Femlab и ANSYS в расчетах гидродинамики атомных реакторов или научно-практический рассказ о том, как приспособить «тяжелые» пакеты для решения задач одного тяжелого класса // ExponentaPRO. – 2004. – №2. 5. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991 – 432 с. 6. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер Теория упругости. – М.:Наука, 1975. – 576 с. 7. Savula Y., Mang H., Dyyak I., Pauk N. Coupled boundary and finite element analysis of a special class of 2D problems of the theory of elasticity // Comput.&Struct.– 2000. – Vol. 75, No.2. – P. 157–165. 8. Zienkiewicz O.C. Finite element method. – London: McGraw-Hill, 1977. – 788 p.

УДК 519.16

Р. Базилевич, Р. Кутельмах

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ІСНУЮЧИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

© Базилевич Р., Кутельмах Р., 2009

Досліджено ефективність існуючих точних та евристичних алгоритмів розв'язання задачі комівояжера. Зроблено висновки щодо доцільності їх застосування при розв'язанні задач великих розмірностей, а також при декомпозиції.

Existing exact and heuristic algorithms' efficiency for solving Traveling Salesman Problem has been investigated. The conclusions were made of their application for solving large-scale problems as well as for using with decomposition.

Вступ

Задача комівояжера – одна з основних задач комбінаторної оптимізації, що має широке прикладне застосування [1,2]. Існує небагато алгоритмів, що забезпечують одержання якісних розв'язків задачі комівояжера, особливо при малих часових затратах [3]. Для розв'язування задачі комівояжера алгоритм Ліна–Кернігана є одним з найефективніших [4,5]. Його обчислювальна