УДК 536.24

В. Гавриш, Д. Федасюк
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ШАРІ З ЧУЖОРІДНИМ ТЕПЛОВИДІЛЯЮЧИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглядається стаціонарна осесиметрична нелінійна задача теплопровідності для кусково-однорідного ізотропного в сенсі теплофізичних властивостей шару з чужорідним циліндричним включенням, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла з тепловіддачею. Припускається, що на поверхнях спряження відбувається ідеальний тепловий контакт. Запропонована методика розв’язування цієї задачі та її застосування для трьохелементного шару з конкретною залежністю коефіцієнтів теплопровідності від температури.

The steady state axially symmetric nonlinear problem of thermal conduction for piecewise homogeneous isotropic, in the sense of thermophysical properties, layer with foreign cylindrical inclusion which heats at internal thermal source with heat dissipation has been considered. It is supposed that on the contact surface the ideal thermal contact takes place. The methodology of this problem solution and its application for the 3-D layer with the specific dependence of the thermal-conductivity coefficients on temperature has been offered.

Вступ

Підвищення експлуатаційних характеристик радіоелектронних та оптичних приладів приводить до необхідності врахування залежності теплофізичних характеристик від температури при розв’язуванні граничних задач теплопровідності, що значно ускладнює побудову розв’язку, проте дає змогу точніше досліджувати окремі вузли та елементи вказаних приладів на міцність і надійність. Загальні рівняння теплопровідності для термочутливих кусково-однорідних тіл наведено в працях [1, 2]. У [3] досліджено температурне поле для багатошарового півпростору з тепловиділяючим циліндричним включенням, розміри якого є малими, а в [4] – температурне поле для кусково-однорідного шару з тепловиділяючим включенням циліндричної форми, розміри якого є довільними. У [5] досліджено температурне поле для термочутливого багатошарового півпростору, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла.

Постановка задачі

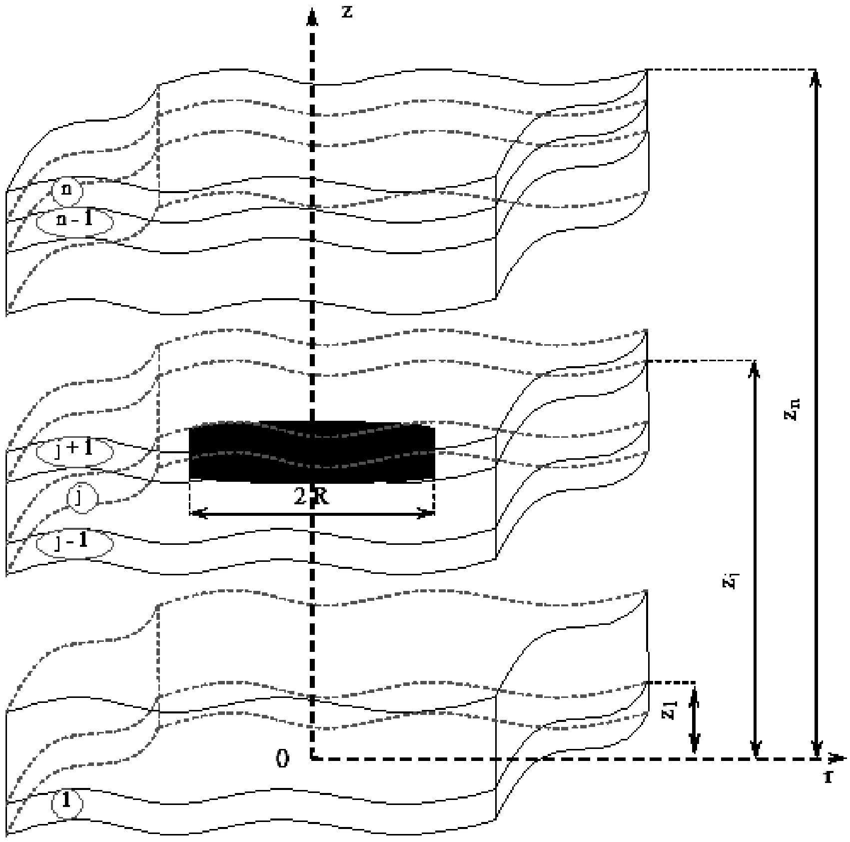
Розглянемо ізотропний в сенсі теплофізичних властивостей кусково-однорідний термочутливий шар, який складається з n однорідних елементів, що відрізняються геометричними і теплофізичними параметрами, в одному з яких знаходиться чужорідне циліндричне включення, радіус якого дорівнює R, а висота – товщині цього елемента, віднесений до циліндричної системи координат $Orjz$ із початком на одному з його країв (рисунок). В області включення $\Omega_0 = \{(r, j, z) : r \le R, 0 \le j \le 2p, z_{j-1} \le z < z_j, j = \overline{2, n-1}\}$ діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю q_0. На поверхнях спряження

$$S_i^{(z)} = \{(r, j, z_i) : 0 \le r < \infty, 0 \le j \le 2p, i = \overline{1, n-1}\},$$
$$S_R = \{(R, j, z) : 0 \le j \le 2p, z_{j-1} \le z < z_j, j = \overline{2, n-1}\}$$

відбувається ідеальний тепловий контакт, а на краях шару

$$K_0 = \{(r, j, 0) : 0 \le r < \infty, 0 \le j \le 2p\},$$
$$K_n = \{(r, j, z_n) : 0 \le r < \infty, 0 \le j \le 2p\}$$

здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c.



Кусково-однорідний термочутливий шар із тепловиділяючим включенням циліндричної форми

Частково лінеаризована гранична задача

Стаціонарне температурне поле в системі , що розглядається, можна визначити, розв’язавши нелінійне рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left[r\,l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left[l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial z}\right]=-q_0\cdot S_-(R-z)\cdot N(z) \qquad (1)$$

із врахуванням таких граничних умов:

$$l_1(t)\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=0} = a_0(t|_{z=0} - t_c),\ l_n(t)\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=z_n} = -a_n(t|_{z=z_n} - t_c), t|_{r\to\infty} = 0, \frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r\to\infty} = 0. \qquad (2)$$

Тут $l(t,r,z) = l_1(t) + \sum_{i=1}^{n-1}\left[l_{i+1}(t) - l_i(t)\right]\cdot S_-(z - z_i) + \left[l_0(t) - l_j(t)\right]\cdot S_-(R - r)\cdot N(z)$, $l_i(t), l_0(t)$ – коефіцієнти теплопровідності і-го елемента шару та включення відповідно; a_0, a_n – коефіцієнти тепловіддачі з граничних поверхонь K_0 та K_n відповідно; $N(z) = S_-(z - z_{j-1}) - S_-(z - z_j); S_\pm(z)$ – асиметричні одиничні функції.

Введемо функцію

$$J = \int\limits_0^{t(r,z)} l_1(z)dz + \sum_{i=1}^{n-1} S_-(z-z_i) \cdot \int\limits_{t(r,z_i)}^{t(r,z)} [l_{i+1}(z) - l_i(z)]dz + \left\{ \int\limits_{t(R,z)}^{t(r,z)} [l_0(z) - l_j(z)]dz \cdot N(z) \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t(R,z_{j-1})}^{t(r,z_{j-1})} [l_0(z) - l_j(z)]dz \cdot S_-(z - z_{j-1}) + \int\limits_{t(R,z_j)}^{t(r,z_j)} [l_0(z) - l_j(z)]dz \cdot S_-(z-z_j) \right\} \cdot S_-(R-r), \tag{3}$$

продиференціювавши яку по r та z, отримаємо

$$\frac{\partial J}{\partial r} = l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial r} - \sum_{i=1}^{n-1}\left\{[l_{i+1}(t) - l_i(t)]\frac{\partial t}{\partial r}\right\}\Bigg|_{z=z_i} \cdot S_-(z-z_i) + \left\{\left[\left(l_0(t) - l_j(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Bigg|_{z=z_j} \cdot S_-(z-z_j) - \right.$$

$$\left. - \left[(l_0(t) - l_j(t))\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Bigg|_{z=z_{j-1}} \cdot S_-(z-z_{j-1})\right\} \cdot S_-(R-r), \tag{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = l(t,r,z)\frac{\partial t}{\partial z} - \left\{[l_0(t) - l_j(t)]\frac{\partial t}{\partial z}\right\}\Bigg|_{r=R} \cdot S_-(R-r)\cdot N(z).$$

Із врахуванням виразів (4), рівняння (1) набуде такого вигляду:

$$\Delta J = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{ r \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1}\left\{[l_{i+1}(t) - l_i(t)]\frac{\partial t}{\partial r}\right\}\Bigg|_{z=z_i} \cdot S_-(z-z_i) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[\left[\left(l_0(t) - l_j(t)\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Bigg|_{z=z_{j-1}} \cdot S_-(z-z_{j-1}) - \left[(l_0(t) - l_j(t))\frac{\partial t}{\partial r}\right]\Bigg|_{z=z_j} \cdot S_-(z-z_j)\right] \cdot S_-(R-r)\right]\right\} - \tag{5}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[[l_0(t) - l_j(t)]\frac{\partial t}{\partial z}\right]\Bigg|_{r=R} \cdot S_-(R-r)\cdot N(z)\right\} - q_0 \cdot S(R-r)\cdot N(z).$$

Граничні умови (2) із використанням співвідношень (3) запишуться так:

$$\frac{\partial J}{\partial z}\Big|_{z=0} = a_0(t|_{z=0} - t_c), \frac{\partial J}{\partial z}\Big|_{z=z_n} = -a_n(t|_{z=z_n} - t_c), J|_{r\to\infty} = 0, \frac{\partial J}{\partial r}\Big|_{r\to\infty} = 0. \tag{6}$$

Отже, введена функція J , зображена виразом (3), дала змогу звести нелінійну граничну задачу (1), (2) до частково лінеаризованої граничної задачі (5), (6).

Цілком лінеаризована гранична задача

Апроксимуємо функції $t(R,z), t(r,z_{j-1}), t(r,z_j), t(r,0), t(r,z_i)$ виразами

$$\begin{aligned} t(r,z_k) &= t_1^{(k)} + \sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) \cdot S_-(r-r_l), \\ t(R,z) &= t_1^{(R)} + \sum_{a=1}^{p-1} t_{a+1}^{(R)} - t_a^{(R)}) \cdot S_-(z-z_a), \\ t(r,z_{j-1}) &= t_1^{(-)} + \sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(-)} - t_a^{(-)}) \cdot S_-(r-r_a), \\ t(r,z_j) &= t_1^{(+)} + \sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(+)} - t_a^{(+)}) \cdot S_-(r-r_a), \end{aligned} \tag{7}$$

де $k = \overline{0,n}; z_0 = 0; r_l \in \;]0; r_*[; r_1 < r_2 < \ldots < r_{m-1}; m$ – кількість розбиттів інтервалу $]0; r_*[; r_*$ – значення радіальної координати, для якої температура практично дорівнює t_c (знаходиться з відповідної лінійної задачі); $r_a \in \ ]0;R[;r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1}; z_a \in \ ]z_{j-1};z_j[;z_1 < z_2 < \ldots < z_{p-1};\ t_l^{(k)}, t_a^{(R)}, t_a^{(-)}, t_a^{(+)}$ – невідомі апроксимаційні значення температури; p – кількість розбиттів інтервалів $]z_{j-1};z_j[$, $]0;R[$.

Підставивши вирази (7) у рівняння (5) та граничні умови (6) на поверхнях K_0, K_n шару, одержимо лінійну граничну задачу для знаходження функції J

$$\Delta J = -\frac{1}{r}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot\left(t_{l+1}^{(i)}-t_l^{(i)}\right)\cdot\left(l_{i+1}\left(t_l^{(i)}\right)-l_i\left(t_l^{(i)}\right)\right)\cdot d_-'(r-r_l)\cdot S_-(z-z_i)+\right.$$

$$+\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot\left(t_{a+1}^{(-)}-t_a^{(-)}\right)\cdot\left[l_0(t_a^{(-)})-l_j(t_a^{(-)})\right]\cdot d_-'(r-r_a)\cdot S_-(z-z_{j-1})-$$
$$\left.-\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot(t_{a+1}^{(+)}-t_a^{(+)})\cdot\left[l_0(t_a^{(+)})-l_j(t_a^{(+)})\right]\cdot d_-'(r-r_a)\cdot S_-(z-z_j)\right\}- \quad (8)$$

$$-\sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(R)}-t_a^{(R)})\cdot\left[l_0(t_a^{(R)})-l_j(t_a^{(R)})\right]\cdot S_-(R-r)\cdot d_-'\left(z-z_a\right)-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z),$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=0} = a_0\left[t_1^{(0)}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}\right)\cdot S_-(r-r_l)-t_c\right],$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial z}\right|_{z=z_n} = -a_n\left[t_1^{(n)}+\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)})\cdot S_+(r-r_l)-t_c\right], \quad (9)$$

$$\left.J\right|_{r\to\infty}=0, \left.\frac{\partial J}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=0,$$

де $d_\pm(z)$ – асиметричні дельта-функції Дірака.

Наближений аналітичний розв’язок лінійної граничної задачі (8), (9)

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкела за координатою r до граничної задачі (8), (9), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\bar{J}}{dz^2}-x^2\bar{J}=-x\cdot\left\{-\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot J_1(r_l\cdot x)\cdot(t_{l+1}^{(i)}-t_l^{(i)})\cdot(l_{i+1}(t_l^{(i)})-l_i(t_l^{(i)}))\right]\cdot S_-(z-z_i)+\right.$$
$$+\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot J_1(r_a\cdot x)\cdot(t_{a+1}^{(-)}-t_a^{(-)})\cdot(l_0(t_a^{(-)})-l_j(t_a^{(-)}))\cdot S_-(z-z_{j-1})-$$
$$\left.-\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot J_1(r_a\cdot x)\cdot(t_{a+1}^{(+)}-t_a^{(+)})\cdot(l_0(t_a^{(+)})-l_j(t_a^{(+)}))\cdot S_-(z-z_j)\right\}- \quad (10)$$
$$-\frac{R}{x}\cdot J_1(R\cdot x)\cdot\left\{\sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(R)}-t_a^{(R)})\cdot\left[l_0(t_a^{(R)})-l_j(t_a^{(R)})\right]\cdot d_-'(z-z_a)+q_0\cdot N(z)\right\}$$

і таких граничних умов:

$$\left.\frac{d\bar{J}}{dz}\right|_{z=0} = -\frac{a_0}{x}\cdot\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot J_1(r_l x)\cdot(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}),$$
$$\left.\frac{d\bar{J}}{dz}\right|_{z=z_n} = \frac{a_n}{x}\cdot\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot J_1(r_l x)\cdot(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}), \quad (11)$$

де $\bar{J}=\int_0^\infty r\cdot J_0(r\cdot x)\cdot J\cdot dr$ – трансформанта функції $J; J_J(x)$ – функція Бессела першого роду J -го порядку; x – параметр перетворення.

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$\bar{J} = c_1 e^{x\cdot z} + c_2 e^{-x\cdot z} + \frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} r_l \cdot J_1(r_l\cdot x)\cdot(t_{l+1}^{i} - t_l^{i})\cdot(l_{l+1}(t_l^i) - l_l(t_l^i))\times(1 - chx(z - z_i))\cdot S_-(z - z_i) + \right.$$

$$+\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot J_1(r_a\cdot x)\cdot(t_{a+1}^{(-)} - t_a^{(-)})\cdot(l_0(t_a^{(-)}) - l_j(t_a^{(-)}))\cdot(1 - chx(z - z_{j-1}))\cdot S_-(z - z_{j-1}) -$$

$$\left. -\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot J_1(r_a\cdot x)\cdot(t_{a+1}^{(+)} - t_b^{(+)})\cdot(l_0(t_a^{(+)}) - l_j(t_a^{(+)}))\cdot(1 - chx(z - z_j))\cdot S_-(z - z_j)\right\} -$$

$$-\frac{R}{x}\cdot J_1(R\cdot x)\cdot\left\{\sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(R)} - t_a^{(R)})\cdot\left[l_0(t_a^{(R)}) - l_j(t_a^{(R)})\right]\cdot chx(z - z_a)\cdot S_-(z - z_a) - \right.$$

$$\left. -\frac{q_0}{x^2}\cdot\left[(1 - chx(z - z_{j-1}))\cdot S_-(z - z_{j-1}) - (1 - chx(z - z_j))\cdot S_-(z - z_j)\right]\right\}.$$

Тут c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Використавши граничні умови (11), отримаємо такий частковий розв'язок задачі (10), (11) :

$$\bar{J} = \frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot J_1(r_l\cdot x)\cdot(t_{l+1}^{(i)} - t_l^{(i)})\cdot(l_{i+1}(t_l^{(i)}) - l_i(t_l^{(i)}))\cdot\left[(1 - chx(z - z_i))\cdot S_-(z - z_i) + \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_i)\right] + \right.$$

$$+\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot J_1(r_a\cdot x)\cdot(t_{a+1}^{(-)} - t_a^{(-)})\cdot\left[l_0(t_a^{(-)}) - l_j(t_a^{(-)})\right]\cdot\left[(1 - chx(z - z_{j-1}))\cdot S_-(z - z_{j-1}) + \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_{j-1})\right] - \quad (12)$$

$$\left. -\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot J_1(t_a\cdot x)\cdot(t_{a+1}^{(+)} - t_a^{(+)})\cdot\left[l_0(t_a^{(+)}) - l_j(t_a^{(+)})\right]\cdot\left[(1 - chx(z - z_j))\cdot S_-(z - z_j) + \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_j)\right]\right\} -$$

$$-\frac{R}{x}\cdot J_1(R\cdot x)\cdot\left\{\sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(R)} - t_a^{(R)})\cdot\left[l_0(t_a^{(R)}) - l_j(t_a^{(R)})\right]\cdot\left[chx(z - z_a)\cdot S_-(z - z_a) - \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_a)\right] - \frac{q_0}{x^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1 - chx(z - z_{j-1}))\cdot S_-(z - z_{j-1}) - (1 - chx(z - z_j))\cdot S_-(z - z_j) + \frac{shx(z_n - z_{j-1}) - shx(z_n - z_j)}{shxz_n}\cdot chxz + \frac{1}{x^2\cdot shxz_n}\right]\right\} + \quad (12)$$

$$+\frac{1}{x^2\cdot shxz_n}\cdot\left[a_n\cdot\sum_{l=1}^{m-1} r_l J_1(r_l x)(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)})\cdot chxz + a_0\cdot\sum_{l=1}^{m-1} r_l J_1(r_l x)(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)})\cdot chx(z - z_n)\right].$$

Застосувавши обернене перетворення Ганкела до співвідношення (12), знаходимо вираз для функції J

$$J = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot(t_{l+1}^{(i)} - t_l^{(i)})\left[l_{i+1}(t_l^{(i)}) - l_i(t_l^{(i)})\right]\cdot\int_0^\infty J_1(r_l\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)\cdot\left[(1 - chx(z - z_i))\cdot S_-(z - z_i) + \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_i)\right]dx +$$

$$+\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot(t_{a+1}^{(-)} - t_a^{(-)})\cdot\left[l_0(t_a^{(-)}) - l_j(t_a^{(-)})\right]\cdot\int_0^\infty J_1(r_a\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)\cdot\left[(1 - chx(z - z_{j-1}))\cdot S_-(z - z_{j-1}) + \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_{j-1})\right]dx - \quad (13)$$

$$-\sum_{a=1}^{p-1} r_a\cdot(t_{a+1}^{(+)} - t_a^{(+)})\cdot\left[l_0(t_a^{(+)}) - l_j(t_a^{(+)})\right]\cdot\int_0^\infty J_1(r_a\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)\cdot\left[(1 - chx(z - z_j))\cdot S_-(z - z_j) + \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_j)\right]dx -$$

$$-R\left\{\sum_{a=1}^{p-1}(t_{a+1}^{(R)} - t_a^{(R)})\cdot\left[l_0(t_a^{(R)}) - l_j(t_a^{(R)})\right]\cdot\int_0^\infty J_1(R\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)\cdot\left[chx(z - z_a)\cdot S_-(z - z_a) - \frac{chxz}{shxz_n}\cdot shx(z_n - z_a)\right]dx - \right.$$

$$\left. -q_0\cdot\int_0^\infty\frac{1}{x^2}\cdot J_1(R\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)\cdot\left[(1 - chx(z - z_{j-1}))S_-(z - z_{j-1}) - (1 - chx(z - z_j))\cdot S_-(z - z_j) + \frac{shx(z_n - z_{j-1}) - shx(z_n - z_j)}{shxz_n}chxz\right]dx\right\} +$$

$$+a_n\cdot\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)})\cdot\int_0^\infty\frac{chxz}{x^2\cdot shxz_n}\cdot J_1(r_l\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)dx + a_0\cdot\sum_{l=1}^{m-1} r_l\cdot(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)})\cdot\int_0^\infty\frac{chx(z - z_n)}{x^2\cdot shxz_n}\cdot J_1(r_l\cdot x)\cdot J_0(r\cdot x)dx.$$

Підставивши конкретні залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів кожного з елементів шару та включення у співвідношення (3), (13) та зрівнявши отримані вирази функцій J на поверхнях $S_i^{(z)}(i = \overline{1, n-1}), S_r, K_0, K_n, S_j = \{(r, j, z_j) : 0 \le r \le R, 0 \le j \le 2p\}$,
$S_{j-1} = \{(r, j, z_{j-1}) : 0 \le r \le R, 0 \le j \le 2p\}$,

приходимо до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих значень температури $t_l^{(k)}\,(k=\overline{0,n}; l=\overline{1,m-1}), t_a^{(R)}, t_a^{(-)}, t_a^{(+)}\,(a=\overline{1,p})$.

Шукане температурне поле для нелінійної граничної задачі теплопровідності (1), (2) визначається з нелінійного алгебраїчного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (3), (13) після підстановки в них конкретних виразів залежностей коефіцієнтів теплопровідності матеріалів елементів шару та включення.

Часткові приклади та аналіз отриманих результатів

Як приклад розглянемо шар, який складається з трьох елементів із чужорідним включенням, в області якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла, розміщеним у другому елементі. В цьому випадку n=3, j=2. У багатьох практичних випадках [6,7] існує така залежність коефіцієнтів теплопровідності від температури:

$$l = l^0 t^3 \left(l^0 - const\right).$$

Тоді із використанням (3), (13) отримаємо формули для визначення температури t

в області $\Omega_1 = \{\ (r, j, z):\quad r \ge 0,\quad 0 \le j \le 2p,\quad 0 \le z < z_1\ \}$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4J}{l_1^0}},$$

в області $\Omega_2 = \{\ (r, j, z):\quad r > R,\quad 0 \le j \le 2p,\quad z_1 \le z < z_2\ \}$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4J}{l_2^0} + \left(1 - \frac{l_1^0}{l_2^0}\right) t^4 \Big|_{z=z_1}},$$

в області $\Omega_3 = \{\ (r, j, z):\quad r > R,\quad 0 \le j \le 2p,\quad z_2 \le z \le z_3\ \}$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4J}{l_3^0} + \frac{l_2^0 - l_1^0}{l_3^0} t^4 \Big|_{z=z_1} + \left(1 - \frac{l_2^0}{l_3^0}\right) t^4 \Big|_{z=z_2}},$$

в області включення $\Omega_0 = \{\ (r, j, z):\quad r \le R,\quad 0 \le j \le 2p,\quad z_1 \le z < z_2\ \}$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4J}{l_0^0} + \left(1 - \frac{l_2^0}{l_0^0}\right)\left(t^4\Big|_{r=R} - t^4\Big|_{\substack{r=R\\ z=z_1}}\right) - \left(1 - \frac{l_1^0}{l_2^0}\right) t^4 \Big|_{z=z_1}},$$

в області $\Omega_3^* = \{\ (r, j, z):\quad r \le R,\quad 0 \le j \le 2p,\quad z_2 \le z \le z_3\ \}$

$$t = \sqrt[4]{\frac{1}{l_3^0 + l_0^0 - l_2^0} \cdot \left[4J + \left(l_0^0 - l_1^0\right) t^4 \Big|_{z=z_1} + \left(l_3^0 - l_0^0\right) t^4 \Big|_{z=z_2} + \left(l_2^0 - l_0^0\right)\left(t^4\Big|_{\substack{r=R\\ z=z_1}} - t^4\Big|_{r=R} - t^4\Big|_{\substack{r=R\\ z=z_2}}\right)\right]},$$

де $$t^4 \Big|_{z=z_1} = \frac{4}{l_1^0} J \Big|_{z=z_1};\quad t^4 \Big|_{z=z_2} = \frac{4}{l_2^0} J \Big|_{z=z_2} + \left(1 - \frac{l_1^0}{l_2^0}\right) t^4 \Big|_{z=z_1};$$

$$t^4 \Big|_{r=R} = \frac{4}{l_2^0} J \Big|_{r=R} + \left(1 + \frac{l_1^0}{l_2^0}\right) t^4 \Big|_{\substack{r=R\\ z=z_1}};\quad t^4 \Big|_{\substack{r=R\\ z=z_1}} = \frac{4}{l_1^0} J \Big|_{\substack{r=R\\ z=z_1}};\quad t^4 \Big|_{\substack{r=R\\ z=z_2}} = \frac{4J}{l_2^0} \Big|_{\substack{r=R\\ z=z_2}} + \left(1 - \frac{l_1^0}{l_2^0}\right) \cdot t^4 \Big|_{\substack{r=R\\ z=z_1}}.$$

На основі числового аналізу встановлено, що достатньо вибрати кількість розбиттів m інтервалу $]0; r_*[$ такою, що дорівнює дев'яти. Числові розрахунки проведено для таких матеріалів:

1-й шар – вольфрам, 2-ий – молібден, 3-ій – кераміка ВК-94-1, включення – срібло. Вони показують, що врахування залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури приводить до зменшення температурного поля порівняно з нетермочутливою системою (теплофізичні параметри не залежать від температури) на 6% для вибраних матеріалів трьохелементної структури з тепловиділяючим включенням у другому шарі.

1. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с. 2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с. 3. Коляно Ю.М. Температурное поле в многослойном полупространстве с инородным тепловыделяющим цилиндрическим включением / Ю.М. Коляно, Ю.М. Кричевец, Е.Г. Иваник, В.И. Гаврыш // Промышленная теплотехника. – 16, № 4–6. – С.30 –34. 4. Гавриш В. Задача теплопровідності для кусково-однорідного шару із включенням циліндричної форми / В. Гавриш, В. Волос // Вісник Держ. у-ту "Львівська політехніка": Прикладна математика. – 1998. – № 341. – С. 61 – 68. 5. Коляно Ю.М. Температурное поле в термочувствительном многослойном полупространстве / Ю.М. Коляно, В.А. Волос, Е.Г. Иваник, В.И. Гаврыш // Инж. – физ. журнал. – 1994. – 66, №2. – С. 226 – 234. 6. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с. 7. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М. : Мир, 1979 . – 288 с.

УДК 622.692.4+622.691.24

С. Гладун
Об'єднане диспетчерське управління
ДК "Укртрансгаз" НАК "Нафтогаз України"

МОДЕЛЬ СИСТЕМИ "ПЛАСТ ПІДЗЕМНОГО ГАЗОСХОВИЩА – ГАЗОЗБІРНИЙ ПУНКТ"

Побудовано модель системи "пласт підземного газосховища – газозбірний пункт" з врахуванням залежності тиску від координати та часу в області свердловини. Сформульовано задачі знаходження режимних параметрів роботи газосховища і наведено алгоритми їх розв'язання.

In work the constructed model of work of system a layer of underground storehouse of gas - gas gathering station taking into account dependence of pressure on co-ordinate and time in the field of a bore. The problem of a finding of regime parametres of work of a gasholder is set and the resulted algorithms their decision are given.

Вступ

На рух газу із пласту газосховища до газозбірного пункту впливає багато факторів. Фільтраційний рух газу в пористих, часто в тріщинуватих колекторах, проходить згідно з законом Дарсі, який встановлено експериментально і виражає лінійну залежність між швидкістю фільтрації і градієнтом тиску. Як правило, такий рух є ізотермічним. Неізотермічність руху газу спостерігається в призабійній зоні пласту. Практика розроблення газових родовищ показала справедливість закону Дарсі для всієї області пласту за виключенням при вибійної зони. Порушення закону Дарсі відбувається у разі збільшення швидкості руху газу в області вибою, за