

Ю. Сінчук, Н. Притула, М. Притула  
 ТОВ “Математичний центр”,  
 Центр математичного моделювання  
 ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

## МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ГАЗОВИХ МЕРЕЖ

© Сінчук Ю., Притула Н., Притула М., 2010

Запропоновано модель потоку газу через точку з'єднання газотранспортної мережі високого тиску. Виконано просторово-часову дискретизацію цієї моделі. Сформульовано метод знаходження гідродинамічних параметрів нестационарних газо-динамічних процесів в мережі. Проаналізовано результати числових експериментів, які підтверджують збіжність методу.

The model of a gas stream through connection point of a high pressure gas-transport network is offered. The space-time discretization of the given model is performed. The finding method of hydrodynamic parameters non-stationary gazo-dynamic processes in a network is formulated. The results of numerical experiments is analysed. The solution confirms convergence of the method.

### Вступ

Технологія транспорту і розподілу газу вимагає постійної зміни топології газових мереж, продуктивності компресорних станцій, параметрів вхідних і вихідних потоків. Частина із вказаних змін є прогнозованою з певною точністю, іншу потрібно, враховуючи певні критерії, розраховувати. Будь-яка вказана зміна приводить до нестационарності руху газу. Нестационарні процеси в таких системах розвиваються відносно швидко тільки в області їх зародження і швидко гасяться на незначних відстанях від них. І тому в деяких випадках при врахуванні додаткових умов є можливість використання стаціонарних моделей руху газу. При моделюванні мереж великої розмірності виникають проблеми стійкості знаходження параметрів потоків та швидкості збіжності відповідних ітераційних процедур. Кількість робіт у вказаному напрямі є незначною. Серед робіт, які пройшли апробацію, слід зазначити результати, наведені у [1–3].

Часто система магістральних трубопроводів містить велику кількість вузлів, що об'єднують окремі ділянки (див. рис. 1). Попри існування добре відпрацьованих методів числового розв'язання стаціонарних моделей, розрахунок нестационарних газових потоків в мережі залишається складною задачею.

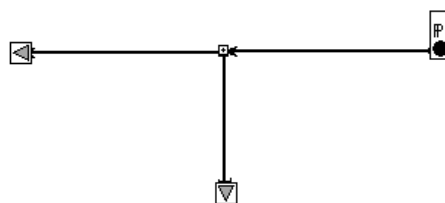


Рис. 1. Система магістральних трубопроводів

Тому актуальною проблемою є побудова моделі, що здатна адекватно описувати основні параметри газового потоку через вузли мережі. Побудовано нестационарну модель потоку газу через вузол з'єднання кількох труб. І для розрахунку в мережі будується система рівнянь, що описує потік газу на всіх ділянках газопроводу і на всіх вузлах з'єднань. Також проведено обчислювальні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованого методу.

### Побудова моделі

Рух газу на ділянці газопроводу в ізотермічному випадку описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial(rv)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + ar \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + rg \frac{dh}{dx} + \frac{Irv^2}{2S} = 0, \\ \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(rv)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

що замикається рівнянням стану газу  $P = zrRT$ . Тут  $r, v, P$  невідомі густина, швидкість руху, температура і тиск газу;  $a$  – коефіцієнт Коріоліса,  $g$  – прискорення вільного падіння;  $h$  – висота залягання труби;  $I$  – коефіцієнт гідравлічного опору;  $h$  – висота залягання труби;  $z$  – коефіцієнт стисливості.

Нехтуючи силами Коріоліса, після лінеаризації квадратичного доданка маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + C_w w + C_p P = 0; \\ \frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де  $c$  – швидкість звуку в газі,  $w = rv$ ,  $C_w = \frac{Iv_c}{2S}$ ,  $C_p = -\frac{g}{zRT} \frac{dh}{dx}$ ,  $v_c$  – середня швидкість.

Для простоти опису розглянемо систему з одним вузлом з'єднання, що містить  $M$  ділянок газопроводу, і не розглядатимемо апроксимацію різних типів крайових умов. Нехай система складається з  $M_{in}$  вхідних і  $M_{out}$  вихідних ділянок, проіндексованих у відповідному порядку. Позначимо через  $x_j$  точку їх з'єднання. Позначимо довжину і діаметр  $k$ -ї ділянки через  $L_k$  та  $S_k$  відповідно ( $k = \overline{1, M}$ ). Також виберемо на кожній ділянці точку  $\{x_{jm}\}_k$ , яка є достатньо близькою до  $x_j$  (знак „+” або „-” в індексі залежить від напрямку руху газу). Тоді для  $k$ -ї ділянки система (2) набуде вигляду

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + C_w w(t, x) + C_p P(t, x) \right\}_k = 0, \\ \left\{ \frac{\partial P(t, x)}{\partial t} + c^2 \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \right\}_k = 0, \quad k = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (3)$$

де  $x \in [0, \{x_{j-}\}_k]$  при  $k \leq M_{in}$  або  $x \in [\{x_{j+}\}_k, L_k]$  і дè  $k > M_{in}$ .

Враховуючи рівність тисків для всіх ділянок в точці з'єднання та перший закон Кірхгофа, одержимо модель руху газу через точку з'єднання

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + C_w w(t, x) + C_p P(t, x) \right\}_k = 0, \quad k = \overline{1, M}, \\ \{P(t, x_j)\}_i = P(t, x_j)\}_j, \quad \forall i, j = \overline{1, M}, \\ \sum_{i=1}^{M_{in}} \{Sw(t, x_j)\}_i - \sum_{j=M_{in}+1}^M \{Sw(t, x_j)\}_j = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де  $x \in [\{x_{j-}\}_k, x_j]$  при  $k \leq M_{in}$  або  $x \in [x_j, \{x_{j+}\}_k]$  і дè  $k > M_{in}$ .

Отже, система (3)–(4) буде описувати рух газу на  $M$  ділянках, що з'єднані в одній точці  $x_j$ . Ця модель легко узагальнюється на випадок мереж складнішої структури (з більшою кількістю з'єднань). Для цього побудуємо орієнтований граф, ребра якого відповідають ділянкам газопроводу. Тоді для кожного ребра і вершини (ступінь якої більша від 1) можемо сформулювати набори рівнянь (3), (4) відповідно.

### Просторово-часова дискретизація

Для відшукування числового наближення розв'язку (3)–(4) доцільно виконати просторово-часову дискретизацію моделі. Для проведення просторової дискретизації покриваємо кожну ділянку набором вузлів  $x_i$ ,  $i = \overline{0, N_k}$  з рівномірним кроком  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  (нумерація вузлів зростає у напрямку руху газу). Нехай точки  $x_{j\pm} = x_j \pm \Delta x$ .

Дискретизацію в часі виконаємо на наборі вузлів  $t^k$  з постійним кроком  $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ . Тоді з системи (3) в кожен момент часу  $t_{j+1}$  отримаємо СЛАР з  $2N_k$ ,  $k = \overline{1, M}$  рівнянь. Своєю чергою, дискретизована система (4) складається з  $2M$  рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \left\{ \frac{-P_{j-1}^{j+1}}{\Delta x} + \left( \frac{1}{\Delta t \Theta} + C_w \right) W_j^{j+1} + \left( C_p + \frac{1}{\Delta x} \right) P_j^{j+1} \right\}_k = \{F_i^j\}_k, & k = \overline{1, M_{in}}, \\ \left\{ \left( \frac{1}{\Delta t \Theta} + C_w \right) W_j^{j+1} + \left( C_p - \frac{1}{\Delta x} \right) P_j^{j+1} + \frac{P_{j+1}^{j+1}}{\Delta x} \right\}_k = \{F_i^j\}_k, & k = \overline{M_{in} + 1, M}, \\ \{P_j^{j+1}\}_i = \{P_j^{j+1}\}_1, & \forall i = \overline{2, M}, \\ \sum_{i=1}^{M_{in}} \{S W_j^{j+1}\}_i - \sum_{m=M_{in}+1}^M \{S W_j^{j+1}\}_m = Q_{J,out}^{j+1} - Q_{J,in}^{j+1}, \end{cases} \quad (7)$$

де  $\{F_i^j\}_k = \frac{1}{\Delta t \Theta} \left\{ W_j^j - \Delta t (1 - \Theta) \left[ \pm \frac{P_j^j - P_{jml}^j}{\Delta x} + C_w W_j^j + C_p P_j^j \right] \right\}_k$  (знак „+” або „-” вибирають залежно від напрямку потоку газу),  $Q_{J,in}^{j+1}$  і  $Q_{J,out}^{j+1}$  позначають відповідно до надходження і відбору у вузлі  $x_j$  в момент часу  $t_{j+1}$ .

### Розрахунковий алгоритм

Сформульовано такий алгоритм гідравлічного розрахунку нестационарної моделі руху газу в мережі трубопроводів.

Для кожної ітерації за часом виконують таку послідовність:

1. Формуємо зв'язний орієнтований граф для мережі (це необхідно виконувати на кожній ітерації лише у випадку змінної топології мережі).
2. Для кожного ребра формуємо систему рівнянь з дискретизації (3) і вносимо її до системи рівнянь мережі.
3. Для кожної вершини  $J$  зі степенем  $M_J$  формуємо набір рівнянь вигляду (7) (якщо  $M_J > 1$ ), або рівняння, які описують крайові умови. Сформовані рівняння вносимо до загальної системи рівнянь мережі за глобальною нумерацією вузлів.
4. Розв'язуємо загальну систему рівнянь.
5. Якщо необхідно уточнити значення нелінійних доданків, повертаємось на крок 2, інакше виконуємо наступну часову ітерацію.

**Зауваження 3.** Система рівнянь мережі міститиме

$$2 \sum_{k=1, \dots, M} N_k + 2M = 2 \sum_{k=1, \dots, M} (N_k + 1)$$

рівнянь, де  $M$  – кількість ребер графу, і її матриця буде несиметрична, стрічкового вигляду.

Ширина стрічки не перевищуватиме  $2 \max_{J \in V} \sum_{k=1}^{M_J} (N_k + 1)$ , де  $V$  – множина вузлів графу,  $M_J$  – ступінь вершини  $J$ . Тому для розрахунку доцільно використовувати методи, орієнтовані на матричні задачі стрічкового типу.

## Результати обчислювальних експериментів

**Приклад 1.** Розглянемо мережу газопроводів зображену на рис. 2. Два магістральні газопроводи завдовжки по 100 км кожен об'єднані перемичкою завдовжки 100 м. Позначимо через  $P_i(t)$  та  $Q_i(t)$  значення тиску та витрат у  $i$ -му вузлі. У вузлі 2 задано початковий розрахунковий тиск  $P_2(0) = 60$  атм. Визначимо решту параметрів моделі в такий спосіб: тривалість в часі  $t \in [0, 10000]$ , внутрішній діаметр труб 1.3887 м.,  $Q_1(t) \equiv 600$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_2(t) \equiv 400$  м<sup>3</sup>/с

$$Q_5(t) = \begin{cases} -500, & t < 6000 \\ 100 - 0.1t, & 6000 < t < 8000 \\ -700, & t > 8000 \end{cases}, \quad Q_6(t) = \begin{cases} -500, & t < 2000 \\ -700 + 0.1t, & 2000 < t < 4000 \\ -300, & t > 4000 \end{cases}.$$

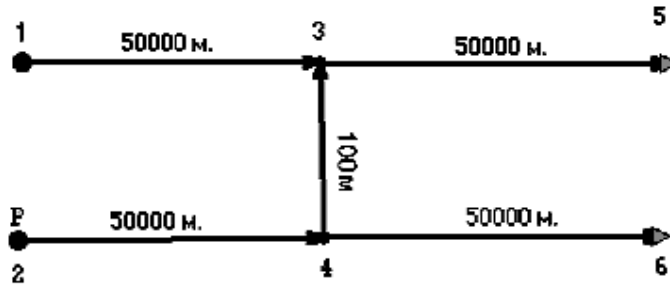


Рис. 2. Мережа газопроводів

Просторово-часову дискретизацію цієї задачі проведено за описаною вище схемою, з кроком за часом  $\Delta t = 100$  с, і рівномірним поділом кожної труби на шість частин. На рис. 3 зображено графік знайденої апроксимації функцій відбору та тиску у вузлі 4. Функція  $P_4(t)$  монотонно зростає приблизно на 3 атм протягом часу  $t \in [2000, 8000]$  (час перерозподілу відбрів у вузлах 5, 6). Відповідно до крайових умов змінюються об'єми газу, що протікають через перемичку. До початку перерозподілу  $Q_4 \approx -100$  м<sup>3</sup>/с, між змінами крайових умов  $Q_4 \approx 0$  і після перерозподілу  $Q_4 \approx 100$  м<sup>3</sup>/с, що узгоджується з першим законом Кірхгофа.

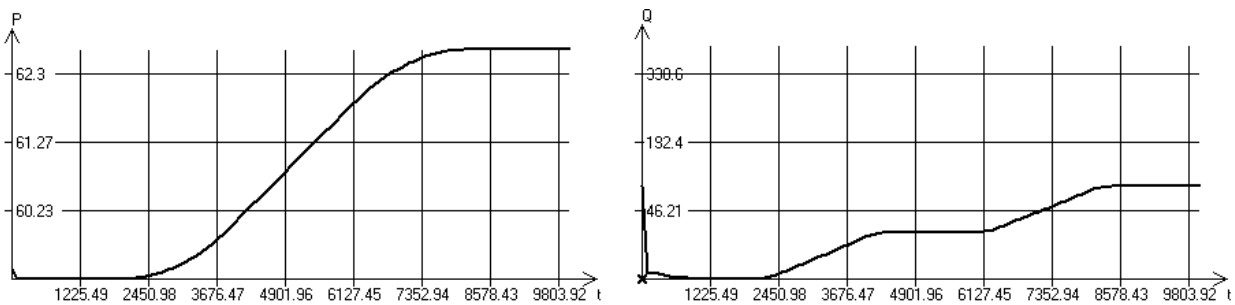


Рис. 3. Графіки апроксимацій  $P_4(t)$  та  $Q_4(t)$  (приклад 1)

**Приклад 2.** Розглянемо тепер задачу попереднього прикладу, але з іншим типом крайових умов. Нехай маємо початковий розподіл витрат:

$$Q_1(0) = 600 \text{ м}^3/\text{с}, \quad Q_2(0) = 400 \text{ м}^3/\text{с}, \quad Q_5(0) = Q_6(0) = -500 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Задамо наступні крайові умови на тиски:

$$P_1(t) = 61.1 - 1.1 \cdot 10^{-4}t, \quad P_2(t) \equiv 60 \text{ атм.},$$

$$P_5(t) = \begin{cases} 57.5 - 2.5 \cdot 10^{-4}t, & t < 6000 \\ 56, & 6000 < t < 10000 \end{cases}, \quad P_6(t) = \begin{cases} 57.5 - 2.5 \cdot 10^{-4}t, & t < 2000 \\ 57, & 2000 < t < 4000 \\ 57 + (t - 4000) / 3000, & t > 4000 \end{cases}.$$

Для просторової дискретизації поділимо труби рівномірно на 6 частин і перемичку навпіл. Провівши розрахунок з кроком за часом  $\Delta t = 100\text{с}$ , отримаємо апроксимацію розподілу тиску і об'ємів по мережі. На рис. 4 зображено, як і раніше, тиски і витрати у вузлі 4. Тиск у цій точці падає від 69.3 до 58 атм. Витрати зростають від -88 до 262 м<sup>3</sup>/с.

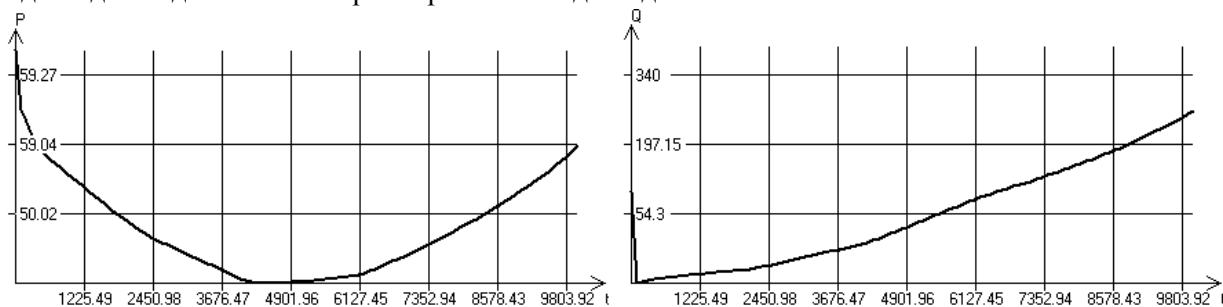


Рис. 4. Графіки апроксимацій  $P_4(t)$  та  $Q_4(t)$  (приклад 2)

### Висновки

Результати проведених досліджень свідчать, що запропонований метод дає змогу стійко розраховувати параметри газових потоків для газових мереж складної структури, а також з ділянками, які значно відрізняються за довжиною. Для забезпечення достовірності результатів важливою є адаптація параметрів методу до характеру граничних умов.

Хоча запропонований метод гідравлічного розрахунку газового потоку в мережі є значно простіший за відомі аналоги, але при великій кількості ребер він все ж вимагає великого обсягу обчислень. Тому довготривалі нестационарні процеси на складних мережах доцільно моделювати послідовністю стаціонарних розрахунків.

1. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С. *Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем.* – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с. 2. Панкратов В.С., Дубинський Ф.В., Сиперштейн Б.И. *Информационно-вычислительные системы в диспетчерском управлении газопроводами.* – Л.: Недра, 1988. – 246 с. 3. Сарданашивили С.А. *Расчетные методы и алгоритмы (трубопроводный транспорт газа).* – М.: ФГУП Изд-во РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2005. – 577 с.