

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ БЕЗСІТКОВИХ АПРОКСИМАЦІЙ

© Макар В., 2010

**Запропоновано новий підхід до розроблення процедури обчислювального експерименту, в основу якого покладено ідею застосування безсіткових апроксимацій на етапі числового аналізу математичних моделей. Цей безсітковий підхід не потребує просторової дискретизації області ні для інтерполювання невідомої функції, ні для інтегрування варіаційної форми. Продемонстровано ефективність та переваги безсіткового підходу на основі поєднання локальної слабкої варіаційної форми, підходу Петрова–Гальоркіна та методу найменших квадратів порівняно з класичним методом скінченних елементів.**

**New approach for development of computational modeling procedure with use of meshless approximations for numerical analysis of mathematical models is presented. This approach does not need a spatial finite element discretization either for purposes of interpolation of the solution variables, or for the integration of weak form. The efficiency and advantages of the developed meshless approach are shown in comparison with conventional finite element method.**

### Вступ

Процес комп'ютерного моделювання фізичних явищ відіграє надзвичайно важливу роль на сучасному етапі розвитку науки і техніки. Ефективність та успішність цього процесу значною мірою залежать від вдалого вибору та поєднання адекватних математичних моделей та потужних числових методів їхнього аналізу. Донедавна найпопулярнішими числовими методами у технології обчислювального експерименту були метод скінченних елементів (МСЕ) та метод граничних елементів (МГЕ), про що свідчить величезна кількість комерційних програмних систем проектування та розрахунку на їх основі. Проте значне розширення кола інженерних задач та ускладнення вимог до них виявило цілу низку проблем. Наприклад, проблема побудови та адаптивної регенерації сітки скінченних елементів для областей складної геометричної форми, яка стала головною компонентою проекту комп'ютерного моделювання фізичних процесів в сенсі часових та обчислювальних затрат. Можна також тут згадати і про те, що при розв'язанні багатьох нелінійних задач точність отриманих числових розв'язків значною мірою залежить від топології та способу генерації сітки. Вирішення таких проблем у межах традиційних схем і алгоритмів МСЕ і МГЕ не уявляється можливим у зв'язку з їх принциповим характером, пов'язаним з “сітковою” природою цих методів. Саме тому останнім часом дуже активно розробляють та досліджують нові числові методи моделювання, які б усували головну причину вказаних проблем – “сітковий” характер існуючих числових підходів. Свідченням цього є також й виникнення узагальнювальної для цього напрямку назви meshless (meshfree), або безсіткові методи [1].

Активний розвиток безсіткових методів спостерігається після публікації статті [2]. З того часу декілька варіантів безсіткових методів було запропоновано різними авторами [3–6]. Всі вони відрізняються один від одного лише способом інтерполяції пробної функції, але в основі своїй ґрунтуються на глобальній варіаційній формі та методі Гальоркіна. Характерною особливістю цих методів є також те, що всі вони все ж таки вимагають побудови деякої початкової сітки скінченних елементів, яка використовується для інтегрування слабкої форми. Отже, ці методи дають змогу лише частково розв'язати “сіткову” проблему, тобто саме за цими методами можна здійснити лише безсіткову інтерполяцію пробної функції. Останні дослідження в галузі розроблення та застосу-

вання безсіткових підходів до розв'язання крайових задач математичної фізики показують, що, для того, щоб розвинути безсітковий метод, має використовуватись локальна слабка варіаційна форма [7–9]. Тільки такий підхід не потребує сітки скінченних елементів ні для інтерполювання, ні для інтегрування: усі інтеграли беруться за сферами у 3-D випадку і за колом у 2-D випадку з центром у точці дослідження. Більше того, він дає змогу зберегти локальний характер апроксимації пробної функції, а також забезпечити досягнення вищих порядків неперервних апроксимацій (включно з  $C^\infty$  апроксимаціями) в дуже простий і безпосередній спосіб. Тому першочерговим завданням розроблення справді безсіткової числової схеми є побудова локальної слабкої варіаційної форми.

Розвиваючи результати попередніх робіт автора [10, 11], запропоновано новий підхід до розроблення процедури обчислювального експерименту, в основу якого покладено ідею застосування безсіткових апроксимацій на етапі числового аналізу математичних моделей. *Метою роботи* є на прикладі крайових задач еліптичного типу продемонструвати порівняно з класичним МСЕ ефективність та переваги безсіткового підходу на основі поєднання локальної слабкої варіаційної форми, підходу Петрова–Гальоркіна та методу найменших квадратів.

### Постановка задачі

Нехай в області  $\Omega$ , заповненій деяким середовищем, певним чином визначено стаціонарне фізичне поле, тобто у кожній точці  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \Omega$  задана польова функція  $u(\mathbf{x})$ , розподіл якої всередині області описується рівнянням Пуассона:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де  $f(\mathbf{x})$  – задана функція внутрішніх джерел. Вплив навколишнього середовища на поверхню  $\Gamma = \partial\Omega$  області  $\Omega$  задається граничними умовами:

$$u = \tilde{u} \quad \text{на } \Gamma_u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv q = \tilde{q} \quad \text{на } \Gamma_q, \quad (3)$$

де  $\tilde{u}$  – заданий розподіл на частині поверхні тіла  $\Gamma_u$ ,  $\tilde{q}$  – густина заданого нормального потоку через частину поверхні тіла  $\Gamma_q$ ,  $n$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ .

Для того, щоб побудувати дійсно безсітковий метод розв'язання крайової задачі (1)–(4), необхідно отримати її локальну слабку форму. Локальна слабка форма забезпечує чітку концепцію для локального безсіткового інтегрування, яка не потребує взагалі ні просторової дискретизації області, ні навіть так званих комірок фонового інтегрування. Також вона приводить до природного способу побудови глобальної матриці жорсткості: не через інтегрування за суміжними елементами і асемблювання локальних матриць жорсткості елементів сітки, а через інтегрування за локальними підобластями, причому ці локальні підобласті можуть взаємно перетинатися. На противагу традиційному методу скінченних елементів у формі Гальоркіна, який ґрунтується на глобальній слабкій формі, реально безсітковий метод походить зі слабкої форми у підобласті  $\Omega_s$ , яка повністю розташована в області  $\Omega$ .

Побудуємо локальну слабку форму за класичним методом зважених нев'язок [12]. Узагальнено локальну слабку форму диференціального рівняння (1) у локальній підобласті  $\Omega_s$  можна подати так

$$\int_{\Omega_s} (\Delta u - f) \cdot v \, d\Omega + a \int_{\Gamma_{su}} (u - \tilde{u}) \cdot v \, d\Gamma = 0, \quad (4)$$

де  $v$  – деяка тестова функція,  $a$  – параметр штрафу,  $\Gamma_{su}$  – частина границі  $\partial\Omega_s$  локальної області  $\Omega_s$ , яка виходить на границю  $\Gamma_u$ . Оскільки апроксимація пробної функції будується за методом найменших квадратів (МНК), для якого точне виконання головних граничних умов – дуже складне завдання, то у рівнянні (4) використовується параметр штрафу  $a$ .

Використовуючи формулу Гріна, перетворимо локальну слабку форму (4) до вигляду

$$\int_{\Omega_s} \text{gradu} \cdot \text{grad}v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \int_{\Omega_s} f v \, d\Omega + a \int_{\Gamma_{su}} (u - \bar{u}) \cdot v \, d\Gamma = 0, \quad (5)$$

в якому  $n$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі  $\partial\Omega_s$  області  $\Omega_s$ . Якщо локальна підобласть  $\Omega_s$  розміщена повністю всередині глобальної області  $\Omega$  і жодна частина її границі  $\partial\Omega_s$  не виходить на глобальну границю  $\Gamma_u$ , тоді інтеграл за  $\Gamma_{su}$  у рівнянні (5) зникає.

Зазначимо, що рівняння (5) виконується незалежно від розмірів та форми локальної підобласті  $\Omega_s$ . Цей важливий факт є змістовною підставою для вибору найпростішої та найзручнішої геометричної форми для  $\Omega_s$  у вигляді сфери для 3D задач і кола – для 2D задач.

Рівняння (5) можна спростити, вибираючи тестові функції  $v$  так, щоб вони дорівнювали нулю на границі  $\Gamma_s$ . У силу вибору геометричної форми локальної підобласті  $\Omega_s$ , границя  $\partial\Omega_s$  являє собою або коло (для внутрішніх вузлів), або дугу кола (для вузлів на глобальній границі  $\Gamma$ ). Тоді для цього потрібно як тестові функції взяти вагові функції апроксимації за МНК, що детальніше розглянемо нижче. Використовуючи такі тестові функції і перегруповуючи члени в рівнянні (5), остаточно отримуємо таку локальну слабку форму вихідної диференціальної крайової задачі (1)–(3)

$$\int_{\Omega_s} \text{gradu} \cdot \text{grad}v \, d\Omega + a \int_{\Gamma_{su}} uv \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} qv \, d\Gamma = \int_{\Omega_s} f v \, d\Omega + a \int_{\Gamma_{su}} \bar{u} v \, d\Gamma, \quad (6)$$

де  $\Gamma_{sq}$  – частина границі  $\partial\Omega_s$  локальної області  $\Omega_s$ , яка виходить на границю  $\Gamma_q$ .

Теоретичне обґрунтування локальної слабкої форми (6) полягає в наступному. Очевидно, що рівняння Пуассона (1) виконується апостеріорі для будь-яких локальних підобластей. Теоретично, як тільки об'єднання усіх локальних підобластей покриє всю глобальну область  $\Omega$ , тобто  $\bigcup \Omega_s \supset \Omega$ , рівняння Пуассона разом з граничною умовою (2) виконуватимуться апостеріорі всюди в глобальній області  $\Omega$  та її границі  $\Gamma$  відповідно. Іншими словами, з локальною слабкою варіаційною постановкою (6) вихідна задача, яка математично формалізована у вигляді глобальної крайової задачі (1)–(3), зводиться до локалізованої крайової задачі (1)–(3) у локальній підобласті  $\Omega_s$ , яка має форму кола.

Отже, задача полягає у побудові такої числової процедури розв'язання варіаційної задачі у слабкій постановці (6), яка б не вимагала просторової дискретизації вихідної області  $\Omega$ .

### Базова процедура розв'язання в безсіткових методах

Розглянемо коротко основні ідеї та етапи процедури побудови наближеного розв'язку безсіткового підходу, здійснюючи одночасно порівняльний аналіз з класичним МСЕ у формі Гальоркіна. На рис.1 зображено загальну схему розв'язання задачі за МСЕ та безсітковими методами. Як видно з рис. 1, основна відмінність у цих двох підходах полягає у способі представлення області дослідження задачі, і як наслідок, у способі побудови апроксимації. Якщо у МСЕ область дискретизується за допомогою множини скінченних елементів з апіорі заданою топологією та зв'язністю, то в безсітковому підході область задається (а не дискретизується) за допомогою множини довільно розташованих вузлів (див. рис. 2). Очевидно тоді, що безсіткові методи забезпечують набагато ефективніші та гнучкіші алгоритми автоматизованого адаптивного аналізу інженерних задач, оскільки вони не вимагають ніякої додаткової інформації про геометрію області, крім координат вузлів.

У МСЕ функції форми будуються на скінченному елементі, тобто вони однакові для всіх елементів одного і того самого типу і є наперед визначеними. Як наслідок, апроксимація МСЕ має один і той самий порядок точності в будь-якій точці області, і єдиний спосіб підвищити точність апроксимації в потрібних підобластях (наприклад, в підобластях, де спостерігається великий градієнт розв'язку або концентрація напружень) полягає у локальному згущенні скінченно-

елементної сітки. На протигагу цьому, безсіткові методи пропонують конструювати функції форми локально в конкретних точках інтересу області дослідження в процесі розв'язання задачі (а не наперед), що дає змогу отримувати апроксимації різного порядку точності в різних локальних підобластях залежно від потреби. Більше того, спосіб побудови функцій форм у безсіткових методах дає змогу також забезпечити досягнення вищих порядків неперервних апроксимацій (включно з  $C^\infty$  апроксимаціями) в дуже простий і безпосередній спосіб, тим самим усуваючи ще один недолік МСЕ, особливо в задачах механіки суцільного середовища, який полягав у неможливості отримання неперервних апроксимацій для напружень та деформацій. Зрозуміло, що таких істотних переваг можна досягти за рахунок певної втрати – функції форм в безсіткових методах не володіють властивістю Кронекера. Реально безсіткові методи відрізняються один від одного лише способом побудови функцій форм.

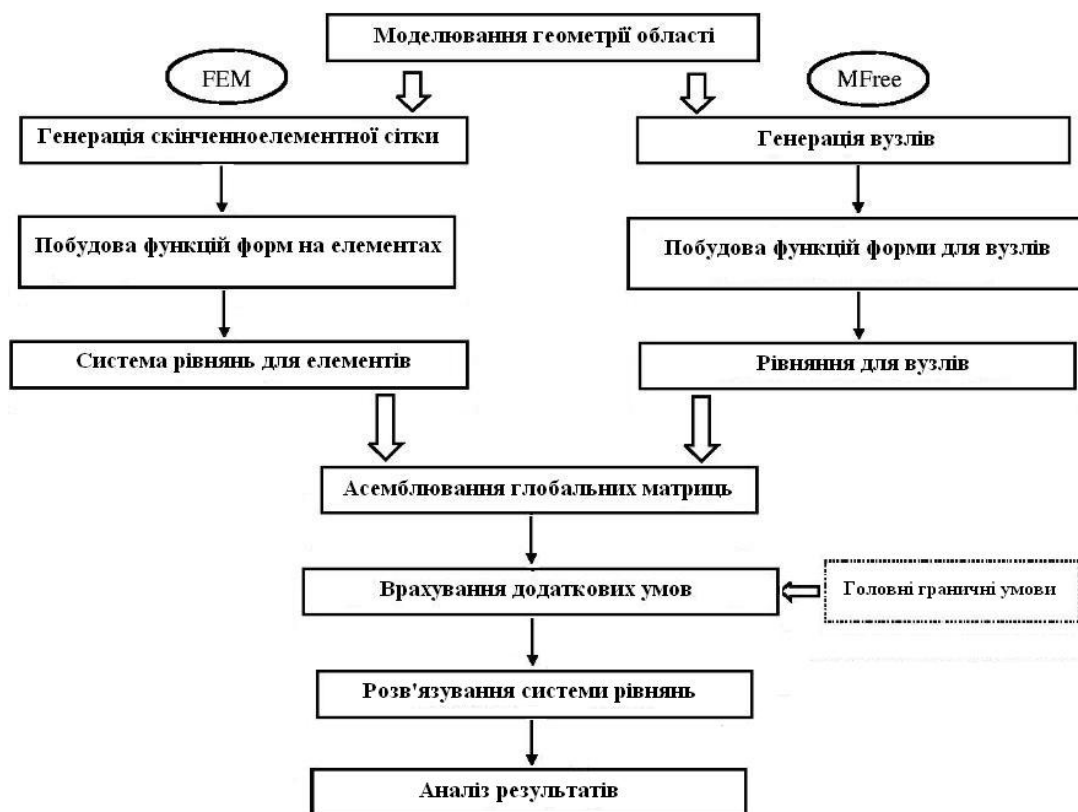


Рис. 1. Процедура розв'язання крайових задач МСЕ та безсітковими методами

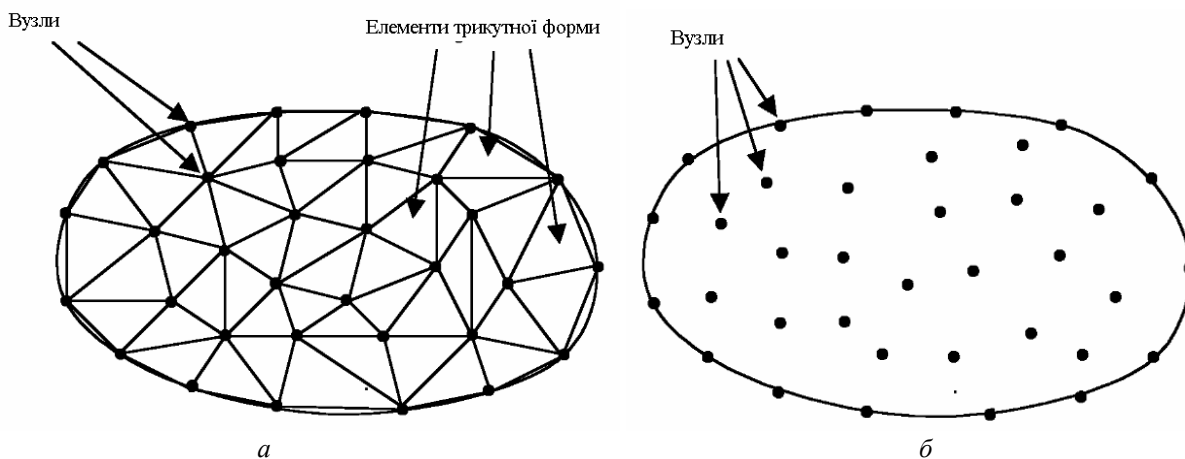


Рис. 2. Моделювання області дослідження в МСЕ (а) і безсітковими методами (б)

Побудова функцій форм безсітковими методами залишається досі основною проблемою. Причиною цього є спосіб моделювання геометрії області дослідження, адже добре відомо, що для побудови функцій форм необхідно мати інформацію про зв'язки між вузлами. Ця проблема безсітковими методами вирішується за допомогою концепції так званої області підтримки, суть якої полягає у наступному.

Апроксимація невідомої функції  $u$  у довільній точці  $\mathbf{x} \in \Omega$ , аналогічно як і в МСЕ, будується у вигляді

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n j_i(\mathbf{x}) \cdot u_i. \quad (7)$$

Тільки тепер підсумовування відбувається не за вузлами скінченного елемента, як у МСЕ, а за вузлами, які потрапляють у невелику локальну підобласть навколо точки інтересу  $\mathbf{x} \in \Omega$ , яка називається областю підтримки точки  $\mathbf{x}$  (див. рис.3). Тут  $n$  – кількість вузлів в області підтримки,  $u_i$  – значення шуканої функції  $u$  в цих вузлах,  $j_i$  – функції форми для  $i$ -ого вузла.

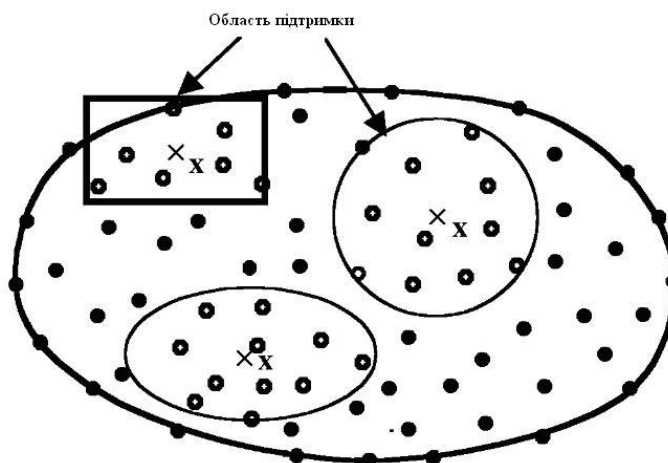


Рис. 3. Область підтримки точки  $\mathbf{x}$

Область підтримки точки  $\mathbf{x}$  визначає ті вузли (на рис. 3 вони позначені кружечком), які використовуватимуть для побудови апроксимації невідомої функції  $u$  в точці  $\mathbf{x}$ . Форми і розміри областей підтримки можуть бути різними для різних точок області. З міркувань зручності та простоти найчастіше вибирають області підтримки у формі кола чи прямокутника. Очевидно, що розмір області підтримки повинен бути таким, щоб не створювати похибки апроксимації за рахунок недостатньої кількості вузлів в ній. Визначають розмір області підтримки за формулою

$$d = a_s \cdot d_c,$$

де  $a_s$  – деякий безрозмірний коефіцієнт,  $d_c$  – характеристика довжини, яка визначається густиною вузлів поблизу точки  $\mathbf{x}$ . Якщо вузли рівномірно розташовані, то  $d_c$  – це просто відстань між двома сусідніми вузлами. У випадку нерівномірного характеру розташування вузлів  $d_c$  трактується як усереднена відстань між вузлами в області підтримки. Тоді безрозмірний коефіцієнт  $a_s$  набуває чіткого фізичного змісту – це буде просто коефіцієнт усередненої відстані між вузлами в області підтримки, тобто, якщо, наприклад,  $a_s = 2.3$ , то це означає, що область підтримки має радіус, що в 2,3 раза більший за середню відстань між вузлами у цій області.

Самі функції форми  $j_i$  за безсітковими методами найчастіше будуються методом найменших квадратів (МНК). Розглянемо коротко суть цього методу.

#### Схема методу найменших квадратів побудови функцій форми

Нехай  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Розглянемо підобласть  $\Omega_x$ , яка є околom т.  $\mathbf{x}$ , і яку будемо розглядати як область визначення апроксимації за МНК пробної функції  $u$  в т.  $\mathbf{x}$ . Апроксимацію МНК  $u^h(\mathbf{x})$  проб-

ної функції  $u$  на множині хаотично розміщених вузлів  $\{\mathbf{x}_i\}, i=1, \mathbf{K}, n$  визначимо у матричній формі так:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x, \quad (8)$$

де  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \mathbf{K}, p_m(\mathbf{x}))$  – повна базисна система поліномів порядку  $m$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  – вектор невідомих коефіцієнтів  $a_j(\mathbf{x})$ , які є функціями просторових координат. Наприклад, для 2-D задач:  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x_1, x_2)$  – лінійний базис при  $m=3$ ;  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$  – квадратичний базис при  $m=6$ . Вектор коефіцієнтів  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  визначаємо з умови мінімуму зваженої дискретної  $L_2$  норми, визначеної як

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i]^2 = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{W} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}], \quad (9)$$

де  $w_i(\mathbf{x})$  – вагові функції, пов'язані з вузлом  $i$ , причому  $w_i(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x}$  з області підтримки, матриці  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{W}$ , мають відповідно вигляд

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1(\mathbf{x}) & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{L} & w_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

і  $\hat{\mathbf{u}}^T = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \mathbf{K}, \hat{u}_n)$  – вектор фіктивних вузлових значень, тобто значень, які не обов'язково збігаються з вузловими значеннями апроксимації  $u^h(\mathbf{x})$ ,  $\hat{u}_i \neq u^h(\mathbf{x}_i)$  (див. рис. 4).

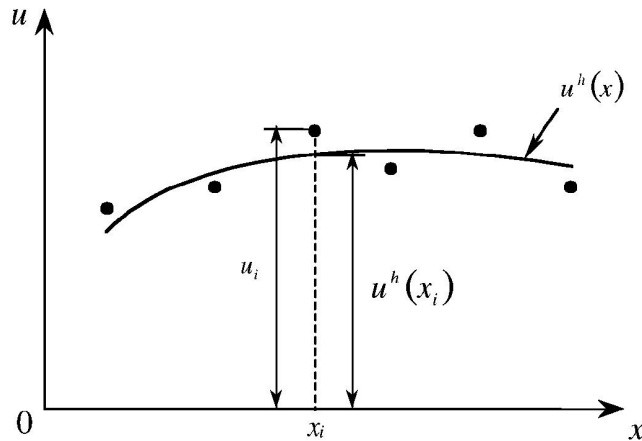


Рис. 4. Апроксимація  $u^h(\mathbf{x})$  і вузлові параметри  $\hat{u}_i$  методу найменших квадратів

Умова стаціонарності  $J(\mathbf{x})$  відносно  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  приводить до такого лінійного співвідношення між  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  і  $\hat{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (10)$$

де  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} = (w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \mathbf{K}, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n))$ .

Очевидно, що для того, щоб апроксимація  $u^h(\mathbf{x})$  була визначеною, потрібно, щоб матриця  $\mathbf{A}$  у рівнянні (10) була невинродженою. Як показано у роботі [7], для виконання цієї умови ранг матриці  $\mathbf{P}$  має дорівнювати  $m$ , тобто це означає, що для кожної точки  $\mathbf{x} \in \Omega$  щонайменше  $m$  вагових функцій  $w_i(\mathbf{x})$  мають бути відмінними від нуля, причому всі вузли в  $\Omega_x$  повинні бути розташовані так, щоби не утворювати чітких топологічних форм – таких як, наприклад, пряма лінія.

Розв'язавши рівняння (10) відносно  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  і підставивши розв'язок у співвідношення (8), отримаємо вираз для апроксимації  $u^h(\mathbf{x})$  вигляду (7):

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n j_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i, \quad u^h(\mathbf{x}_i) \equiv u_i \neq \hat{u}_i \quad \mathbf{x} \in \Omega_x, \quad (11)$$

де

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \text{або} \quad j_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji}. \quad (12)$$

Очевидно, що  $j_i(\mathbf{x}) = 0$ , якщо  $w_i(\mathbf{x}) = 0$ . На практиці вагові функції  $w_i(\mathbf{x})$  вибираються так, щоби вони відрізнялися від нуля лише в області підтримки точки  $\mathbf{x}$ . Той факт, що  $j_i(\mathbf{x}) = 0$  для всіх точок поза межами області підтримки, забезпечує локальний характер апроксимації за МНК (тобто у цьому відношенні можна стверджувати, що функції форми  $j_i(\mathbf{x})$  мають скінченний носій, аналогічно, як і базисні функції у класичному МСЕ).

Гладкість функцій форми  $j_i(\mathbf{x})$  визначається гладкістю базисних функцій  $p_j(\mathbf{x})$  та вагових функцій  $w_i(\mathbf{x})$ . Так, якщо  $w_i(\mathbf{x}) \in C^k(\Omega)$  і  $p_j(\mathbf{x}) \in C^l(\Omega)$ , то  $j_i(\mathbf{x}) \in C^r(\Omega)$ , де  $r = \min(k, l)$ . Для практичної реалізації апроксимації за МНК необхідно насамперед вибрати вигляд вагових функцій  $w_i(\mathbf{x})$ . У цій роботі як вагові функції вибираються сплайн-функції з компактним носієм вигляду

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6(d_i/r_i)^2 + 8(d_i/r_i)^3 - 3(d_i/r_i)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i, \\ 0, & d_i > r_i \end{cases}, \quad (13)$$

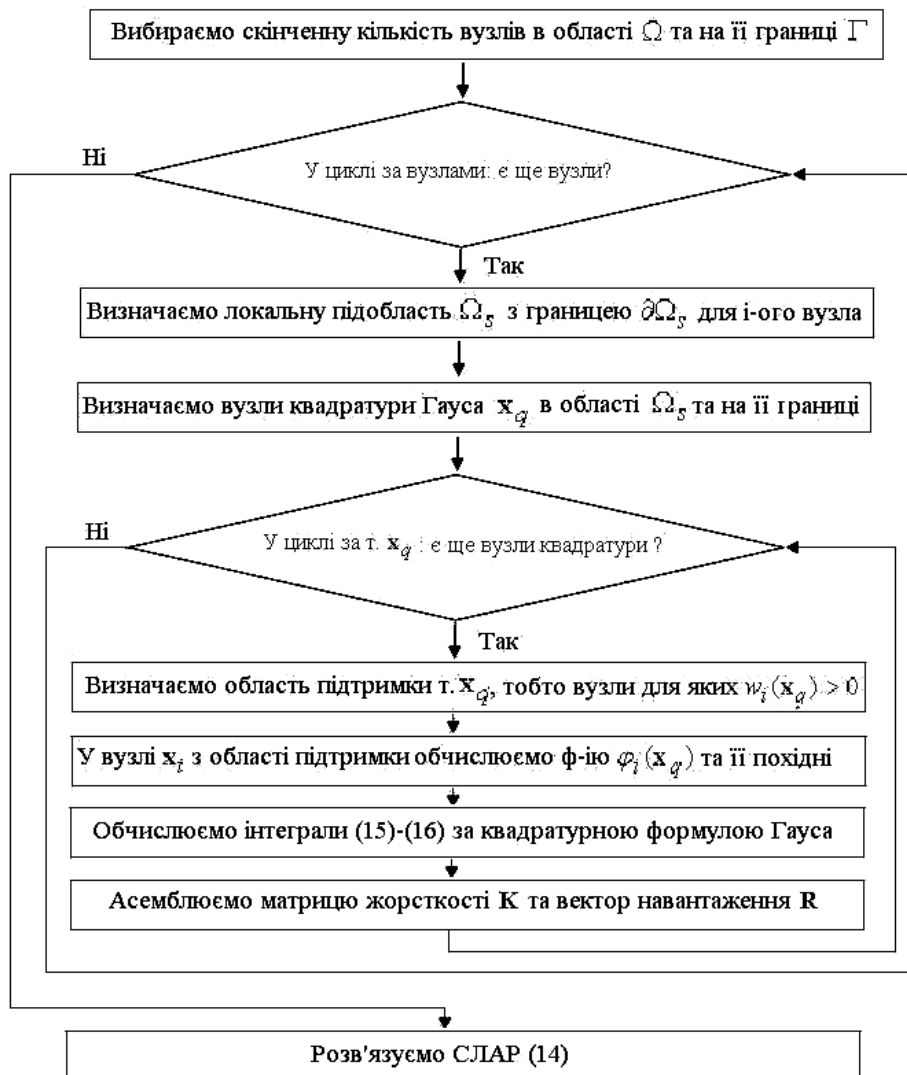
де  $d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$  – відстань від вузла  $\mathbf{x}_i$  до точки  $\mathbf{x}$ ,  $r_i$  – радіус області впливу  $i$ -го вузла, тобто області у формі круга, яка визначає, чи цей вузол буде використовуватися для побудови функцій форми в т.  $\mathbf{x}$ . Легко бачити, що вагові функції сплайнового типу (13) мають гладкість класу  $C^1(\Omega)$ , і, відповідно, функції форми  $j_i(\mathbf{x})$  є також  $C^1$ -неперервними всюди в області  $\Omega$ .

### Дискретизована система рівнянь і алгоритм реалізації

Отже, апроксимація розв'язку  $u$  локальної слабкої форми (6) будується у вигляді (11), причому функції форми  $j_i(\mathbf{x})$  визначаються через базисні  $p_j(\mathbf{x})$  та вагові функції  $w_i(\mathbf{x})$  методу найменших квадратів згідно із співвідношенням (12). Слід зауважити, що локальна область інтегрування  $\Omega_s$  у слабкій варіаційній формі (6) не залежить від інших локальних підобластей, на відміну від скінченних елементів, які пов'язані між собою топологічно і мають однакову геометричну форму. Це означає, що для використання слабкої форми (6) у процесі побудови дискретизованої системи результуючих рівнянь доцільно застосувати підхід Петрова–Гальоркіна. На противагу класичному методу Гальоркіна, в якому пробна та тестова функції повинні належати одному простору функцій, за методом Петрова–Гальоркіна вони можуть належати різним просторам. Так, зокрема, у нашому випадку пробна функція  $u$  апроксимується МНК за формулою (11), а у ролі тестових функцій  $v$  виступають відомі функції, а саме вагові функції  $w_i(\mathbf{x})$  виду (13).

Пробна функція  $u$  в кожній локальній підобласті  $\Omega_s$  визначається фіктивними вузловими значеннями  $\hat{u}_i$  в області підтримки точки спостереження  $\mathbf{x} \in \Omega_s$ . Кожна точка спостереження, тобто одна локальна підобласть  $\Omega_s$ , за рахунок того, що тестові функції є відомими, дає одне дискретизоване рівняння, яке зв'язує усі фіктивні вузлові значення  $\hat{u}_i$ . Отже, для отримання

замкненої системи дискретизованих рівнянь потрібно вибрати стільки локальних підобластей  $\Omega_s$ , скільки є невідомих  $u_i$ , тобто скільки є вузлів у глобальній області  $\Omega$ .



Для того, щоб отримати систему алгебраїчних рівнянь слабкої варіаційної форми (6), використаємо апроксимацію МНК виду (11) для пробної функції  $u$ . Підставивши (11) в (6), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно фіктивних вузлових значень  $\hat{U}$  у матричній формі

$$\mathbf{K}\hat{U} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

де коефіцієнти матриці жорсткості  $\mathbf{K}$  та вектора навантаження  $\mathbf{F}$  мають вигляд:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_s} \text{grad } j_j(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } w_i(\mathbf{x}) d\Omega + a \int_{\Gamma_{su}} j_j(\mathbf{x}) \cdot w_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} \frac{\partial j_j(\mathbf{x})}{\partial n} \cdot w_i(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (15)$$

$$F_i = \int_{\Omega_s} f w_i(\mathbf{x}) d\Omega + a \int_{\Gamma_{su}} \tilde{u} w_i(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \tilde{q} \cdot w_i(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (16)$$

Врахування головних граничних умов методом штрафу передбачає вибір значення параметра штрафу  $a$ . Правильний вибір цього параметра залежить від специфіки задачі та інших факторів, що значно ускладнює розроблення уніфікованого алгоритму реалізації запропонованого підходу. Враховуючи те, що за методом Петрова-Гальоркіна СЛАР (14) формується за вузлами, запропоновано інший, ефективніший та простіший метод врахування головних граничних умов. Він полягає в



тому, що для вузла  $k$ , який потрапляє на границю  $\Gamma_u$ , відповідне рівняння в СЛАР формується безпосередньо з граничної умови (2) та апроксимації МНК вигляду (11):

$$u_k^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n j_i(\mathbf{x}) \cdot u_i = \tilde{u}_k. \quad (17)$$

Отже, рівняння для внутрішніх вузлів формують СЛАР (14), для якої коефіцієнти виду (15)–(16) не містять інтегралів за  $\Gamma_{su}$ , а всі вузли, які розташовані на границі  $\Gamma_u$  і роблять свій внесок у цю СЛАР відповідними рівняннями вигляду (17), також є лінійними алгебраїчними рівняннями.

Тоді алгоритм реалізації запропонованого “чистого” безсіткового підходу на основі поєднання локальної слабкої варіаційної форми, підходу Петрова–Гальоркіна та МНК можна сформулювати у вигляді наведеної вище блок-схеми.

Із наведеного алгоритму випливає, що запропонований підхід є реально безсітковим, оскільки він не потребує розбиття області на скінченні елементи ні для інтерполяції, ні для інтегрування.

### Програмна реалізація та результати числових досліджень

Запропонований обчислювальний підхід реалізовано алгоритмічною мовою C++ на основі об’єктно-орієнтованого підходу. На рис. 5 зображено головну діаграму класів розробленої програмної системи.

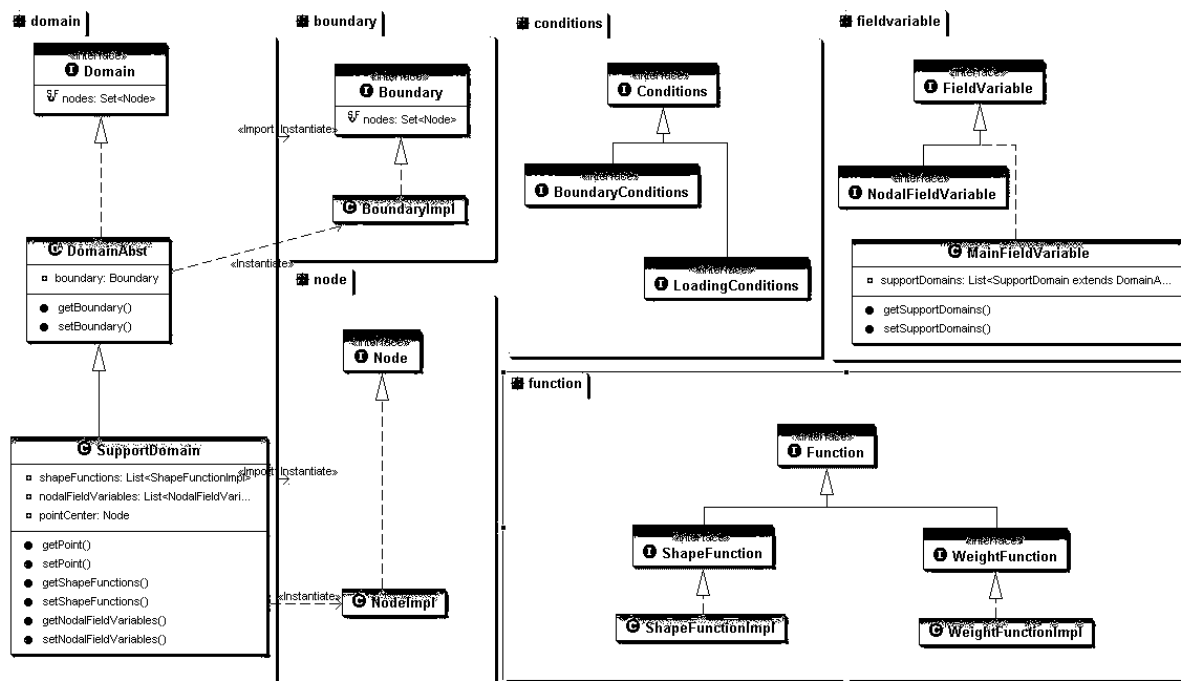


Рис. 5. Головна діаграма класів програмної системи

Апробація цієї програмної системи проводилася шляхом розв’язання ряду тестових задач. Наприклад, розглянемо спочатку задачу Діріхле для рівняння Лапласа ( $f(\mathbf{x}) = 0$  у рівнянні(1)) у квадратній області  $\Omega$  розміром  $2 \times 2$  з відомим точним розв’язком у вигляді функції  $u(x, y) = x^2 - y^2$ , де тільки головні граничні умови виду (2) задані на всій границі області (тобто  $\Gamma = \Gamma_u$ ) відповідно до заданого точного розв’язку. Множина рівномірно розташованих вузлів (4 внутрішні та 12 граничних) та квадратичні базисні функції МНК були використані для отримання наближеного розв’язку. Слід зауважити, що оскільки функції форми виду (12) не є кусково-визначеними поліномами, то використання квадратури Гаусса для числового інтегрування у співвідношеннях (15)–(16) вже не дасть точного значення інтегралів. Тому для кожної локальної

області  $\Omega_s$  було використано квадратурну формулу Гаусса із 40 вузлами (5x8), а для їх границь  $\Gamma_{su}$  – з 9 вузлами. Для визначення розміру області підтримки вузла квадратури Гаусса  $\mathbf{x}_q$  використовувалось значення безрозмірного коефіцієнта  $a_s = 2.5$ , а радіус  $r_i$  області впливу  $i$ -го вузла, тобто області у формі круга, яка визначає, чи цей вузол буде використовуватися для побудови функцій форми в т.  $\mathbf{x}_q$ , для всіх вузлів вибирався однаковим  $r_i = 3$ . Головні граничні умови враховували на основі запропонованого співвідношення (17). Зауважимо також, що матриця жорсткості  $\mathbf{K}$  в СЛАР (14) є несиметричною, а для розв'язання самої СЛАР був використаний класичний метод Гаусса.

Результат розв'язання цієї задачі запропонованим безсітковим методом зображено на рис. 6 у вигляді порівняння ліній рівня точного розв'язку (а) та отриманого числового розв'язку (б). Як видно з цього рисунка, задовільної точності наближеного розв'язку досягнуто вже навіть для невеликої кількості вузлів.

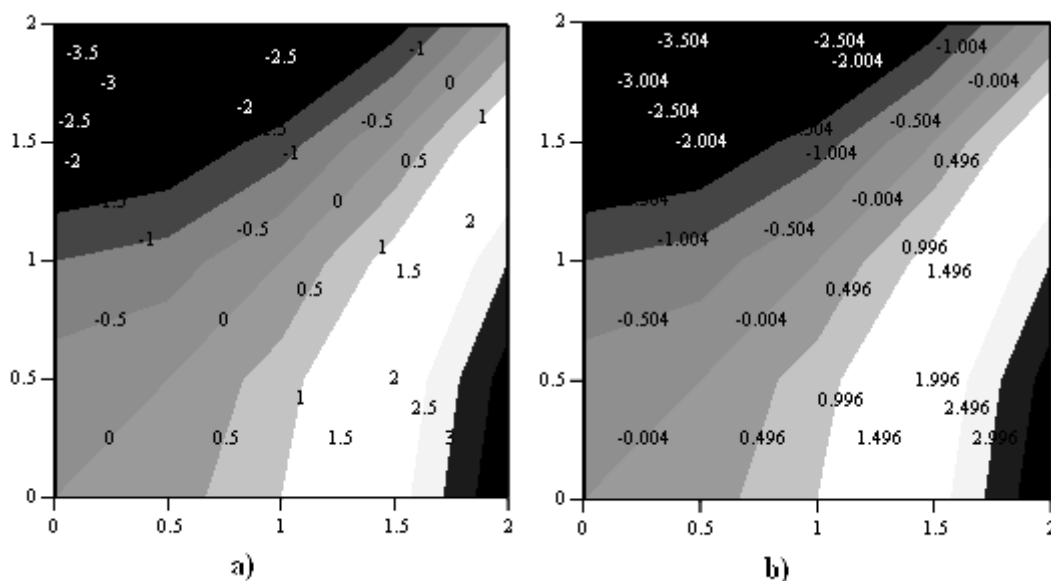


Рис. 6. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Іншим прикладом, який розглядався у межах цього дослідження, є рівняння Лапласа з точним розв'язком у вигляді кубічного полінома  $u(x, y) = -x^3 - y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ . Для цього рівняння розглянемо дві задачі: задачу Діріхле та змішану задачу, в якій головні граничні умови задані згори та знизу квадратної області  $\Omega$  розміром  $2 \times 2$ , а природні граничні умови задані зліва і справа. Для розв'язання цих задач використовувалися лінійний та квадратичний базис МНК. Інші вхідні дані були такими самими, як і у попередньому прикладі.

Ці задачі розв'язували з метою дослідження збіжності розвинутого у цій роботі безсіткового методу. Для цього було використано три регулярні множини з 9(3x3), 36(6x6) та 64(8x8) вузлів відповідно. Збіжність послідовності наближених розв'язків оцінювалась в термінах відносної похибки  $r$  в метриці  $L_2$  норми:

$$r = \frac{\|u^h - u^{точ}\|}{\|u^{точ}\|}, \quad \|u\| = \left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}.$$

На рис. 7 зображені результати дослідження збіжності послідовності числових розв'язків для задачі Діріхле (а) та змішаної задачі (б). Видно, що запропонований безсітковий метод має високу швидкість збіжності для  $L_2$  норми, забезпечуючи тим самим задовільну точність результатів.

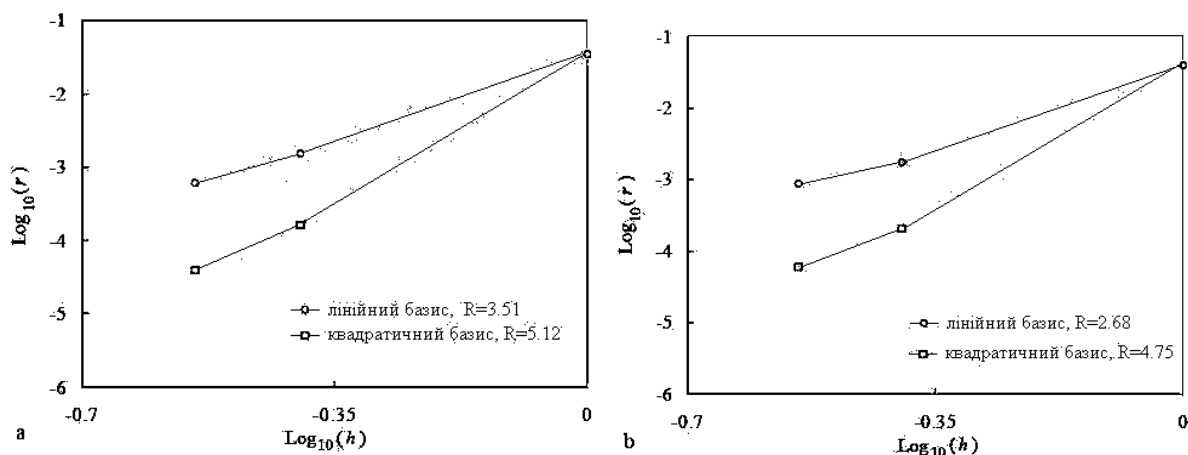


Рис. 7. Відносна похибка та швидкість збіжності безсіткового методу ( $R$ -швидкість збіжності)

### Висновки

Запропоновано новий підхід до розроблення процедури комп'ютерного моделювання крайових задач, в основу якого покладено ідею застосування безсіткових апроксимацій на етапі числового аналізу математичних моделей. Основою цього підходу є побудована локальна варіаційна слабка форма, яка дає змогу, по-перше, позбутися необхідності здійснення просторової дискретизації області з метою інтегрування, по-друге, зберегти локальний характер апроксимації пробної функції. Для забезпечення безсіткового характеру апроксимації розв'язку локальної слабкої форми використано схему методу найменших квадратів, яка, своєю чергою, дає змогу позбутися необхідності здійснення просторової дискретизації області з метою побудови апроксимації невідомої функції. Отже, на відміну від інших, так званих безсіткових методів, які все ж таки вимагають побудови деякої початкової сітки скінченних елементів з метою інтегрування слабкої форми, запропонований підхід не потребує жодних елементів розбиття (ні скінченних, ні граничних), тобто він є повністю безсітковим. На прикладі крайових задач еліптичного типу продемонстровано порівняно з класичним МСЕ переваги цього безсіткового підходу. Вперше запропоновано ефективніший та простіший метод врахування головних граничних умов. Наведені результати числових досліджень підтверджують дієвість, ефективність та високу швидкість збіжності запропонованого безсіткового підходу до розв'язання крайових задач математичної фізики.

1. Atluri S.N., Shen S. *The Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple and less-costly alternative to the finite element and boundary element method* // *Comput. Modeling Engrg. Sci.*, vol.3, no.1, 2002, pp.11-51. 2. Nayroles B., Touzot G., Villon P. *Generalized the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements* // *Comput. Mech.*, vol. 10, 1992, pp.307-318. 3. T.Belytschko, Y.Lu, L.Gu *Element-free Galerkin methods* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 37, 1994, pp. 229-256. 4. I.Babushka, J.Melenk *The partition of unity method* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 40, 1997, pp.727-758. 5. N.Sukumar, B.Moran, T.Belytschko *The natural element method in solid mechanics* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 43, 1998, pp.839-887. 6. H.Wendland *Meshless Galerkin methods using radial basis function* // *Math.Comput.* vol. 68(228), 1999, pp.1521-1531. 7. S.N.Atluri, T.L.Zhu *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics* // *Comput. Mech.*, vol.25, 2000, pp. 169-179. 8. S.N.Atluri, T.L.Zhu *Mew concepts in meshless methods* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 47,2000, pp.537-556. 9. S.N.Atluri, S.Shen. *The Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method* // *Tech. Science Press, Los Angeles, CA, 2002.* 10. Макар В.М. *Новий безсітковий метод моделювання нестационарних задач теплопровідності* // *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка"*, 2006. – № 564. – С. 83–89. 11. Федасюк Д., Макар В., Заброварний Ю. *Безсітковий підхід до розв'язання крайових задач на основі апроксимацій Петрова–Гальоркіна* // *Матеріали 2-ї Міжнародної науково-технічної конференції CSIT-2007, Нац. ун-т "Львівська політехніка"*, Львів, 19-21 вересня, 2007. – С. 118–124. 12. Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимации*. – М.: Мир, 1986. – 318 с.