

І. Дронюк, М. Назаркевич, М. Дронюк
 Національний університет “Львівська політехніка”
 кафедра автоматизованих систем управління

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ ШЛЯХОМ РОЗКЛАДІВ АТЕВ-ФУНКЦІЙ У ЧИСЛОВІ РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА ФУР’Є

© Дронюк І., Назаркевич М., Дронюк М., 2010

Знайдено аналітичні розв’язки за допомогою Атев-функцій для системи диференціальних рівнянь, що описує коливний рух з одним ступенем вільності. Для числового моделювання застосовано розклади Атев-функцій у ряди Тейлора та Фур’є. Представлено алгоритм обчислення періодичних Атев-функцій за допомогою розкладів у ряди Фур’є. Розроблений метод можна застосувати для числового моделювання руху коливних систем.

The analytical solutions are built with the help of Ateb-functions for the system of differential equations, that describes oscillating motion with one degree of freedom. For the numeral design the decomposition in Tylor and Furier rows of Ateb-functions are applied. The algorithm of calculation of periodic Ateb-functions is represented with the help of time-tables in the Furier rows. The developed method can be applied for the numeral design of motion of the oscillating systems.

Вступ

Асимптотичні методи розв’язання систем диференціальних рівнянь поширені в дослідженнях коливних систем. У роботах Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольського, А.М. Самойленко [2] розроблено та обґрунтовано математичний метод усереднення, який істотно спрощує математичні задачі теорії нелінійних коливань і дає змогу ефективно довести їх розв’язки до аналітичного вираження.

Аналітичні вирази для розв’язання систем диференціальних рівнянь, що описують коливний рух, отримані у роботах [3,9]. Отримані формули ґрунтуються на теорії Атев-функцій. Проте аналітичний запис розв’язків не є зручним для числового моделювання руху коливних систем за цими формулами. Труднощі обчислень пов’язані з особливістю вираження тому, що Атев-функції є оберненням інтегралів, представлених у формулах розв’язків. Отже, для моделювання руху коливних систем актуальною є проблема отримання простих і зручних у користуванні алгоритмів обчислення розв’язків систем диференціальних рівнянь. Розроблено алгоритм обчислення періодичних Атев-функцій на основі розкладу у ряд Фур’є. Раніше [4] нами було запропоновано метод обчислення Атев-функцій на основі розкладів у ряди Тейлора. Розроблені методи використовуються для числового моделювання періодичного руху.

Математичні моделі періодичного руху

Розглянемо динамічну систему, що описується рівняннями у векторній формі

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}), \quad \bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \bar{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \quad (1)$$

Розв’язок рівняння (1) залежить від часу та початкових умов:

$$\bar{x}_t = \bar{x}(t, \bar{x}_0).$$

Система виду (1) є математичною моделлю, що описує періодично повторюваний рух. У загальному випадку записана модель характеризується багатьма ступенями вільності. Обмежимося розглядом системи з одним ступенем вільності у вигляді

$$\begin{cases} x + by^m = 0 \\ y + ax^n = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

де a, b – деякі числові коефіцієнти:

$$n = \frac{2q_1' + 1}{2q_1'' + 1}, \quad m = \frac{2q_2' + 1}{2q_2'' + 1}, \quad (q_1', q_1'', q_2', q_2'' = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Розв'язок системи (2) представляється у вигляді періодичних Атеб-функцій [7], якщо n, m задовольняють нерівності, які називаються умовами періодичності

$$\frac{1}{n+1} > 0, \quad \frac{1}{m+1} > 0. \quad (4)$$

Прикладами реальних коливних систем можуть слугувати зв'язані фізичні або пружинні маятники, зв'язані коливні контури, двоатомні молекули, зв'язані акустичні резонатори та ін. [1]. Для дослідження руху у таких системах пропонується застосовувати розроблені методи.

Розглянемо вираз

$$w = \frac{1}{2} \int_0^y t^{-\frac{n}{n+1}} (1-t)^{-\frac{m}{m+1}} dt, \quad (5)$$

де n, m визначені співвідношеннями (3), (4).

У формулі (5) w є функцією від y , а також від n і m . Для побудови Атеб-функції розглядаємо обернену залежність y від w , яка є одночасно функцією n і m та називається синусом Атеб-функції [7] $sa(n, m, w)$.

За формулою (5)

$$w = -\frac{m+1}{2} \int_1^z (1-\bar{u}^{m+1})^{-\frac{n}{n+1}} d\bar{u}. \quad (6)$$

Залежність z від w для інтегралу (6) є функцією n і m називається косинусом Атеб-функції $ca(m, n, w)$.

Розв'язок системи (2), записаний у вигляді періодичних Атеб-функцій, має вигляд

$$\begin{cases} x = a ca(m, n, q) \\ y = a^m q sa(n, m, q) \end{cases},$$

де

$$m = \frac{m+1}{n+1}, \quad q = \frac{(n+1)a}{(m+1)b}, \quad q = \frac{1}{2}(m+1)bq^n a^{m-1}t + q_0.$$

Константи a і q_0 визначаються з початкових умов.

Для моделювання коливного руху, описаного системою (2), необхідно отримати числові значення Атеб-функцій.

Обчислюємо функції для аргументу w , який змінюється на відрізку

$$0 \leq w \leq \frac{1}{2} \Pi(m, n).$$

де

$$\Pi(m, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}\right)}, \quad (7)$$

і є півперіодом Ateb-функції [8]. У формулі (7) $\Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right), \Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)$ – гамма-функція.

Для обчислення Ateb-функцій, заданих формулами (5), (6) використаємо розклади підінтегральних функцій у функціональні ряди. Для побудови розв'язку використаємо ряди Тейлора та ряди Фур'є.

Представлення розв'язків за допомогою розкладу в ряд Тейлора

Відомо [8], що обчислювати достатньо тільки одну з Ateb-функцій. Обчислимо функцію $ca(m, n, w)$.

З виразу (6) введемо у розгляд функцію

$$\Phi(z) = w + \frac{m+1}{2} \int_1^z \frac{d\bar{u}}{(1-\bar{u}^{m+1})^{\frac{n}{n+1}}}. \quad (8)$$

Для кожного фіксованого параметра w знаходимо таке z , що функція (8) стає малою величиною заданого порядку, тобто

$$\Phi(z) = 0(e), \quad (9)$$

де e – малий додатний параметр.

Разкладемо підінтегральну функцію (8) в ряд за степенями z^{m+1} .

Отримаємо

$$\Phi(z) = w - \frac{1}{2} \Pi(m, n) + \frac{m+1}{2} zF(a, b, c, d) \quad (10)$$

Тут $F(a, b, c, d)$ – гіпергеометричний ряд, тобто

$$F(a, b, c, d) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{d}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{d^2}{2!} + \dots, \quad (11)$$

де введено позначення

$$d = z^{m+1}, \quad a = \frac{1}{m+1}, \quad b = \frac{n}{n+1}, \quad c = \frac{m+2}{m+1}. \quad (12)$$

Враховуючи (10), отримаємо $0 \leq d \leq 1$, і

$$a + b - c = -\frac{1}{n+1} < 0.$$

Як доведено Є.Т. Уїткером [10], гіпергеометричний ряд (11) є збіжним.

Для знаходження нулів функції (8) використовується метод поділу відрізка наполовину [11]. З цією метою задається достатньо малий додатний параметр e ($e = 10^{-12}$). Процес обчислення продовжується доти, поки s -й відрізок не стане величиною порядку e , тобто

$$|z_{s+1} - z_s| \leq e, \quad (13)$$

де z_s – наближення на s -му кроці.

Тоді за нуль функції $\Phi(z)$ приймаємо величину

$$z = \frac{1}{2}(z_{s+1} + z_s).$$

Отже, формули (10)–(12) дають змогу обчислити значення Ateb-косинуса, використавши розклад у ряд Тейлора та методи наближеного обчислення інтеграла та нулів функції. Детально розроблений нами алгоритм обчислень представлено у роботі [4].

Представлення розв'язків за допомогою розкладу в ряд Фур'є

Будь-яку періодичну функцію $F(x)$ з періодом $2\Pi = [-\Pi, \Pi]$ можна розкласти на цьому відрізку в ряд Фур'є за формулами

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{kpx}{\Pi} + b_k \sin \frac{kpx}{\Pi} \right). \quad (14)$$

Оскільки функція Атеб-косинуса $ca(m, n, w)$ є парною, то в розкладі (14) коефіцієнти $b_k = 0$, ($k=1, \dots, \infty$). У результаті розклад в ряд Фур'є для Атеб-косинуса має вигляд

$$ca(m, n, w) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{kpw}{\Pi}, \quad (15)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} ca(m, n, x) \cos \frac{kpx}{\Pi} dx = -\frac{m+1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \cos \frac{kpx}{\Pi} \int_1^x \frac{d\bar{x}}{(1-\bar{x}^{m+1})^{\frac{n}{n+1}}} dx \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} ca(m, n, x) dx = -\frac{m+1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \int_1^{\Pi - |x|} \frac{d\bar{x}}{(1-\bar{x}^{m+1})^{\frac{n}{n+1}}} dx$$

Оскільки функція Атеб-синуса $sa(n, m, w)$ є непарною, то в розкладі (14) коефіцієнти $a_k = 0$, ($k=0, \dots, \infty$). У результаті розклад в ряд Фур'є для Атеб-синуса має вигляд

$$sa(n, m, w) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{kpw}{\Pi} \quad (17)$$

де

$$b_k = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} sa(n, m, y) \cos \frac{kpy}{\Pi} dy = \frac{n+1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \sin \frac{kpy}{\Pi} \int_0^{\Pi - |y|} \frac{d\bar{y}}{(1-\bar{y}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} dy. \quad (18)$$

У [6] доведено, що ряди (15) та (17) є збіжними.

Використаємо формули (15)–(18) для обчислення періодичних Атеб-функцій. Як було сказано раніше, достатньо обчислити одну з цих функцій, тому опишемо алгоритм обчислення Атеб-косинуса. Основна трудність обчислення полягає у обрахунку коефіцієнтів розкладу у ряд Фур'є, заданих формулами (16), (18). Як видно з виведених формул, a_k , b_k представлені у вигляді подвійних інтегралів. У записаному представленні внутрішній інтеграл є невластивим, адже при $x \rightarrow 1$ для a_k , та $y \rightarrow 1$ для b_k підінтегральні вирази прямують до нескінченності.

Числове представлення розв'язків математичних моделей коливного руху

Опишемо метод обчислення Атеб-функцій за допомогою розкладів у ряди Фур'є. Блок-схему методу обчислення показано на рис. 1. На початковому етапі вводимо вхідні дані: крок табуляції та параметри Атеб-функцій n і m . Після введення параметрів n і m перевіряємо умови періодичності (4). Після цього обчислюємо період Атеб-функції за формулою (7). Обчислення проводимо на проміжку $\left[0, \frac{1}{2}\Pi(m, n)\right]$ з певним заданим кроком табуляції. Потім залежно від вибору обчислюваної функції косинуса чи синуса вибираємо формули (15),(16) або (17),(18). Обчислюємо суму ряду до заданої точності.

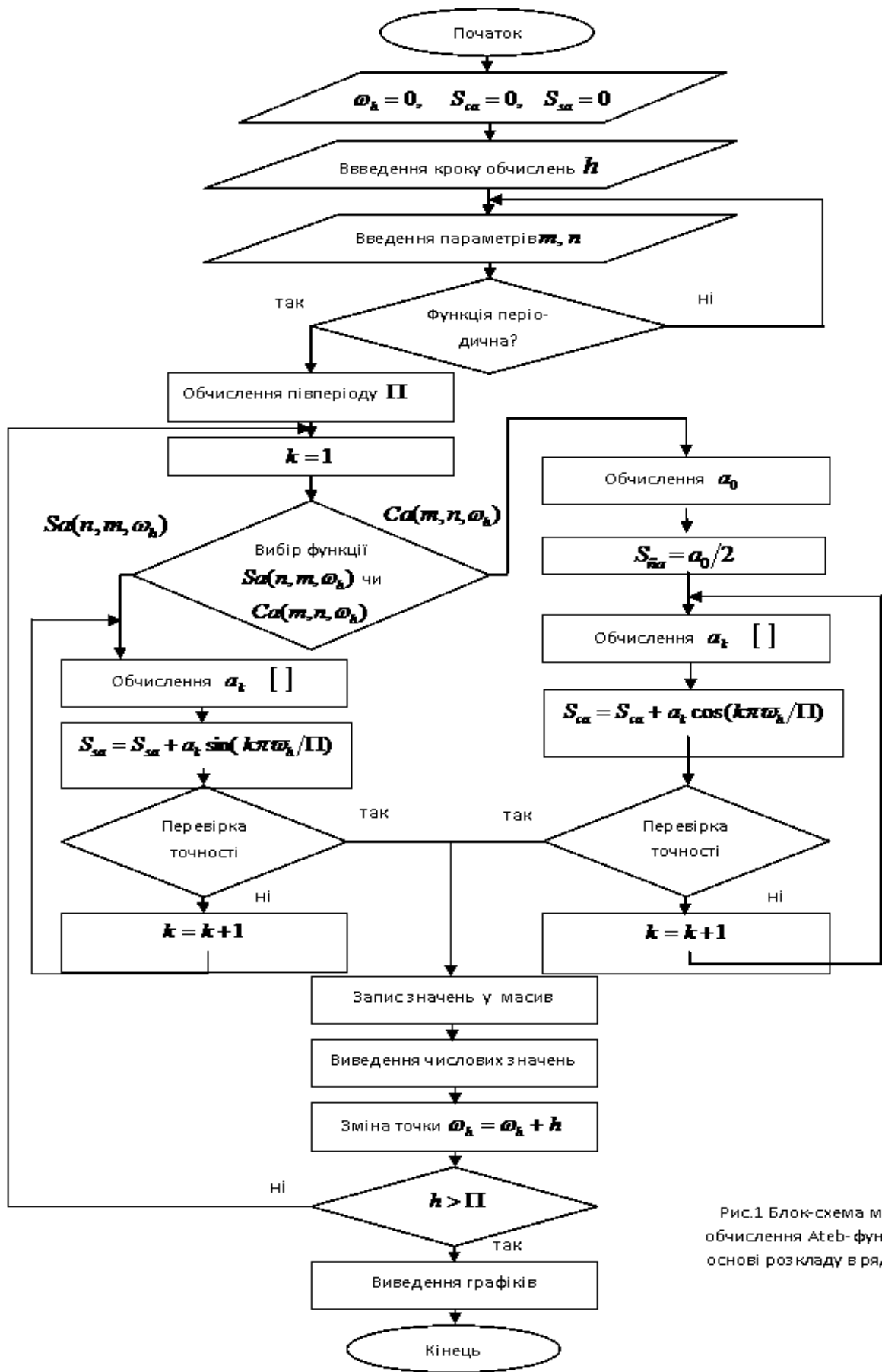


Рис.1 Блок-схема методу обчислення Атаб-функцій і основі розкладу в ряд Фур

Обчислені значення функції виводимо у файл або на дисплей та зберігаємо у масив з метою побудови графіків функції. Після цього вибираємо наступну точку. Якщо ця точка належить проміжку, то вертаємось до обчислень, якщо функція протабульована на всьому проміжку, то виводимо результати обчислень. Окремим блоком виділимо обчислення коефіцієнтів $a_k = 0$, ($k=0, \dots, \infty$) та $b_k = 0$, ($k=1, \dots, \infty$), що є невластивими інтегралами. Для їх обчислення використовувались наближені методи обчислення подвійних інтегралів та дихотомічний метод пошуку нулів функції [11].

Так реалізовано метод обчислення періодичних Ateb-функцій на основі розкладу у ряди Фур'є.

Висновки

Запропоновані методи обчислення ґрунтуються на формулах асимптотичних методів розв'язку систем диференціальних рівнянь є поширеними під час дослідження коливних систем. Аналітичні вирази для розв'язків систем диференціальних рівнянь, що описують коливний рух, ґрунтуються на теорії Ateb-функцій. Розроблено методи та засоби обчислення періодичних Ateb-функцій на основі розкладів у ряд Фур'є та на основі розкладів у ряди Тейлора. Розроблені методи використовуються для числового моделювання руху динамічних коливних систем.

1. Анісімов І.О. Коливання та хвилі.: Навч. посібник для студентів вищ. навч. закл. – К.: Академпрес, 2003. – 280 с. 2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 3. Возний А.М. Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків одного класу суттєво нелінійних диференціальних рівнянь: Доповіді АН УССР. Сер. А. – 1970. – № 9. – С. 971–974. 4. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій: Доповіді НАН України. – Сер. А. – 2007. – № 12. – С. 37 – 43. 5. Дронюк І.М., Назаркевич М.А. До розв'язування одного класу звичайних нелінійних диференціальних рівнянь // Фізико-технічне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – № 6. – С. 136–140. 6. Піскунов Н.С. Диференціальне і інтегральне обчислення. – М., 1978. 7. Сенік П.М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – Т. 21, № 3. – С. 325–333. 8. Сенік П.М., Возний А.М. Про табулювання періодичної Ateb-функції: Доповіді АН УССР. Сер. А. – 1969. – № 12. – С. 1089–1092. 9. Сокіл Б.І. Асимптотичні наближення розв'язків для одного нелінійного неавтономного рівняння // Укр. мат. журнал. – 1997. – 49. – № 11. – С. 1580–1583. 10. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. – Т. 1, 1963. – С. 38. 11. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Вид-во ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 408 с.