УДК 004.032.026

П. Тимощук
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра САПР

ДИНАМІКА ДИСКРЕТИЗОВАНИХ СИГНАЛІВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ KWTA-НЕЙРОННОЇ СХЕМИ

Аналізується динаміка дискретизованих сигналів математичної моделі нейронної схеми типу “K-winners-take-all” (KWTA), призначеної для ідентифікації K максимальних серед N невідомих сигналів, де $1 \le K < N$. Аналіз здійснюють за допомогою використання відповідної енергетичної функції. Наведено результати комп’ютерного моделювання, які підтверджують теоретичні положення.

Ключові слова: нейронна схема, сигнал, енергетична функція, модель.

Dynamics of mathematical model of discrete-time K-winners-take-all (KWTA) neural circuit that identifies K maximal among N unknown signals, where $1 \le K < N$, is analyzed. The analysis is fulfilled by using corresponding energy function.Computer modeling results presented confirm theoretical statements.

Keywords: energy function, model.

1. Вступ

Нейронні мережі типу “K-winners-take-all” (KWTA-мережі), як відомо, здійснюють вибір K серед N елементів, де $1 \le K < N$, з більшими значеннями активаційних функцій, ніж у решти $N-K$ елементів. Коли K дорівнює одиниці, KWTA-мережа є мережею типу “Winner-takes-all” (WTA-мережею), яка може розрізняти нейрон з максимальною активацією [5, 7, 8]. Вибір K найбільших елементів з множини даних N дійсних чисел є ключовою задачею мереж прийняття рішень, розпізнавання образів, пов’язаних пам’ятей і конкуруючого навчання [9, 11]. Задачі такого типу природно зустрічаються при розв’язанні задач класифікації і застосовуються для розроблення класифікаційних нейронних мереж, для розв’язання задач сортування, розпізнавання і класифікації зразків [4]. KWTA-мережі застосовуються в телекомунікації, особливо для керування пакетними перемикачами даних [1]. KWTA-механізми застосовують у машинному навчанні, зокрема, для розв’язання задач класифікації k найближчих об’єктів, кластеризації k значень та ін. [3, 6].

У статті аналізується динаміка дискретизованих сигналів математичної моделі KWTA-нейронної схеми. Термін “динамічний” пов’язується з нейронною мережею, що моделюється диференційним рівнянням, яке визначає еволюцію змінної стану, або просто стану. Така еволюція відбувається у просторі станів дискретного часу, і функція, що описує цю еволюцію у просторі станів називається траєкторією (стану), або розв’язком. Динамічна нейронна мережа обробки дискретизованих сигналів має зворотний зв’язок, який схемотехнічно реалізується на базі часової затримки. Частковим випадком динамічної нейронної мережі є статична нейронна мережа. Термін “статична нейронна мережа” визначає нейронну мережу, що функціонує у статичному режимі. Статична нейронна мережа моделюється алгебраїчним рівнянням, тому траєкторія її розв’язку не має ніякого перехідного режиму. Статична нейронна мережа не має ніякого зворотного зв’язку.

2. Математична модель KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів

Нехай задано N дійсних чисел від a_1 до a_N, $N>1$, тобто $a_1, a_2, ..., a_N$ як миттєвих значень невідомих вхідних сигналів і необхідно вибрати K найбільших з них, де $1 \le K < N$ – ненегативне ціле. Припустимо, що задані числа розподілені у відомому діапазоні $a \in (A_{min}, A_{max})$. Покладемо, що ці числа не однакові (відрізняються між собою за значеннями) і впорядковані у спадаючому за величиною порядку так, що задовольняються нерівності

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_N, \tag{1}$$

де індекси $1,2,\cdots,N$ у загальному випадку можуть відрізнятись від оригінальних номерів входів, означаючи, що компоненти вектора $a=[a_1,\cdots,a_N]$ – впорядковані. Побудуємо математичну модель нейронної схеми, яка обробляє вхідний вектор дискретизованих сигналів a так, що після скінченної кількості ітерацій отримуються вихідні сигнали схеми $b=[b_1,\cdots,b_N]$, які задовольняють нерівності

$$b_i > 0, i\in 1,2,\cdots,K; b_j < 0, j\in K+1,K+2,\cdots,N. \tag{2}$$

Нерівності (2) виражають KWTA-властивість, тобто що саме вихідні сигнали від b_1 до b_K "виграють" конкуренцію і той факт, що тільки вони є позитивними компонентами вектора b свідчить про те, що вхідні сигнали від a_1 до a_K є K найбільшими компонентами вектора a.

Виконаємо попередню обробку заданого вектора a вхідних сигналів, віднявши від усіх його компонентів значення A_{min} і отримаємо додаткові сигнали

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_N, \tag{3}$$

де $c_n = a_n - A_{min}$, $n=1,2,...,N$. Неважко побачити, що сигнали (3) знаходяться у діапазоні $(0,A)$, де $A = A_{max} - A_{min}>0$, тобто $c\in(0,A)$, де $c=[c_1,c_2,...,c_N]$. Оскільки вхідні сигнали (1) не однакові і розподілені у відомому діапазоні, то сигнали (3) також різні і обмежені в діапазоні $(0,A)$. Отже, для будь-яких $1\le K < N$ існують такі значення $x\in\Re$, які задовольняють нерівності

$$c_i > x, i\in 1,2,\cdots,K; c_j < x, j\in K+1,K+2,\cdots,N. \tag{4}$$

Віднімання x від (4) дає

$$c_i - x > 0, i\in 1,2,\cdots,K; c_j - x < 0, j\in K+1,K+2,\cdots,N. \tag{5}$$

Як можна побачити з (5), сигнали $c_n - x$, де $n=1,2,...,N$, володіють KWTA-властивістю. Тому такі сигнали можуть бути використані, як вихідні сигнали моделі KWTA-нейронної схеми, тобто можна записати рівності

$$b_i = c_i - x, i\in 1,2,\cdots,K; b_j = c_j - x, j\in K+1,K+2,\cdots,N. \tag{6}$$

Для побудови моделі KWTA-нейронної схеми необхідно розробити процедуру знаходження значення скалярного динамічного зсуву вхідних сигналів x, який задовольняє нерівності (4). Використаємо для цього вимогу, що такий зсув у встановленому режимі повинен знаходитись у діапазоні $(0,A)$. Спроектуємо траєкторію дискретного часу $x^{(k)}$, де $k=1,2,...,m$ - кількість ітерацій до досягнення встановленого режиму, яка може перетнути весь діапазон $(0,A)$. Нехай така траєкторія буде розв’язком відповідного різницевого рівняння $x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)})$ з початковою умовою $x^{(1)}$, де $\varphi(x^{(k)})$ – певна функція, яка повинна бути визначена. Припустимо, що у деякий момент дискретного часу $t^{(m)}$ змінна $x^{(k)}$ набуває у встановленому режимі значення $x^{(k)}=x^{(m)}$, яке задовольняє нерівність (4). Для зупинки обчислювального процесу у момент $t^{(m)}$ визначимо наступну умову, яка керує кількістю переможців і переможених у кожній дискретній часовій точці протягом обчислювального процесу:

$$R(x^{(k)}) = 2K - N - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(b_n^{(k)}), \tag{7}$$

де $R(x^{(k)})$ – k-те дискретне значення нев'язки, $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)}$ – значення n-го вихідного сигналу моделі на k-й ітерації:

$$\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad b_n^{(k)} > 0; \\ 0, & \text{if} \quad b_n^{(k)} = 0; \\ -1, & \text{if} \quad b_n^{(k)} < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

– сигнум (жорсткообмежувальна) функція, $\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(b_n^{(k)})$ – різниця між дійсними кількостями переможців і переможених. Сигнум-функція виконує порівняння між k-м дискретним значенням n-го вихідного сигналу $b_n^{(k)}$ і нулем. Якщо $b_n^{(k)} > 0$, тоді n-на сигнум-функція забезпечує вихідний сигнал $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = 1$, якщо $b_n^{(k)} = 0$, тоді вихідний сигнал n-ї сигнум-функції $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = 0$, інакше $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = -1$.

Визначатимемо динамічний зсув $x^{(k)}$ за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\Delta x^{(k)}, \qquad (9)$$

де $\Delta x^{(k)} = \operatorname{sgn}(R(x^{(k)}))\alpha^k$, α – параметр, який гарантує збіжність алгоритму до KWTA-розв'язку; $0 \le x^{(1)} \le A$ – початкова умова; m – число ітерацій до досягнення збіжності пошуковим процесом встановленого режиму.

3. Динаміка дискретизованих сигналів математичної моделі KWTA-нейронної схеми

Розглянемо динаміку дискретизованих сигналів математичної моделі KWTA-нейронної схеми, яка описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6). Для цього сформулюємо наступну лему.

Лема. Енергетична функція $\left|R\left(x^{(k)}\right)\right|$, де $k = 1,2,...,m$ є монотонно спадною до нуля функцією дискретного часу для кожного $0 < \alpha < 1$ і для будь-якого $0 \le x^{(1)} \le A$.

Доведення. Нехай початковою точкою буде $x^{(1)} = A$. Тоді вихідні сигнали набувають значення $b_n^{(1)} = c_n - x^{(1)} < 0$ для кожного $n = 1,2,\ldots,N$ і функція $R\left(x^{(k)}\right)$ набуває значення $2K - N - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(b_n^{(1)}) = 2K > 0$. Тому у цій точці траєкторія розв'язку описується різницевим рівнянням $x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\alpha^k$, і зсув $x^{(k)}$ буде експоненціально зменшуватись. У точці $x^{(l)} = c_1$, де c_1 є максимальним вхідним сигналом згідно з (3), значення вихідних сигналів $b_1^{(l)} = c_1 - x^{(l)} = 0$ і значення вихідних сигналів $b_j^{(l)} < 0$, $j = 2,3,\ldots,N$ відповідно до (5) і (6). Тому функція $R\left(x^{(k)}\right)$ набуває значення $2K - N - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sgn}(b_n^{(l)}) = 2K - 1 > 0$, і зсув $x^{(k)}$ буде продовжувати експоненціально спадати згідно з рівнянням $x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\alpha^k$. В інтервалі $c_1 > x^{(l+1)} > c_2$, де c_2 – другий найбільший вхідний сигнал, вихідний сигнал $b_1^{(l+1)} = c_1 - x^{(l+1)} > 0$ і решта вихідних сигналів $b_j^{(l+1)} = c_j - x^{(l+1)} < 0$, $j = 2,3,...,N$. У цьому інтервалі функція $R\left(x^{(k)}\right)$ отримує значення $2K - N - \sum_{k=1}^{N} \operatorname{sgn}(b_n^{(l+1)}) = 2K - 2 > 0$ ф так далі, поки задовольняється рівність $R(x^{(l+1)}) = 0$, тобто якщо $K \ne 1$. Інакше, якщо $K = 1$ і тому $R(x^{(l+1)}) = 0$, тоді рівняння (9) набуває вигляду форму $x^{(k+1)} = x^{(k)}$ і зсув $x^{(k)}$ надалі не змінюється, зберігаючи постійне значення $x^{(k+1)} = x^{(m)}$. У результаті такої динаміки функція $R\left(x^{(k)}\right)$ послідовно отримує ненегативні значення $2K, 2K-1, 2K-2, \ldots, 0$. Це означає,що функція $\left|R\left(x^{(k)}\right)\right| = R\left(x^{(k)}\right)$, $k = 1,2,...,m$ у цьому випадку є монотонно спадною до нуля для кожного $0 < \alpha < 1$.

Якщо початкова точка $x^{(1)} = 0$, то вихідні сигнали набувають значення $b_n^{(1)} = c_n - x^{(1)} > 0$, $n = 1,2,\ldots, N$. Функція $R\left(x^{(k)}\right)$ набуває значення $2K - N - \sum_{n=1}^{N} \mathrm{sgn}(b_n^{(1)}) = 2K - 2N < 0$. Тому різницеве рівняння (9) набуває у цій точці форми $x^{(k+1)} = x^{(k)} + A\alpha^k$, і зсув $x^{(k)}$ експоненціально зростатиме. У точці $x^{(q)} = c_N$, де c_N – найменший вхідний сигнал відповідно до (3), вихідний сигнал $b_N^{(q)}$ є $b_N^{(q)} = c_N - x^{(q)} = 0$ і вихідні сигнали $b_j^{(q)}$, $j = 1,2,\ldots, N-1$ є $b_j^{(q)} > 0$ згідно з (5) і (6). Тому функція $R\left(x^{(k)}\right)$ пробігає значення $2K - N - \sum_{n=1}^{N} \mathrm{sgn}(b_n^{(q)}) = 2K - 2N + 1 < 0$, і зсув $x^{(k)}$ продовжує експоненціально зростати відповідно до рівняння $x^{(k+1)} = x^{(k)} + A\alpha^k$. У діапазоні $c_N < x^{(q+1)} < c_{N-1}$, де c_{N-1} є другим найменшим вхідним сигналом, вихідні сигнали $b_N^{(q+1)} = c_N - x^{(q+1)} < 0$ і решта вихідних сигналів $b_j^{(q+1)} = c_j - x^{(q+1)} > 0$, $j = 1,2,..., N-1$. У цьому діапазоні функція $R\left(x^{(k)}\right)$ набуває значення $R(x) = 2K - N - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{sgn}(b_n^{(q+1)}) = 2K - 2N + 2 < 0$ і так далі, якщо тільки не задовольняється рівність $R(x^{(q+1)}) = 0$, тобто $K \neq N-1$. Інакше, якщо $K = N-1$ і тому $R(x^{(q+1)}) = 0$, то рівняння (9) трансформується до вигляду $x^{(k+1)} = x^{(k)}$, і зсув $x^{(k)}$ не змінюється надалі, набуваючи постійних значень $x^{(k)} = x^{(m)}$. У результаті такої динаміки функція $R\left(x^{(k)}\right)$ поступово набуває непозитивних значень $2K - 2N, 2K - 2N + 1, 2K - 2N + 2, \ldots, 0$. Тому у цьому випадку функція $\left|R\left(x^{(k)}\right)\right| = -R\left(x^{(k)}\right)$, $k = 1,2,...,m$ є монотонно спадною до нуля для кожного $0 < \alpha < 1$.

Отже, енергетична функція $\left|R\left(x^{(k)}\right)\right|$, $k = 1,2,...,m$ є монотонно спадною до нуля функцією дискретного часу для кожного $0 \le x^{(1)} \le A$ і для кожного $0 < \alpha < 1$. ■

Щоби модель, яка описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6), знаходила K переможців, повинні задовольнятись нерівності $A\alpha^m < c_K - c_{K+1}$. Взявши логарифм від останньої нерівності за основу α для $0.5 < \alpha < 1$, можна отримати наступну нижню границю для кількості ітерацій траєкторій розв'язків рівняння (9) для досягнення збіжності:

$$m > \log_\alpha \frac{c_K - c_{K+1}}{A}. \tag{10}$$

Права частина рівняння (10) є скінченною для кожного $c_K - c_{K+1} \neq 0$, тобто для кожного вхідного сигналу, який можна розрізнити. Алгоритм, що описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6), має логарифмічну швидкість збіжності, як це випливає з (10).

Зазначимо, що коли необхідно ідентифікувати K переможців у випадку, коли k-й найбільший і (k+1)-й найбільший сигнали відрізнити тяжко, тобто якщо діапазон $\left[c_{K+1}, c_K\right]$ є дуже малим, то кількість ітерацій m, необхідних для того, щоб змінна $x^{(k)}$ потрапила у цей діапазон, буде скінченною, але може бути дуже великою. Однак, властивість монотонності і спадання до нуля енергетичної функції дискретного часу $\left|R\left(x^{(k)}\right)\right|$ спільно з логарифмічною швидкістю збіжності алгоритму, що описується різницевим рівнянням (9) і рівністю (6), приводить до знаходження К-1 переможців після значно меншої, ніж m кількості ітерацій, якщо проміжок $[c_K, c_{K-1}]$ є не дуже вузьким.

Використовуючи (10), можна встановити, що для досягнення умови $R(x^{(k)}) = 0$ не більше, ніж за m ітерацій для будь-яких заданих вхідних сигналів $a_n, n = 1,2,..., N$, повинно бути задано значення коефіцієнта загасання

$$\alpha > \sqrt[m]{\frac{c_K - c_{K+1}}{A}}. \qquad (11)$$

Період повторення вхідних сигналів $a_n, n = 1,2,..., N$, які можуть оброблятись коректно моделлю, описаною різницевим рівнянням (9) і рівностями (6), повинен задовольняти нерівність

$$T > \log_\alpha \frac{c_K - c_{K+!}}{A} \tau, \qquad (12)$$

де $\tau = t^{(k+1)} - t^{(k)}$ – період дискретизації.

Припустимо, що усі вхідні сигнали є випадково розподіленими на інтервалі [0,A]. Як це було показано вище, якщо виконується умова $0.5 < \alpha < 1$ і вхідні сигнали неоднакові, то можна гарантувати, що експоненціальний пошук може досягти будь-якого значення з [0,A] для кожного $x^{(1)} \in [0, A]$ за скінченну кількість ітерацій. За статистикою [5, 10], що значення математичного сподівання c_{K+1} N однорідно розподілених вхідних сигналів, позначене через $\mu_{K+1,N}$ для $0 \le c_{K+1} \le A$, можна визначити як

$$\mu_{K+1,N} = \frac{(N-K)A}{N+1}. \qquad (13)$$

З тієї ж причини математичне сподівання К-го максимального вхідного сигналу $\mu_{K,N} = \frac{(N-K+1)A}{N+1}$. Різниця між математичними сподіваннями К-го і (К+1)-го максимальних сигналів $\mu_{K,N} - \mu_{K+1,N} = \frac{A}{N+1}$. Якщо модуль $\Delta x^{(k)}$ стає меншим від цієї різниці, то пошукова точка може потрапити в діапазон $(\mu_{K+1,N}, \mu_{K,N})$, тоді збіжність може бути гарантована у сенсі середнього. Замінивши в (10) $c_K - c_{K+1}$ на $\frac{A}{N+1}$, математичне сподівання числа ітерацій до досягнення збіжності для однорідно розподілених вхідних сигналів можна визначити як

$$m > \log_\alpha \frac{1}{N+1}. \qquad (14)$$

Для однорідно розподілених вхідних сигналів математичне сподівання числа ітерацій до досягнення збіжності зменшується із зменшенням розмірності задачі N, оскільки $\frac{d}{dN}\left(\log_\alpha \frac{1}{N+1}\right) = -\frac{1}{(N+1)\ln\alpha} > 0$ для кожного $0.5 < \alpha < 1$, N>0. З іншого боку, для однорідно розподілених вхідних сигналів математичне сподівання кількості ітерацій, необхідних для збіжності, зменшується із зменшенням значення параметра α, оскільки $\frac{d}{d\alpha}\left(\log_\alpha \frac{1}{N+1}\right) = \frac{\alpha(\ln(N+1))^3}{(\ln\alpha)^2} > 0$. І, нарешті, для однорідно розподілених вхідних сигналів математичне сподівання числа ітерацій до досягнення збіжності не залежить від кількості переможців, оскільки $\frac{d}{dK}\left(\log_\alpha \frac{1}{N+1}\right) = 0$.

У випадку, коли вхідні сигнали вибираються випадково з іншого розподілу, кількість ітерацій, необхідних для збіжності станів моделі, залежна від математичного сподівання роздільної здатності $(\mu_{K+1,N}, \mu_{K,N})$, може бути подана як

$$m > \log_\alpha \frac{\mu_{K,N} - \mu_{K+1,N}}{A}, \tag{15}$$

де $\mu_{K+1,N}$ і $\mu_{K,N}$ – статистичні середні.

Алгоритм (9) можна розглядати як експоненціальний пошук для визначення динамічного зсуву $x^{(k)}$. Такий алгоритм може бути спрощений шляхом заміни в (9) α^k на α, де параметр α повинен задовольняти нерівності $\alpha < \frac{r}{A}$ для гарантованого потрапляння зсуву x в діапазон $(x^{(k)}, x^{(k+1)})$. Отриманий так алгоритм буде частковим випадком алгоритму (9). У цьому випадку процедура визначення зсуву $x^{(k)}$ є лінійним пошуковим процесом, який призводить до низької швидкості збіжності.

На основі вищенаведеного можна стверджувати, що існує таке $t^{(m)} > 0$, що задовольняє нерівність

$$b_1(t^{(k)}) > \cdots > b_K(t^{(k)}) > 0 > b_{K+1}(t^{(k)}) > \cdots > b_N(t^{(k)}) \tag{16}$$

для кожного $t^{(k)} > t^{(m)}$, де $b_n(t^{(k)}) = c_n - x(t^{(k)})$, $n = 1,2,..., N$, оскільки число переможців $K = 1,2,\ldots, N-1$ і вектор вхідних сигналів a є впорядкованим. Це означає, що змінна $x^{(k)}$ рівняння (9) стартує з початкового значення $x^{(1)}$ і фінішує в стані $x^{(m)}$, що відповідає компонентам вихідного вектора b, розщепленим у позитивну і негативну площини відповідно до (2). У будь-який момент часу після $t^{(m)}$ вихідні сигнали, що визначаються з рівняння (9) і рівностей (6), володіють KWTA-властивістю.

Зазначимо, що для будь-якого $k > 0$ нерівності (16) описують властивість збереження впорядкування сигналів, тобто для будь-яких заданих сигналів $a_n, n = 1,2,\cdots, N$ впорядкування вихідних сигналів є тим самим, що й впорядкування вхідних сигналів. Така властивість є очевидною, оскільки задовольняється умова $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)} = a_n - A_{min} - x^{(k)}$, $n = 1,2,..., N$ для кожного $t^{(k)} \geq 0$. Інакше кажучи, вихідні сигнали дорівнюють вхідним сигналам мінус динамічний зсув, який є однаковим для усіх вхідних сигналів, а тому він не змінює впорядкування сигналів. Це призводить до того, що задовольняються нерівності (1). Отже, впорядкування вихідних сигналів моделі і впорядкування відповідних вхідних сигналів є однаковим для кожного $x^{(k)} \in [0, A]$.

Отримані результати, які грунтуються на лемі, гарантують, що різницеве рівняння (9) і рівності (6) описують модель KWTA-схеми обробки дискретизованих сигналів. Цей факт можна подати у вигляді теореми.

Теорема. Нехай коефіцієнт загасання α різницевого рівняння (9) задовольняє обмеження $0.5 < \alpha < 1$. Тоді для заданого вхідного вектора $a \in \Re$ з нерівними компонентами і позитивним цілим $1 \leq K < N$ це рівняння і рівності (6) описують модель KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів.

4. Результати комп'ютерного моделювання

Для ілюстрації теоретичних результатів, представлених у статті, розглянемо конкретний приклад з відповідним комп'ютерним моделюванням, який демонструє динаміку дискретизованих сигналів моделі KWTA-нейронної схеми.

Приклад. Нехай необхідно ідентифікувати чотири найбільші сигнали, тобто $K = 4$ вектора $a = [-1.1, 1.7, -0.3, -1.8, 0.2]$, тобто $N = 5$, використавши модель, що описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6). Задамо для цієї моделі $A_{min} = -2$, $A = 4$, початкову умову $x^{(1)} = A$ і коефіцієнт загасання $\alpha = 0.6$, вибраний з обмеження леми. Визначимо траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$ і вихідні сигнали $b_i^{(k)}, i = 1,2,3,4,5$ згідно з різницевим рівнянням (9) і рівностями (6). Такі траєкторії в нормалізованих одиницях показані на рис. 1. Як можна побачити, у встановленому режимі сигнали $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0, b_5 > 0$ відповідають чотирьом найбільшим компонентам вектора a – переможцям, а сигнал $b_4 < 0$ відповідає переможеному згідно з KWTA–властивістю (2). Збіжності пошукового процесу до встановленого режиму досягають за $m = 5$ ітерацій відповідно до оцінки (12).

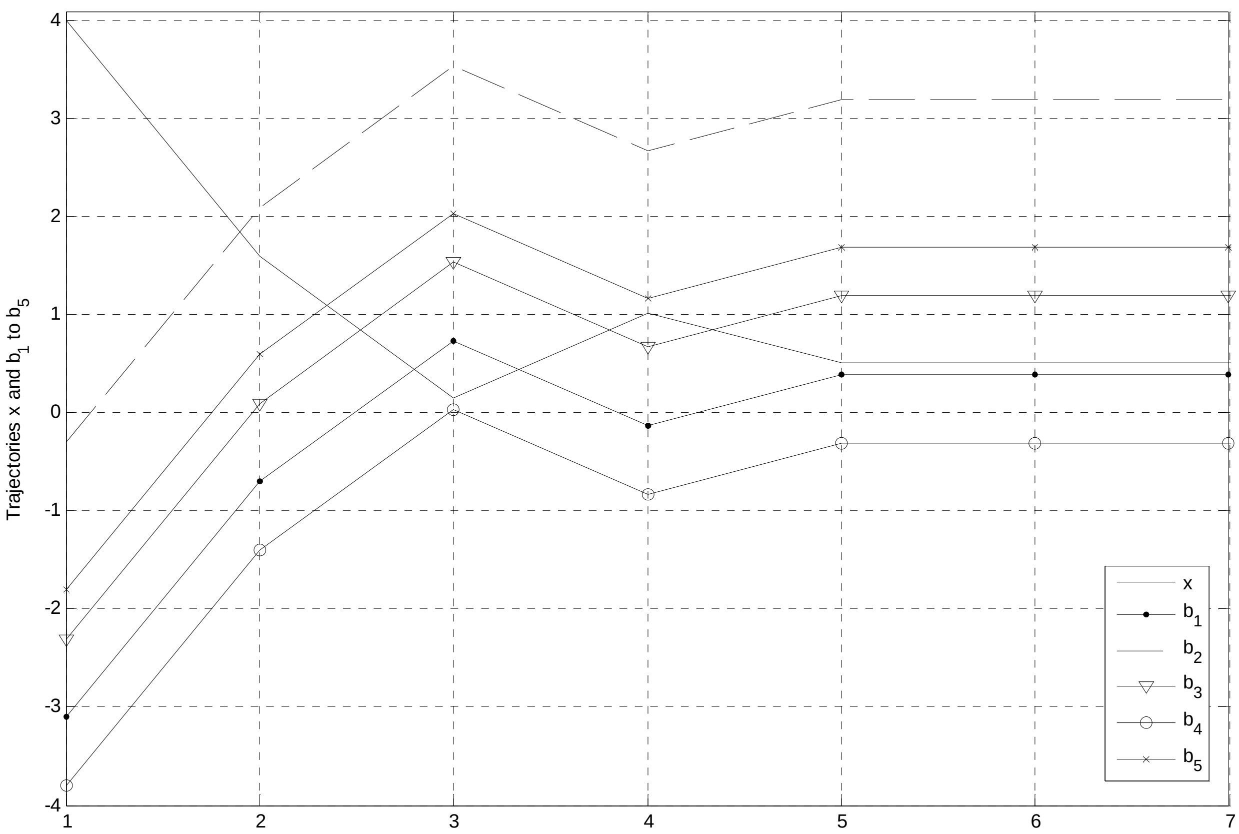

Рис. 1. Траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$ і вихідних сигналів $b_i^{(k)}, i = 1,2,3,4,5$,
які представляють KWTA-властивість моделі,
що описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6)

На рис. 2 представлено фазовий портрет траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$. Як можна побачити, фазова крива змінної $x^{(k)}$ є скінченною закрученою спіраллю кусково-лінійної форми, що гарантує стабільну динаміку зсуву $x^{(k)}$. Зміна зсуву $\Delta x^{(k)} = x^{(k+!)} - x^{(k)}$ демонструє стрибки на початку і в кінці кожного горизонтального сектора.

Отже, результати комп'ютерного моделювання підтверджують теоретичні положення.

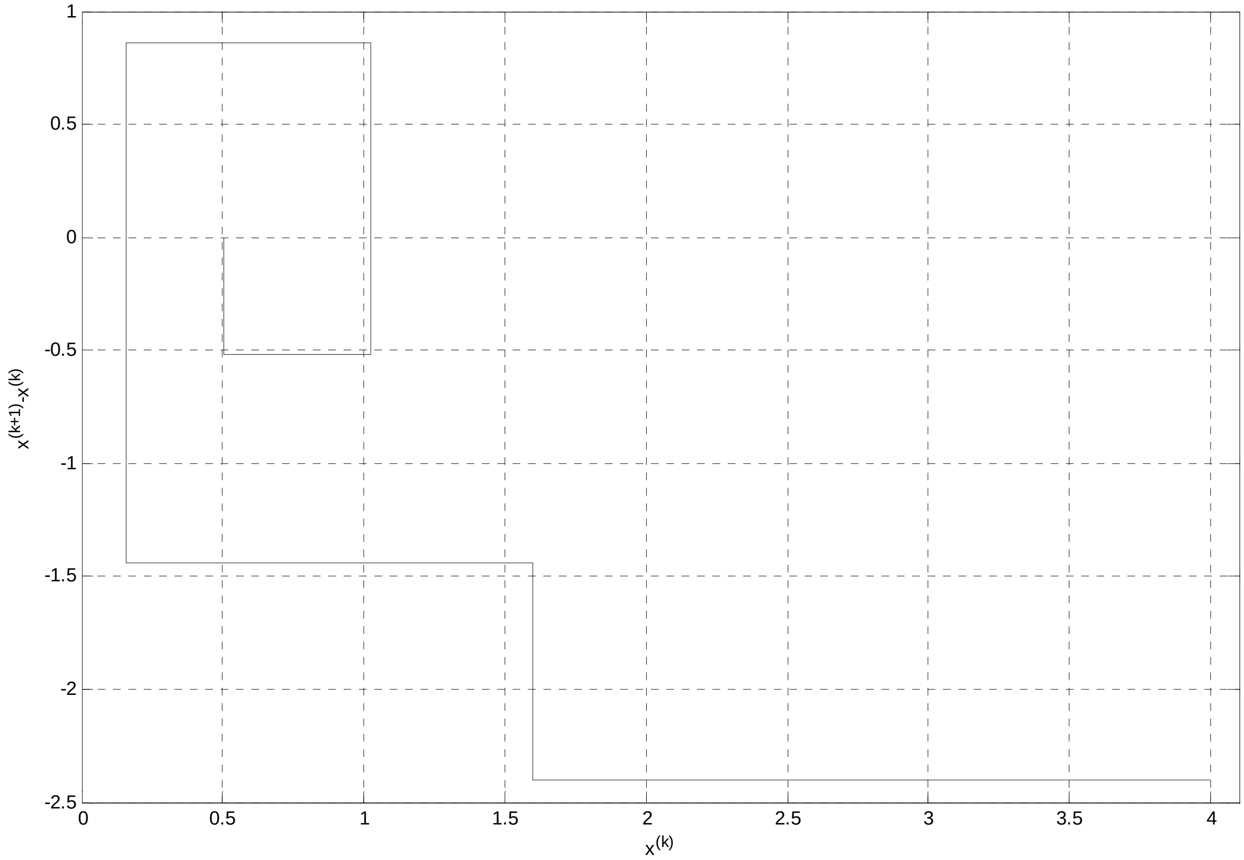

Рис. 2. Фазова крива траєкторії зсуву $x^{(k)}$

Висновки

У статті проаналізовано динаміку дискретизованих сигналів математичної моделі нейронної схеми типу “K-winners-take-all”. Схема придатна для обробки будь-яких неоднакових сигналів із скінченними значеннями і володіє властивістю збереження впорядкування сигналів. Отримано оцінки для кількості ітерацій до досягнення збіжності пошукового процесу до встановленого режиму.

1. Bihn L.N., Chong H.C. A neural-network contention controller for packet switching networks, IEEE Trans. on Neural Networks 6 (1995) 1402-1410. 2. David H.A. Order Statistics, 2nd ed. (New York: Wiley, 1980). 3. Hu X., Wang J. An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k-winners-take-all application, IEEE Trans. on Neural Networks, 19 (2008) 2022-2031. 4. Kwon T.M., Zervakis M. A parallel sorting network without comparators: A neural-network approach, in: Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. 1 (1992) 701–706. 5. Lippmann R.P., Gold B., Malpass M.L. A comparison of Hamming and Hopfield neural nets for pattern classification, MIT Lincoln Laboratory Technical report TR-769 (1987) 1-37. 6. Liu S., Wang J.A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application, IEEE Trans. on Neural Networks, 17 (2006) 1500-1510. 7. Tymoshchuk P., Kaszkurewicz E. A Winner-take-all circuit based on second order Hopfield neural networks as building blocks, in: Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. II (2003) 891-896. 8. Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A winner-take-all circuit using neural networks as building blocks, Neurocomputing 64 (2005) 375-396. 9. Urahama K., Nagao T. K-Winner-take-all circuit with 0(n) complexity, IEEE Trans. on Neural Networks 6 (1995) 776-778. 10. Yang J.F, Chen C.M. A Dynamic K-Winners-Take-All Neural Network, IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb. 27 (1997) 523–526. 11. Yen J.C., Guo J.I., Chen H.-C. A new k*-Winners-take all neural network and its array architecture, IEEE Trans. on Neural Networks 9 (1998) 901-912.*