УДК 004.942

Ю.О. Верес
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

РОЗПОДІЛ ОБМЕЖЕНИХ РЕСУРСІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Досліджено застосування апарату теорії нечітких множин у розподілі обмежених ресурсів в середовищі із нечіткостями та невизначеностями. Розглянуто прямі механізми розподілу обмежених ресурсів; механізми розподілу обмежених ресурсів в умовах невизначеності. Описано формальну модель розподілу обмеженого ресурсу в умовах невизначеності. Розглянуто різні варіанти обмежень, накладених на ресурс.
Ключові слова: методи розподілу, ресурс, нечіткість.

In the paper are analyzed the use of fuzzy sets theory in the distribution of scarce resources in an environment of uncertainty. The direct mechanisms of distribution of scarce resources, mechanisms for distribution of scarce resources under uncertainty. We describe the formal model of allocation scarce resources under uncertainty. Different versions of the restrictions imposed on resource.
Keywords: methods of division, resource, fuzzy.

Постановка проблеми

Прикладні дослідження останніх років показали, що звичайні методи аналізу систем і моделювання із використанням сучасної обчислювальної техніки, що ґрунтуються на точному опрацюванні числових даних, по суті, неспроможні охопити велику складність процесів, котрі відбуваються в складних системах. Це призводить до того, що для отримання змістовних висновків про їхню динаміку потрібно відмовитися від традиційних вимог до точності вимірювання, які були необхідні для математичного аналізу чітко визначених механічних систем. Тому треба розглянути розподіл обмежених ресурсів у складних системах в умовах нечіткостей та невизначеностей [2].

Аналіз останніх досліджень

Серед питань, що вирішуються під час розроблення систем підтримання прийняття рішень, задача побудови адекватної моделі планування і вибору прийнятних алгоритмів розв’язання є однією з найважливіших і найскладніших. Важливість цього питання ґрунтується на тому факті, що від правильної побудови моделі та вибору ефективного алгоритму розв’язку задачі планування залежить нормальне функціонування системи [2].

Наприклад, планування виробничої програми промислового підприємства здійснюється, як правило, в умовах неточної початкової інформації, коли деякі системні параметри визначаються недостатньо точно, що породжує невизначеність умов планування. Часто цю невизначеність не можна розглядати як стохастичне явище, оскільки відсутні стохастичні параметри і вона може характеризуватися швидше нечіткими категоріями, котрі залежать від кількості та якості ресурсу, термінів його постачання; функціонування технологічних налаштувань; термінів початку і завершення ремонтних робіт; втрат продуктів, неточності давачів тощо [2].

Отже, необхідно звернутися до теорії нечітких множин для розв’язання задач планування та розподілу обмежених ресурсів. Нині накопичено певний досвід [9–20], в якому можна виділити два напрями: застосування нечіткої логіки [5, 7, 10, 11, 20] застосування нечіткого лінійного програмування [2, 6, 8–10, 12–19].

Дамо визначення основних понять, що належать до теорії нечітких множин. Під поняттям "множина" розуміють сукупність елементів, що володіють деякою загальною властивістю. При цьому будь-який елемент заздалегідь аксіоматично або належить до цієї множини, або не належить. Проте, як довела практика прикладних досліджень, такий "булевий" принцип здебільшого не відповідає процесам, що відбуваються в реальних складних системах, тобто призводить до неправильної ідеалізації математичного опису таких систем. Інакше кажучи, мова звичайних множин виявляється недостатньо гнучкою для формалізації елементів невизначеності, властивих реальним системам [2].

Поняття нечіткої множини ґрунтується на твердженні про те, що будь-який елемент лише до деякої міри належить цій множині, тому одним із основних способів математичного опису нечіткої множини є визначення ступеня такої належності деяким числом, наприклад, із інтервалу [0,1]. Межі інтервалу, тобто 1 і 0, означають, відповідно, "належить" і "не належить" [2].

Нехай U – деяка множина (у звичайному розумінні) елементів. Нечіткою множиною $A \subseteq U$ називають сукупність пар виду $(u, m_A(u))$, де $u \in U : m_A(u) : U \to [0,1]$ (інколи $m_A(u) : U \to L$, - структура типу решітки) – функція, яку називають функцією приналежності (ФН) [2].

Звичайні множини утворюють підклас класу нечітких множин, тобто функцією приналежності для звичайної множини $B \subset U$ є характеристична функція

$$m_B(u) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } u \in B; \\ 0, & \textit{якщо } u \notin B \end{cases}. \tag{1}$$

Нечітку множину називають порожньою, якщо її функція приналежності дорівнює нулю на всій множині U, тобто

$$m_{\varnothing}(u) = 0,\ \forall u \in U. \tag{2}$$

Універсальну множину U можна описати функцією приналежності вигляду

$$m_U(U) = 1,\ \forall u \in U. \tag{3}$$

Носієм нечіткої множини $A(\operatorname{supp} A)$ з функцією приналежності $m_A(u)$ називають множину вигляду

$$\operatorname{supp} A = \{u / u \in U, m_A(u) > 0\}. \tag{4}$$

Нечітку множину A називають нормальною, якщо виконується рівність $\sup m_A(u) = 1$, тобто верхня границя функції приналежності дорівнює 1 [2]. У протилежному випадку нечітку множину називають субнормальною. Нечітким синглтоном називають нечітку множину, носієм якої є єдина точка із множини U, тобто будь-яку нечітку множину A можна розглядати як об'єднання одноточкових множин синглтонів, яка визначається загалом так

$$A = \int_U m_A(u)/u,\ \forall u \in U, \tag{5}$$

а за скінченної кількості елементів – сумою

$$A = m_1/u_1 + m_2/u_2 + \ldots + m_n/u_n = \sum_{i=1}^{n} m_i/u_i. \tag{6}$$

Якщо функції приналежності двох нечітких множин A і B із U рівні, то A і B – рівні нечіткі множини, тобто якщо $m_A(u) = m_B(u)$, то $A = B$ [2].

Над нечіткими множинами виконують ті самі операції, що і над звичайними, а також операції, введені для використання нечітких множин в математичному апараті прийняття рішень. Операції над нечіткими множинами, такі, наприклад, як об'єднання і перетин, можна визначити різними способами. Вибір конкретного із них залежить від специфікації задачі, тобто від конкретного змісту, вкладеного в ці операції [2].

Об'єднанням нечітких множин A і B із U називають нечітку множину вигляду

$$A \cup B \triangleq \int_U \left(m_A(u) \vee m_B(u)\right)/u, \ \ u \in U, \tag{7}$$

де $m_A(u) \vee m_B(u) = \max\left(m_A(u), m_B(u)\right)$.

Перетином нечітких множин A і B у U називають нечітку множину вигляду

$$A \cap B \triangleq \int_U \left(m_A(u) \wedge m_B(u)\right)/u, \tag{8}$$

де $m_A(u) \wedge m_B(u) = \min\left(m_A(u), m_B(u)\right), u \in U$.

Доповненням або запереченням нечіткої множини A називають нечітку множину вигляду

$$\neg A \triangleq \int_U \left(1 - m_A(u)\right)/u, \ u \in U. \tag{9}$$

Концентрування нечіткої множини A із U, що здійснює обмеження кількості елементів множини, визначають у вигляді

$$CON(A) \triangleq \int_U \left(m_A(u)\right)^2/u, \ u \in U. \tag{10}$$

Розтягнення нечіткої множини A із U, що здійснює збільшення кількості елементів множини, визначають у вигляді [2]

$$DIL(A) \triangleq \int_U \left(m_A(u)\right)^{0,5}/u, \ u \in U. \tag{11}$$

Розглянемо тепер основні методики, за допомогою яких здійснюється розподіл обмежених ресурсів. Одним із найпоширеніших механізмів розподілу обмежених ресурсів є конкурсні механізми. Загальна ідея будь-якого конкурсу така: претенденти упорядковуються на підставі інформації (яка може бути об'єктивною або такою, що повідомляється самими претендентами), наданої про них, потім переможцем (або переможцями) оголошується претендент, що зайняв перше місце (або, відповідно, декілька перших місць – залежно від умов конкурсу). Задача, що виникає при цьому, полягає в тому, що учасники конкурсу, щоб стати переможцями, можуть маніпулювати процесом розподілу, повідомляючи спотворену інформацію.

Розрізняють дискретні та неперервні конкурси. У першому випадку претендентові потрібна певна кількість ресурсу і будь-яка менша кількість ресурсу його не задовольняє – приводить до нульового ефекту (наприклад, не дає змоги реалізувати проект, випустити виріб тощо). У разі ж неперервних конкурсів претендент, отримуючи ресурс в кількості, меншій від заявленої, може одержати ефект, відмінний від нуля. Прикладом такої ситуації є пропорційна залежність між ефектом і ресурсом (ефективність постійна).

Цілі статті

Завданням написання статті є розгляд основних методик розподілу обмежених ресурсів у складних системах в умовах невизначеності. Розгляд моделей розподілу обмежених ресурсів за нечітких вхідних даних.

Основний матеріал

Перш ніж розглядати механізми розподілу обмежених ресурсів в умовах невизначеності, розглянемо основні результати синтезу еквівалентних прямих механізмів. Нехай є множина $I = \{1, 2, ..., n\}$ активних елементів, що характеризуються однопіковими функціями переваги:

$$j_i(x_i, r_i), \ \ i \in I, \tag{12}$$

де x_i – кількість ресурсу, що отримує i-й АЕ (активний елемент); r_i – точка піка (параметр функції переваги - значення аргументу, за якого досягається глобальний максимум).

Кількість ресурсу, що одержує i-й АЕ, визначається відповідно до процедури планування (процедури, принципу, механізму розподілу ресурсу):

$$x_i = p_i(s, R) \geq 0,\ i \in I \tag{13}$$

де R – кількість ресурсу, яку необхідно розподілити, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ – повідомлення (заявки) елементів. Припускатимемо, що $s_i \in \Omega_i$, де $\Omega_i = [0, D_i] \subseteq R_1,\ 0 < D_1 < +\infty,\ i \in I,\ s \in \Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ [1].

Під час розгляду механізмів розподілу обмежених ресурсів вводиться гіпотеза дефіцитності: $\sum_{i=1}^{n} r_i > R$, яку ми вважатимемо виконаною у ході подальшого викладу.

Нижче ми переважно обмежимося розглядом анонімних механізмів, в яких функції $p_i(\cdot, R)$ неперервні та симетричні щодо заявок елементів, а всі обмеження $\{D_i\}$ однакові та дорівнюють D. Припустимо також, що $p_i(\cdot, R)$ зростає по s_i; і R і спадає по $s_j,\ j \neq i$, а механізм володіє такими властивостями [1]:

1. Весь ресурс розподіляється повністю, тобто $\forall s \in \Omega \ \sum_{i=1}^{n} x_i = R.$

2. Якщо сумарна кількість ресурсу R збільшується, то кожен АЕ отримує не меншу кількість ресурсу.

3. Якщо АЕ отримує деяку кількість ресурсу, то він завжди може одержати будь-яку меншу його кількість (для виконання цієї властивості достатньо, наприклад, поставити умову, щоб ресурс був подільний у довільних пропорціях і $\forall s_{-i} \in \Omega_{-i}\ p(0, s_{-i}, R) = 0$, де $s_{-i} = (s_1, s_1, ..., s_1, s_1, ..., s_1),\ \Omega_{-i} = \prod_{j \neq i} \Omega_j$ [1].

Для будь-якого механізму з цього класу механізмів розподілу ресурсу існує механізм відкритого управління не меншої ефективності. Інакше кажучи, існує прямий (механізм, в якому всі АЕ безпосередньо повідомляють параметри функції переваги) неманіпульовний механізм (у якому повідомлення достовірної інформації – рівновага Неша для елементів), в якому всі АЕ отримують ту саму кількість ресурсу, що і в початковому механізмі [1].

Нагадаємо, що для пошуку еквівалентного прямого механізму використовується такий алгоритм [1]:

- нехай всі АЕ повідомили $s_i = D,\ i \in I$;
- ті АЕ, для яких одержувана за цих заявок кількість ресурсу перевищує оптимальне значення, оголошуються переможцями і отримують рівно оптимальну для себе кількість ресурсу;
- ресурс, що залишився, аналогічно розподіляється між тими АЕ, котрі програли, з’являються нові переможці і т.д.

Легко бачити, що при використанні цього алгоритму елементам вигідно повідомляти достовірну інформацію [1].

Перейдемо тепер до розгляду механізмів розподілу ресурсу в умовах невизначеності. На практиці частою є ситуація, в якій спочатку розробляються механізми розподілу однієї кількості ресурсу, а потім виявляється, що розподіляти доведеться іншу (на жаль, як правило, меншу) кількість. Тому досліджуємо, як „працюють” механізми розподілу ресурсу в умовах апріорної невизначеності щодо сумарної кількості ресурсу, яку доведеться розподіляти; які рівнозважені заявки елементів; наскільки відомі процедури стійкі до змін величини R [1].

Розглянемо формальну модель. Вважатимемо, що на момент вибору стратегій і центр, і активні елементи симетрично інформовані або тільки щодо множини можливих майбутніх значень кількості ресурсу

$$\Re = \{R_1, R_2, ..., R_m\} \tag{14}$$

(для простоти вважатимемо, що $R_1 \leq R_2 \leq ... \leq R_m$), або щодо множини $\Re$ і вірогідність реалізації відповідних значень [1]:

$$\wp = (p_1, p_2, ..., p_m), \tag{15}$$

$$p_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{16}$$

Послідовність функціонування активної системи така [1]:

- центр оголошує АЕ процедуру розподілу $p(s,\cdot)$;

- знаючи свої функції переваги і допустимі множини, елементи вибирають стратегії і повідомляють їх центру;

- стає відомою кількість ресурсу;

- ресурс розподіляється відповідно до оголошеної процедури і повідомлених заявок.

Для визначення рівнозважених стратегій активних елементів необхідно ввести принцип раціонального вибору. Вважатимемо, що коли спостерігається “інтервальна” невизначеність – елементам відома тільки множина $\Re$, то вони використовують принцип максимального гарантованого результату (МГР) [1].

У разі вірогіднісної невизначеності (якщо елементам додатково відомий розподіл вірогідності) вважатимемо, що АЕ, вибираючи стратегію максимізують очікувані значення своїх функцій переваги [1]:

$$f_i\left(p(\cdot), r_i, \Re, \wp\right) = \sum_{j=1}^{m} j_i\left(p_i\left(s, R_j\right), r_i\right) p_j. \tag{17}$$

Визначимо рівновагу Неша $s^* \in \Omega : \forall i \in I,\ \forall s_i \in \Omega_i$

$$\sum_{j=1}^{m} j_i\left(p_i\left(s_i^*, s_{-i}^*, R_j\right), r_i\right) p_j \geq \sum_{j=1}^{m} j_i\left(p_i\left(s_i, s_{-i}^*, R_j\right), r_i\right) p_j. \tag{18}$$

Очевидно, що якщо всі $\{r_i\}$ достатньо великі (у окремому випадку, якщо всі j_i – строго монотонно зростаючі функції), а всі $\{R_j\}$ обмежені, то домінантною стратегією АЕ є повідомлення максимальних заявок. Цей достатньо тривіальний висновок справедливий і для відповідних систем з інтервальною невизначеністю.

Цікавішим є випадок, коли за різних значень R різна кількість АЕ отримує оптимальну кількість ресурсу. Проте цей випадок набагато важче аналізувати, особливо за великих n і m [1].

Один із варіантів – використовувати класичні результати дослідження механізмів розподілу ресурсу в детермінованих активних системах. Наприклад, знайшовши рівнозважені стратегії АЕ для кожного із значень $R_j \in \Re$, оголосити, що в імовірнісній системі рівнозваженою буде стратегія, отримана із “детермінованих” усередненням по $\wp$. Або, наприклад, обчислити очікуване значення кількості ресурсу і далі розв’язувати детерміновану задачу. Очевидно, що жоден з цих методів у загальному випадку не є правильним. Але все-таки використовувати результати аналізу детермінованої задачі можна і потрібно, але обережніше. Тому зробимо невеликий відступ і звернемося до аналізу детермінованої задачі [1].

Упорядкуємо всі АЕ за збільшенням точок піка:

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \ldots \leq r_n. \tag{19}$$

Як наголошувалося вище, механізмом послідовного розподілу ресурсу (витрат) називається такий механізм, в якому елементи упорядковуються за зростанням (спаданням) заявок (доходу, видатків, ефективності тощо), потім ресурс, який дорівнює заявці першого АЕ, виділяється всім АЕ, далі перший елемент вилучається з розгляду і ресурс, що залишився, розподіляється між рештою елементів тощо [1, 4].

Розглянемо динамічний аналог механізмів послідовного розподілу [4]. Нехай e – кількість ресурсу, що продукується за одиницю часу. У кожен момент часу ресурс ділиться порівну між всіма АЕ, поточна кількість ресурсу яких менша від оптимальної. У інтервалі від $t = 0$ до $t = t_1$ де $t_1 = r_1 \cdot n/e$, всі АЕ отримують в одиницю часу по e/n. У момент часу t_1 кількість ресурсу, накопичена першим елементом, дорівнює $x_1(t_1) = r_1$. Якщо $t \in (t_1, t_2]$, ресурс розподіляється між всіма елементами, окрім першого. Тоді

$$x_2(t) = \begin{cases} et/n, \, t \le t_1, \\ (et_1/n) + e(t - t_1)/(n-1), \, t \in [t_1, t_2], \\ r_2, \, t \ge t_2 \end{cases} \tag{20}$$

де $t_2 = t_1 + (r_2 - r_1) \cdot (n-1)/e$, і т. д. [1].

Легко бачити, що час, через який i-й АЕ отримає оптимальну для себе кількість ресурсу, визначається виразом [1]:

$$t_i = \frac{w_i}{e}, \, i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Обмеженість розподілюваного ресурсу відповідає у цій динамічній моделі обмеженості часу. Якщо припустити, що $t \le T$, то за час T встигнуть одержати ресурс в необхідній кількості перші $k(T)$ елементів, де k визначається з умови: $t_k \le T < t_{k+1}$ або, що те саме, $w_k \le eT \le w_{k+1}$. Позначивши $eT = R$, отримуємо $k = q(R)$ [1].

Висновки

У статті досліджено застосування апарату теорії нечітких множин у розподілі обмежених ресурсів у середовищі із нечіткостями та невизначеностями. Розглянуто прямі механізми розподілу обмежених ресурсів; механізми розподілу обмежених ресурсів в умовах невизначеності. Описано формальну модель розподілу обмеженого ресурсу в умовах невизначеності. Розглянуто модель послідовного розподілу обмеженого ресурсу. Описано динамічний аналог механізму послідовного розподілу. Розглянуто різні варіанти обмежень, накладених на ресурс.

Наукові дослідження останніх років показали, що звичайні методи аналізу систем і моделювання із використанням сучасної обчислювальної техніки, що ґрунтуються на точному опрацюванні числових даних, не можуть якісно описати процеси розподілу обмежених ресурсів, що відбуваються у складних системах. Це призводить до того, що для отримання ґрунтовних даних про їх динаміку потрібно відмовитися від традиційних вимог до точності вимірювання, які були необхідні при математичному аналізі чітко визначених механічних систем та необхідно звернутися до методів розподілу обмежених ресурсів в умовах із нечіткою та неповною інформацією.

Доведено, що для будь-якого анонімного механізму розподілу обмеженого ресурсу існує механізм відкритого управління не меншої ефективності. Інакше кажучи, існує прямий (механізм, в якому всі споживачі безпосередньо повідомляють параметри функції переваги) неманіпульовний механізм, в якому всі споживачі отримують ту саму кількість ресурсу, що і в початковому механізмі.

Подальші дослідження будуть спрямовані на вивчення розподілу обмежених ресурсів у виробничих фірмах.

1. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике ПРЕПРИНТ / [Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С]. – М. 1996. 2. Алиев Р.А. Управление производством при нечеткой исходной информации / Р.А. Алиев, А.Э. Церковный, Г.А. Мамедова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 240 с. 3. Иващенко А.А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы / А.А. Иващенко, Д.В. Колобов, Д.А. Новиков. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 66 с. 4. Serial cost sharing / Moulin H., Shenker S. // Econometrica, 1992. Vol. 60. № 5. P. 1009–1037. 5. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. 6. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. 7. Шапиро Д.И. Принятие решений в системах организационного управления: использование расплывчатых категорий. – М.: Энергоатомиздат, 1983. 8. Негойце К. Применение *теории систем к проблемам управления. – М.: Мир, 1981. 9. Капустин В.Ф. Прямое и обратное размытие оптимизационных линейных моделей // Применение математики в экономике. 1982. – С. 205–211. 10. Мельцер М.И. Диалоговое управление производством. М.: Финансы и статистика, 1983. 11. Fuzzy methodologies for interactive multicriteria optimization // S.S.L. Chang, A. Olerra. IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern. 1980. Vol. SMC-10. N 7. P. 355–365. 12. On fuzzy mapping and control // S.S.L. Chang, L.A. Zadeh. IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. SMC-2, 1. P. 30-34, 1972. 13. Leberling H. On finding compromise solution in multicriteria problems using the fuzzy min-operator // Fuzzy Sets and Systems. 1981. N 6. P. 105-118. 14. Fuzzy linear programming based on fuzzy functions // H. Tanaka, K. Asai. Bulletin of Univ. of Osaka pref. 1980. A29. № 2. P. 113–125. 15. Язенин А.В. Нечеткое математическое программирование. – Калинин: КГУ, 1986. 16. Sakawa M. Interactive computer programs for fuzzy linear programming with multiple objectives // Int. J. Man-Machine Studies. 1983. – № 18. P. 483–503. 17. Luhandjula M.K. Compensatory operators in fuzzy linear programming with multiple objectives // Int. J. Man-Machine Studies. 1982. № 10. P. 245–252. 18. Carlsson C. Tackling MCDM-problem with the help of some results from fuzzy set theory // Eur. J. Oper. Research. 1982. № 10. P. 270–281. 19. Membership functions, some mathematical programming models and production schelduling // V. Dumitru, F. Luban. Fuzzy Sets and Systems. 1982. № 8. P. 19–33. 20. Long-term inventory policymacking through fuzzy decision-making models // J. Kacprzyk, P. Staniewski. Fuzzy Sets and Systems. 1982. № 8. P. 117–132.*