

РОЗПІЗНАВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У ПІВПРОСТОРИ ДЛЯ КВАЗІСТАЦІОНАРНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ СТАНОВЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Ї Журавчак Л.М., Забродська Н., 2010

Розглянуто математичне моделювання процесу становлення електромагнітного поля (ЕМП) у кусково-однорідному півпросторі. Знайдено в часовій області компоненти векторів напруженостей електричної та магнітної його складових для квазістаціонарної моделі без введення потенціалів електричного чи магнітного типів. За допомогою методу приграничних елементів досліджено вплив включення з вищою, ніж середовище, електропровідністю на розподіл ЕМП на денній поверхні та показано способи розпізнавання його геометричних та електромагнітних характеристик.

Ключові слова: становлення електромагнітного поля, методи граничних та приграничних елементів, кусково-однорідний півпростір.

The mathematical modeling of process quasi-stationary approximation of electromagnetic field in a piecewise-homogeneous half-space is modelled. Using the fundamental solution of non-stationary equation of heat conductivity and boundary or near-boundary element techniques, we construct the integral representations to find the electromagnetic field strength vector components in an arbitrary space-time point. Influence of inclusion in a half-space on distribution electromagnetic field is investigated and shown discernment ways of its geometrical and electromagnetic characteristics.

Key words: electromagnetic field, boundary and near-boundary element techniques, a piecewise-homogeneous half-space.

Вступ

Електромагнітні (ЕМ) методи досліджень у різних прикладних галузях математичної фізики, зокрема в пошуковій геофізиці, ґрунтуються на використанні змінного ЕМП, яке проникає в середину об'єкта, і вивченні розподілу електропровідності в тілі за вимірними на його граничній поверхні характеристиками. У добре провідному і сильно диспергованому середовищі ЕМ збурення поширюється за законом дифузії подібно до тепла від нагрітого джерела. Найбільші втрати переважно за рахунок переходу ЕМ енергії в теплову відбуваються в провідних середовищах під час протікання струмів низької частоти. Цей випадок типовий для електророзвідки, оскільки до частот близько десятків тисяч герц у більшості гірських порід головну роль відіграють струми провідності, а значення струмів зміщення дуже мале [1].

Останніми роками у зв'язку з практично назрілою проблемою підвищення детальності досліджень, які ґрунтуються на використанні штучних ЕМ полів, значно зріс інтерес до вивчення перехідних процесів у ближній зоні джерела їх збудження. Процес поширення в тілі ЕМП, збудженого імпульсом Хевісайда (режим роботи відповідає увімкненню або вимкненню постійного струму в живильному контурі і легкодоступний для реалізації на практиці), називають процесом становлення поля. Як відомо, спочатку після увімкнення (вимкнення) струму в тілі спостерігаються складні перехідні процеси, пов'язані з хвильовим характером поширення імпульсу в провідному середовищі, для доволі великих часів поле встановлюється, тобто збігається з полем постійного струму, а в середньому діапазоні, враховуючи дифузійний характер поширення імпульсу в провідному середовищі, можна розглядати квазістаціонарну модель ЕМП [2, 3].

Переважно для розрахунку неусталеного поля використовують метод, оснований на спектральному аналізі цього поля у часовій області [3–5]. Такий підхід має давню традицію в фізиці й математиці і як проміжний етап передбачає звичний частотний режим, який сам по собі є робочим режимом деяких електромагнітних методів. За цим підходом імпульс увімкнення (вимкнення) та всі компоненти неусталеного поля джерела зображають у вигляді інтегралів Фур'є (оберненого перетворення Фур'є), тобто розглядають як інтегральні суми гармонічних струмів з комплексними амплітудами та векторами, що описують компоненти напруженості ЕМП, для змінних від $-\infty$ до $+\infty$ частот. Це дає змогу розраховувати неусталене ЕМП, користуючись добре розвинутою теорією гармонічно змінних у часі полів. За допомогою спектрального підходу досліджено широкий клас двовимірних магнітотелуричних задач, коли зовнішнє поле задавалось у вигляді однорідного магнітного поля або плоскої однорідної хвилі. Деякі двовимірні та тривимірні горизонтально-шаруваті моделі, які містять локальні геометричні неоднорідності, в неоднорідному зовнішньому полі, збудженому штучним джерелом, досліджувались методами інтегральних рівнянь [6, 7] та скінченних різниць [8, 9]. Найзначнішими числовими реалізаціями цього підходу стали програма Л.А. Табаровського зі співавторами [10], в якій використовувалась під час інтегрування сплайн-інтерполяція, і програми В.Л. Андерсона, в яких він застосував свій метод цифрової фільтрації [11, 12].

Однак числові алгоритми оберненого перетворення Фур'є внаслідок осцилювання підінтегральних функцій та необхідності розгляду широкого спектра частот є доволі громіздкими, що привело до вивчення асимптотичної поведінки неусталених ЕМ полів [13]. Окрім того, ці алгоритми мають істотні обмеження при розгляді імпульсів скінченної тривалості та щодо умов абсолютної інтегрованості. На основі такого підходу доволі важко проаналізувати особливості становлення поля різних джерел, особливо у середовищах з основою-ізолятором.

Вказані причини спонукали деяких дослідників для вивчення ЕМ зондувань за імпульсного збудження живильного струму використати операційний [14] та кінематичний [15] методи. Перший з них полягає у застосуванні прямого перетворення Лапласа за часовою змінною без визначення відповідного оригіналу та побудові обчислювальних процедур для типових моделей горизонтально-шаруватих геоелектричних структур, враховуючи принципову інформаційну еквівалентність натурних часових процесів та їх операційних зображень Лапласа. Другий метод особливо ефективний для провідних розрізів, електропровідність яких залежить тільки від глибини.

Існує інший підхід до розв'язування задачі становлення – “у часовій області”, запропонований у [2] для двошарового середовища, обмеженого зверху і знизу ізолятором, у квазістаціонарному наближенні. Там здійснюється перехід до розв'язування одновимірного нестационарного рівняння теплопровідності для векторного потенціалу за заданих граничних та початкових умов. На основі підходу Тихонова одержано асимптотичні вирази для пізніх стадій становлення поля різних джерел, а також числово реалізовано багат шаровий алгоритм для розрахунків процесів становлення електричного і магнітного типів у разі збудження різними джерелами [16].

У статтях [17, 18] розглянуто квазістаціонарну математичну модель процесу становлення ЕМП у провідному півпросторі, який містить нафто- і газоносні включення довільної форми, та досліджено їхній взаємний вплив на розподіл ЕМП на денній поверхні. У цій статті за допомогою методу приграничних елементів [19] досліджено вплив провідного покладу на ЕМП на денній поверхні та показано способи розпізнавання його електромагнітних і геометричних характеристик.

Математична модель знаходження компонент ЕМП

Розглянемо кусково-однорідний півпростір, що займає область $\Omega = R^{3-} = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < 0\}$ у декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 і містить $M-1$ включень Ω_m ($m = 2, \dots, M$), які перебувають в ідеальному електромагнітному контакті з середовищем $\Omega_1 = \Omega \setminus \bigcup_{m=2}^M (\Omega_m \cup \partial\Omega_m)$, причому $\partial\Omega_m \cap \Gamma = \emptyset$, $\partial\Omega_m$ – гранична поверхня зони Ω_m , $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = 0\}$ – денна поверхня півпростору. Середовище і

включення характеризуються постійними електропровідностями σ_1, σ_m і магнітними проникностями μ_1, μ_m відповідно. На денній поверхні півпростору задано нульовий розподіл компонент вектора напруженості електричного поля (ЕП):

$$E_i^{(1)}(x, \tau) = 0, (x, \tau) \in \Gamma \times T, \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$, τ – час, $T = \{\tau: 0 < \tau < \infty\}$.

Джерелом, яке збурювало ЕМП, враховуючи широке застосування чисто індуктивного способу збудження, є прямокутна рамка C , розміщена горизонтально на глибині h_3 у півпросторі. Залежність сили струму в рамці змінювалась синхронно і описувалась функцією $\mathbf{\Psi}(x, \tau) = (\Psi_1(x, \tau), \Psi_2(x, \tau), \Psi_3(x, \tau))$, $\Psi_i(x, \tau) = l(\tau)C_i(x)$, де $l(\tau)$ – закон одиничного ступеня, який відповідає увімкненню джерела постійного струму в момент часу $\tau = 0$, $C_i(x)$ – проекції одиничного вектора, колінеарного дотичній до контуру C в точці $x \in C$. Допущення синхронності зміни струму в кожній точці джерела є фізично коректним на всьому часовому діапазоні, окрім надраних часів, коли необхідно враховувати струми зміщення і скінченну швидкість поширення. У початковий момент часу спостерігається нульовий розподіл напруженості ЕП у середовищі й включеннях:

$$E_i^{(s)}(x, 0) = 0, x \in \Omega_s, s = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Рівняння Максвелла для кусково-однорідного тіла, в якому діють сторонні струми, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H}^{(1)}(x, \tau) &= \sigma_1 \mathbf{E}^{(1)}(x, \tau) + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} + \mathbf{\Psi}(x, \tau), \\ \text{rot} \mathbf{H}^{(m)}(x, \tau) &= \sigma_m \mathbf{E}^{(m)}(x, \tau) + \varepsilon_m \frac{\partial \mathbf{E}^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau}, m = 2 \dots M, \\ \text{rot} \mathbf{E}^{(s)}(x, \tau) &= -\mu_s \frac{\partial \mathbf{H}^{(s)}(x, \tau)}{\partial \tau}, \text{div} \mathbf{E}^{(s)}(x, \tau) = 0, \text{div} \mathbf{H}^{(s)}(x, \tau) = 0, s = 1 \dots M, \end{aligned} \quad (3)$$

де ε_s – діелектрична проникність середовища в Ω_s ; $\mathbf{H}^{(s)}(x, \tau)$ – вектор напруженості магнітного поля в Ω_s .

Перетворивши рівняння (3) так, щоб одержати окремі рівняння для компонент вектора напруженості ЕП $E_i^{(1)}(x, \tau)$ ($i=1,2,3$) у середовищі і $E_i^{(m)}(x, \tau)$ у включеннях, матимемо систему телеграфних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta E_i^{(1)}(x, \tau) - \sigma_1 \mu_1 \frac{\partial E_i^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} - \mu_1 \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_i^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau^2} &= \mu_1 \frac{\partial \Psi_i(x, \tau)}{\partial \tau}, (x, \tau) \in \Omega_1 \times T, \\ \Delta E_i^{(m)}(x, \tau) - \sigma_m \mu_m \frac{\partial E_i^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau} - \mu_m \varepsilon_m \frac{\partial^2 E_i^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0, (x, \tau) \in \Omega_m \times T. \end{aligned} \quad (4)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Розглянемо квазістационарну модель ЕМП, коли воно повільно змінюється в часі так, що в рівняннях (4) можна знехтувати другою похідною за часом (або, що те саме, струмами зміщення) порівняно з першою. Тоді початково-крайова задача для визначення невідомих $E_i^{(s)}(x, \tau)$ складається з рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta E_i^{(1)}(x, \tau) - \sigma_1 \mu_1 \frac{\partial E_i^{(1)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= \mu_1 \frac{\partial \Psi_i(x, \tau)}{\partial \tau}, (x, \tau) \in \Omega_1 \times T, \\ \Delta E_i^{(m)}(x, \tau) - \sigma_m \mu_m \frac{\partial E_i^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= 0, (x, \tau) \in \Omega_m \times T, \end{aligned} \quad (5)$$

граничних і початкових умов (1), (2), доповнених умовами ідеального електромагнітного контакту, які внаслідок відсутності вертикальної компоненти ЕП мають вигляд:

$$E_k^{(1)}(x, \tau) = E_k^{(s)}(x, \tau), \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_k^{(m)}}{\partial x_3} = \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial E_k^{(s)}}{\partial x_3}, (x, \tau) \in \partial \Omega_m \times T, k = 1, 2. \quad (6)$$

Методика розв'язування. Інтегральне зображення розв'язку

Для знаходження розв'язків задачі (5), (1), (2), (6) використаємо непрямі методи граничних (НМГЕ) [20] та приграничних елементів (НМПГЕ) [19]. Уведемо множину $R^{3-}(M)$, складену з M просторів R^{3-} , кожен з яких надалі позначатимемо через R_s^{3-} , тобто $R^{3-}(M) = \cup_{s=1}^M R_s^{3-}$. Постулюватимемо, що $R^{3-}(M)$ володіє такими властивостями [19]: $R_s^{3-} \cap R^{3-} = \Omega_s \cup \partial\Omega_s$, $R^{3-}(M) \cap R^{3-} = \Omega \cup \Gamma$, $R_1^{3-} \cap R_m^{3-} = \partial\Omega_m$.

Для кожного s розв'язок $E_i^{(s)}(x, \tau)$ шукаємо в R_s^{3-} . З цією метою розглянемо області $B_s \subset R_s^{3-}$ такі, що $\Omega_s \subset B_s$, $\partial\Omega_m \cap \partial B_m = \emptyset$. У приграничних областях $G^s = B_s \setminus \Omega_s$ і на границях $\partial\Omega_{1m}, \partial\Omega_m$ введемо відповідно приграничні G_v^s та граничні Γ_v^s елементи такі, що $\Gamma_v^1 = \partial G_v^1 \cap \partial\Omega_{1m}$, $\Gamma_v^m = \partial G_v^m \cap \partial\Omega_m$ ($v=1, \dots, V_m$), з невідомими компонентами “фіктивних” джерел струму $\Phi_{iv}^s(x, \tau)$, причому $\gamma \in \{G, \Gamma\}$, $mes G_v^s = 3$, $\cup_{v=1}^{V_s} G_v^s = G$, $\cup_{v=1}^{V_1} \Gamma_v^1 = \cup_{m=2}^M \partial\Omega_{1m}$, $\cup_{v=1}^{V_m} \Gamma_v^m = \partial\Omega_m$, $\Gamma_v^s \cap \Gamma_w^s = \emptyset$ при $v \neq w$, $\partial\Omega_{1m}$ – межа контакту середовища Ω_1 з областю Ω_m .

Тоді замість рівнянь (5) для $x \in R_s^{3-}$ матимемо [21]

$$\begin{aligned} \Delta E_i^{(\gamma^1)}(x, \tau) - \sigma_1 \mu_1 \frac{\partial E_i^{(\gamma^1)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \sum_{v=1}^{V_1} \Phi_{iv}^1(x, \tau) \chi_v^{\gamma^1} + \mu_1 \frac{\partial \Psi_i(x, \tau)}{\partial \tau}, \quad (x, \tau) \in R_1^{3-} \times T, \\ \Delta E_i^{(\gamma^m)}(x, \tau) - \sigma_m \mu_m \frac{\partial E_i^{(\gamma^m)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \sum_{v=1}^{V_m} \Phi_{iv}^m(x, \tau) \chi_v^{\gamma^m}, \quad (x, \tau) \in R_m^{3-} \times T, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\chi_v^{\gamma^s}$ – характеристична функція елемента γ_v^s .

Використавши функцію Гріна $U_h^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4)$ нестационарного рівняння теплопровідності для R^{3-} , яка автоматично задовольняє граничну умову (1), запишемо інтегральні зображення розв'язку задачі (7), (1), (2), (5) для компонент електричного поля $E_i^{(\gamma^s)}(x, \tau)$:

$$E_i^{(\gamma^s)}(x, \tau) = \sum_{v=1}^{V_s} \int_0^\tau \int_{\gamma_v^s} U_h^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4) \Phi_{iv}^s(\xi, \xi_4) d\gamma_v^s(\xi) d\xi_4 - \delta_{1s} I_{ci}(x, \tau, \Phi_h^{(1)}), \quad (8)$$

а також одержані на їхній основі інтегральні зображення для похідних від цих компонент за координатами x_j та для зміни за часом компонент магнітного поля (МП) $\partial H_l^{(\gamma^s)}(x, \tau) / \partial \tau$:

$$\frac{\partial E_i^{(\gamma^s)}(x, \tau)}{\partial x_j} = \sum_{v=1}^{V_s} \int_0^\tau \int_{\gamma_v^s} Q_{hj}^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4) \Phi_{iv}^s(\xi, \xi_4) d\gamma_v^s(\xi) d\xi_4 - \delta_{1s} I_{ci}(x, \tau, Q_{hj}^{(1)}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_l^{(\gamma^s)}(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \frac{1}{\mu_s} \left(\frac{\partial E_j^{(\gamma^s)}}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i^{(\gamma^s)}}{\partial x_j} \right) = - \frac{1}{\mu_s} \sum_{v=1}^{V_s} \int_0^\tau \int_{\gamma_v^s} [Q_{hi}^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4) \Phi_{jv}^s(\xi, \xi_4) - Q_{hj}^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4) \Phi_{iv}^s(\xi, \xi_4)] d\gamma_v^s(\xi) d\xi_4 - \\ &\quad - \frac{\delta_{1s}}{\mu_1} [I_{cj}(x, \tau, Q_{hi}^{(1)}) - I_{ci}(x, \tau, Q_{hj}^{(1)})], \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$U_h^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4) = U_h^{(s)}(r, r', \tau, \xi_4) = U^{(s)}(r, \tau, \xi_4) - U^{(s)}(r', \tau, \xi_4), \quad y_i = x_i - \xi_i,$$

$$U^{(s)}(r, \tau, \xi_4) = \left[\frac{\sigma_s \mu_s}{4\pi(\tau - \xi_4)} \right]^{3/2} \exp\left\{ - \frac{\sigma_s \mu_s r^2}{4(\tau - \xi_4)} \right\}, \quad r'^2 = \sum_{i=1}^3 y_i'^2, \quad y_i' = x_i - \xi_i, \quad i=1, 2, \quad y_3' = x_3 + \xi_3,$$

$$Q_{ij}^{(s)}(x, \tau, \xi, \xi_4) = Q_{ij}^{(s)}(r, \tau, \xi_4) - Q_{ij}^{(s)}(r', \tau, \xi_4), \quad Q_{ij}^{(s)}(r, \tau, \xi_4) = - \frac{\sigma_s \mu_s}{2(\tau - \xi_4)} y_j \Phi_h^{(s)}(r, r', \tau, \xi_4),$$

$$I_{ci}(x, \tau, \Phi_h^{(1)}) = \frac{1}{\sigma_1} \int_0^\tau \int_C \Phi_h^{(1)}(x, \tau, \xi, \xi_4) \frac{\partial \Psi_i(\xi, \xi_4)}{\partial \tau} dC(\xi) d\xi_4 = \frac{1}{\sigma_1} \int_C \Phi_h^{(1)}(x, \tau, \xi, 0) C_i(\xi) dC(\xi),$$

$\Phi_h^{(1)} \in \{U_h^{(1)}, Q_{hj}^{(1)}\}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^{3-}$, $\xi_4 \in T$, між індексами j, i та l існує взаємозв'язок: для $l=1$ вибираємо $i=3, j=2$, для $l=2 - i=1, j=3$, для $l=3 - i=2, j=1$.

Просторово-часова дискретизація математичної моделі

Дискретно-континуальну модель ЕМП у кусково-однорідному провідному півпросторі побудуємо для покрокової часової схеми “єдиної початкової умови” (СЄПУ) [19, 20]. Для зручності опису залежності $\Phi_{iv}^{ys}(x, \tau)$ від часу часовий промінь T розділимо на інтервали $T_p =]\tau_{p-1}, \tau_p]$ ($p=1, 2, \dots, \tau_0=0$) і в межах кожного T_p ($p=1, \dots, P, P>1$) для спрощення алгоритму функції $\Phi_{iv}^{ys}(x, \tau)$ апроксимуємо невідомими константами d_{iv}^{ysp} . Щоб знайти її, використавши (8), (9), запишемо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), вимагаючи на кожному кроці за часом виконання в колокаційному сенсі умов ідеального контакту (6) в кінцевий момент часу τ_p відповідно в точках $x^{mw} \in \partial\Omega_m$ ($w=1, \dots, V_m$):

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{\gamma 1P}(x^{mw}, \tau_p, U_{h\tau}^{(1)}) d_{kv}^{\gamma 1P} - \sum_{v=1}^{V_m} A_v^{\gamma mP}(x^{mw}, \tau_p, U_{h\tau}^{(m)}) d_{kv}^{\gamma mP} = \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \bar{A}_v^{\gamma mP}(x^{mw}, \tau_p, U_{h\tau}^{(m)}) d_{kv}^{\gamma mP} - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_1} \bar{A}_v^{\gamma 1P}(x^{mw}, \tau_p, U_{h\tau}^{(1)}) d_{kv}^{\gamma 1P} - \delta_{ls} I_{ck}(x^{mw}, \tau_p, U_h^{(1)}), x^{mw} \in \partial\Omega_m, k=1, 2, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \sum_{v=1}^{V_1} A_v^{\gamma 1P}(x^{mw}, \tau_p, Q_{h\tau 3}^{(1)}) d_{kv}^{\gamma 1P} - \frac{1}{\mu_m} \sum_{v=1}^{V_m} A_v^{\gamma mP}(x^{mw}, \tau_p, Q_{h\tau 3}^{(m)}) d_{kv}^{\gamma mP} = \frac{1}{\mu_m} \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \bar{A}_v^{\gamma mP}(x^{mw}, \tau_p, Q_{h\tau 3}^{(m)}) d_{kv}^{\gamma mP} - \frac{1}{\mu_1} \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_1} \bar{A}_v^{\gamma 1P}(x^{mw}, \tau_p, Q_{h\tau 3}^{(1)}) d_{kv}^{\gamma 1P} - \frac{\delta_{lm}}{\mu_1} I_{ck}(x^{mw}, \tau_p, Q_{h\tau 3}^{(1)}), x^{mw} \in \partial\Omega_m. \quad (12)$$

де

$$A_v^{\gamma sp}(x, \tau, \Phi_{h\tau}^{(s)}) = \int_{\tau_{p-1} \gamma_v^s}^\tau \int_{\gamma_v^s} \Phi_h^{(s)}(r, r', \tau, \xi_4) d\gamma_v^s(\xi) d\xi_4 = \int_{\gamma_v^s} \Phi_{h\tau}^{(s)}(r, r', \tau, \beta_{p-1}) d\gamma_v^s(\xi),$$

$$\Phi_{h\tau}^{(s)}(r, r', \tau, \beta) = \Phi_{h\tau}^{(s)}(r, \tau, \beta) - \Phi_{h\tau}^{(s)}(r', \tau, \beta), \quad \beta_p = \frac{r}{2\sqrt{a(\tau - \tau_p)}}, \quad \beta_{p,p-1} = \frac{r}{2\sqrt{a(\tau_p - \tau_{p-1})}},$$

$$\bar{A}_v^{\gamma sp}(x, \tau, \Phi_{h\tau}^{(s)}) = \int_{\tau_{p-1} \gamma_v^s}^{\tau_p} \int_{\gamma_v^s} \Phi_h^{(s)}(r, r', \tau, \xi_4) d\gamma_v^s(\xi) d\xi_4 = \int_{\gamma_v^s} \Phi_{h\tau}^{(s)}(r, r', \tau, \beta_{p,p-1}) d\gamma_v^s(\xi), \quad \tau > \tau_p,$$

$$U_{h\tau}^{(s)}(r, r', \tau, \beta) = \frac{1}{4a\pi r} \operatorname{erfc}(\beta), \quad Q_{h\tau}^{(s)}(r, r', \tau, \beta) = \frac{\gamma_l}{2a\pi^{3/2} r^3} F(\beta, \infty), \quad \operatorname{erfc}(\beta) = 1 - \operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\beta^\infty \exp(-z^2) dz,$$

$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta \exp(-z^2) dz, \quad F(b_1, b_2) = -\frac{1}{2} \exp(-\rho^2) \rho \Big|_{b_1}^{b_2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\rho) \Big|_{b_1}^{b_2}.$$

Зауважимо, що інтеграли по Γ_v^s від функцій $Q_{h\tau}^{(s)}$ при $x^{mw} = \xi^{mv}$, які входять в (11), (12), обчислюються в сенсі Коші.

Підставивши одержані як розв'язок системи (11), (12) значення $d_{kv}^{\gamma s P}$ в (8), знайдемо компоненти вектора напруженості ЕП $E_i^{(\gamma s)}(x, \tau)$ на P -му кроці за часом для будь-яких точок спостереження $x^{st} \in \Omega_s$ ($t=1, \dots, T_s$) у півпросторі, включаючи ділянки контакту:

$$E_i^{(\gamma s)}(x^{st}, \tau) = \sum_{v=1}^{V_s} \left(\bar{A}_v^{sP}(x^{st}, \tau, U_{h\tau}^{(s)}) d_{kv}^{\gamma s P} + \sum_{p=1}^{P-1} \bar{A}_v^{sP}(x^{st}, \tau, U_{h\tau}^{(s)}) d_{kv}^{\gamma s P} - I_{ci}(x^{st}, \tau, U_{h\tau}^{(s)}) \right), \tau_{P-1} < \tau < \tau_P. \quad (13)$$

Для обчислення похідної за часом від компонент вектора напруженості МП $H_i^{(\gamma s)}(x, \tau)$, застосовуючи (10), отримуємо такі вирази:

$$\frac{\partial H_i^{(\gamma s)}(x^{st}, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\mu_s} \left\{ \sum_{v=1}^{V_s} \left[\bar{A}_v^{sP}(x^{st}, \tau, Q_{h\tau i}^{(s)}) d_{jv}^{\gamma s P} - \bar{A}_v^{sP}(x^{st}, \tau, Q_{h\tau j}^{(s)}) d_{iv}^{\gamma s P} \right] + \sum_{v=1}^{V_s} \sum_{p=1}^{P-1} \left[\bar{A}_v^{sP}(x^{st}, \tau, Q_{h\tau i}^{(s)}) d_{jv}^{\gamma s P} - \bar{A}_v^{sP}(x^{st}, \tau, Q_{h\tau j}^{(s)}) d_{iv}^{\gamma s P} \right] - \frac{\delta_{1s}}{\mu_1} [I_{cj}(x, \tau, Q_{hi}^{(1)}) - I_{ci}(x, \tau, Q_{hj}^{(1)})] \right\}, \tau_{P-1} < \tau < \tau_P. \quad (14)$$

Зауважимо, що при $\tau = \tau_P$ використовуємо формули, аналогічні (13), (14), але на останньому кроці \bar{A}_v^{sP} замінюємо на \bar{A}_v^{sP} .

Числові дослідження

Розглянуто включення Ω_2 у формі паралелепіпеда розмірами p_1, p_2, p_3 , розміщене на глибині h_0 від границі півпростору (рис. 1). Квадратна рамка C зі стороною $h = 2.5$ була розміщена на глибині $h_3 = -0.01$. Граничну поверхню паралелепіпеда, яким моделювалося включення,

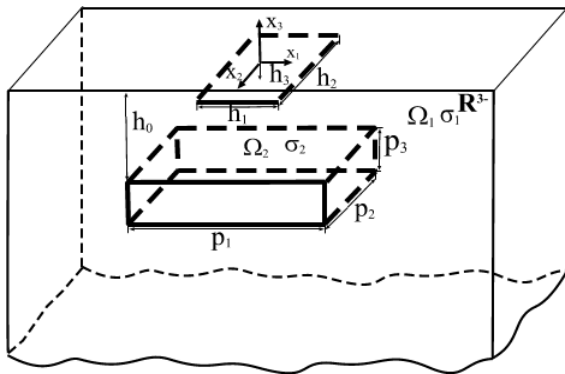


Рис. 1. Геометрична модель об'єкта

поділено на 16 граничних елементів і на них побудовано приграничні елементи висотою 0.5, тобто СЛАР (11), (12) складалась з 32 рівнянь. Зазначимо, що розмірності всіх фізичних величин (час, коефіцієнти електропровідності та магнітні проникності, напруженості електричного та магнітного полів) вибирались у системі СІ, а геометричні параметри були безрозмірними, оскільки з урахуванням критерію подібності вони зменшені порівняно з реальними в сто разів.

Оскільки точність обчислень компонент ЕМП за допомогою НМПГЕ є вищою, ніж при одержанні розв'язків НМГЕ [21], на графіках наведено результати, отримані НМПГЕ. Досліджувались закономірності зміни характеристик ЕМП від геометрії та фізичних властивостей включення: його провідності, відстані від границі півпростору, довжини – з метою формулювання практичних рекомендацій щодо розпізнавання локальних неоднорідностей. На рис. 2, а–в зображено залежність величин $\partial H_3^{(G1)}(0,0, h_3, \tau) / \partial \tau$, одержаних в центрі рамки, від часу τ при зміні провідності включення σ_2 (крива з написом 1 відповідає однорідному півпростору $\sigma_1 = \sigma_2$), глибини його залягання h_0 та довжині p_1 . Як бачимо, для $\sigma_2 > \sigma_1 = 1$ значення $\partial H_3^{(G1)}(0,0, h_3, \tau) / \partial \tau$ на початкових часах є меншими, ніж в однорідному півпросторі, а пізніше стають більшими; для $\sigma_2 < \sigma_1$ спостерігаємо протилежну картину. Зауважимо, що високопровідні включення краще проявляються на графіках, вони характеризуються довшим плато. За цими графіками можна також визначити

глибину залягання та розміри включення. За величиною $\partial H_3^{(G1)}(0,0,h_3,\tau)/\partial\tau$ на ділянці плато можна оцінити відстань включення від денної поверхні, а за значеннями часу різкого спаду кривої – його провідність.

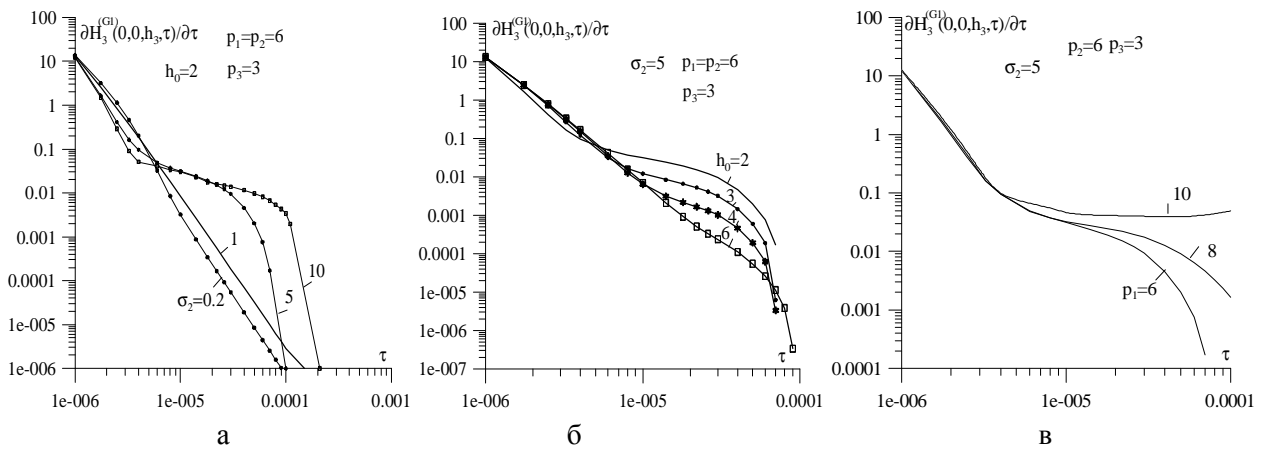


Рис. 2. Зміна величини $\partial H_3^{(G1)}(0,0,h_3,\tau)/\partial\tau$ у центрі рамки залежно від провідності включення σ_2 (а), глибини його залягання h_0 (б) та довжини p_1 (в)

Оскільки значне латеральне поширення струмів становлення дає змогу фіксувати відгук на великій площі, для отримання детальнішої картини про внутрішню структуру необхідно здійснювати площівну систему збору інформації при закріпленому джерелі. Для цього слід використовувати усі складові ЕМП. Тому на рис. 3, а–г показано характер зміни компонент $E_i^{(G1)}(x_1,0,h_3,\tau)$, $\partial H_i^{(G1)}(x_1,0,h_3,\tau)/\partial\tau$ ($i=1,2$) ЕМП для декількох точок спостереження ($x_1=0,1,2,3,4,5$). Графіки побудовано для випадку, коли $\sigma_1=1$, $\sigma_2=5$, $p_1=p_2=6$, $p_3=3$, $h_0=2$.

Маючи оперативну числову наближену процедуру розв’язування прямої тривимірної задачі та використовуючи сукупність площівних даних для знаходження розв’язку оберненої, ми одержимо результат, який залежно від якості вимірних даних та точності програмного забезпечення можна буде оцінити в діапазоні від трансформації в позірне тривимірне середовище до повної інверсії. Методи, основані на використанні таких процедур, як правило, дають змогу визначити співвідношення провідності різних частин досліджуваного об’єкта, абсолютні значення провідності можуть не бути визначені точно.

Використовуючи традиційний спосіб одержання візуалізованої інформації з електророзвідувальних даних [21], побудовано допоміжні криві, отримані за профілями чи як функції від часу, для виявлення геометрії та ЕМ характеристик включення на базі різних компонент ЕМП. На рис. 4, а, б подано частину

результатів, зокрема, позірні електропровідності $\sigma_t^{\gamma H}(\tau) = \sigma_1 \left(\frac{\partial H_3^{\gamma 0}(0,\tau)}{\partial\tau} / \frac{\partial H_3^{(\gamma 1)}(0,0,h_3,\tau)}{\partial\tau} \right)^{2/3}$ та

$\sigma_x^{\gamma H}(x) = \sigma_1 \left(\frac{\partial H_3^{\gamma 0}(x,\tau_k)}{\partial\tau} / \frac{\partial H_3^{(\gamma 1)}(x,\tau_k)}{\partial\tau} \right)^{2/3}$, тобто здійснено трансформацію значень напруженості

магнітного поля ($H_i^{\gamma 0}(x,\tau)$ – компоненти вектора напруженості МП в однорідному півпросторі). За значеннями $\sigma_t^{\gamma H}(\tau)$ (рис. 4, а) можна оцінити співвідношення між коефіцієнтами електропровідності середовища і включення, $\sigma_x^{\gamma H}(x)$ (рис. 4, б) слугує для виявлення країв включення, які проявляються екстремумами. Графіки побудовано для випадку $\sigma_1=1$, $\sigma_2=5$, $p_1=p_2=6$, $p_3=3$, $h_0=2$.

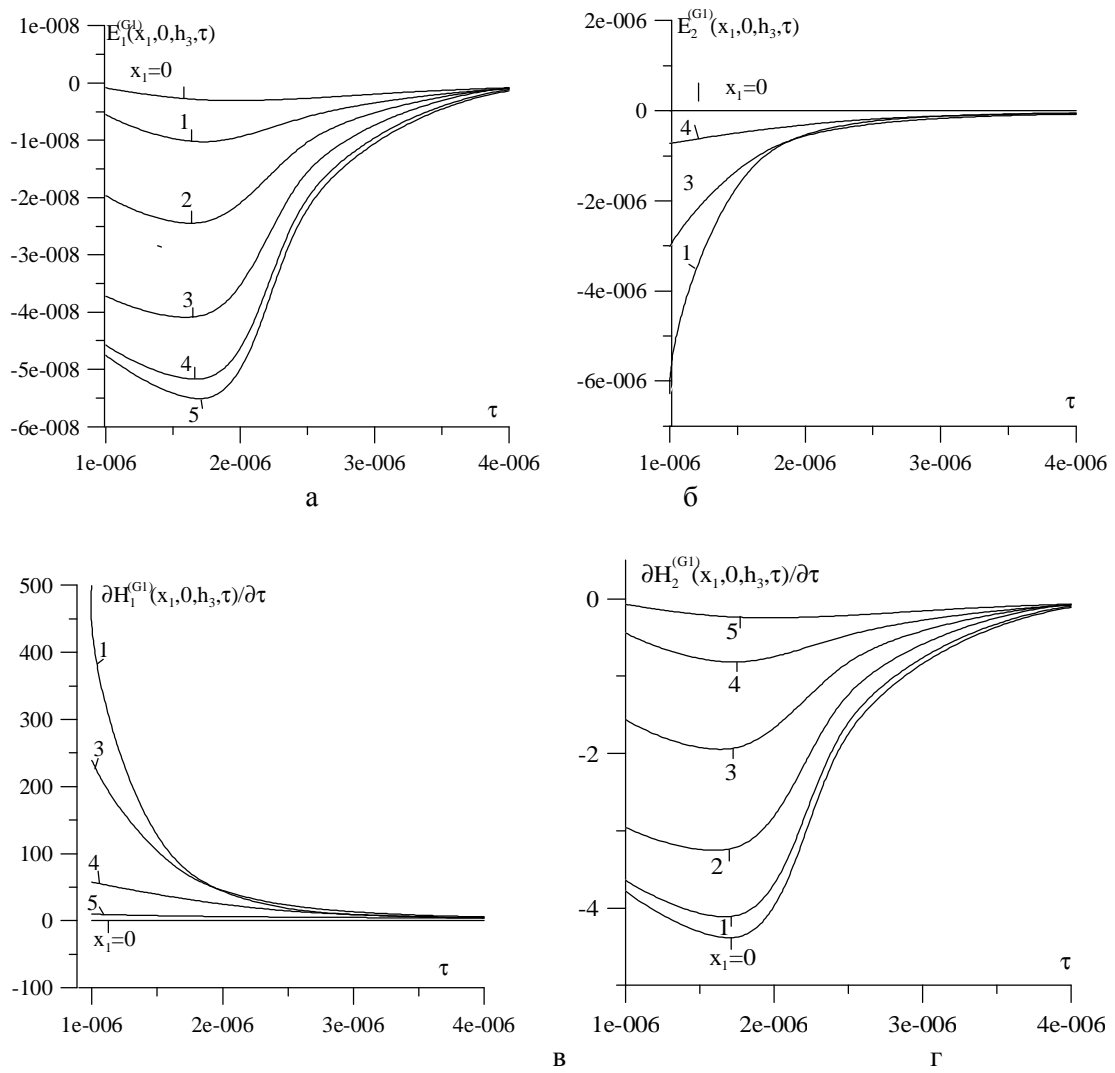


Рис. 3. Характер зміни горизонтальних електричних та магнітних компонент ЕМП всередині рамки та за її межами

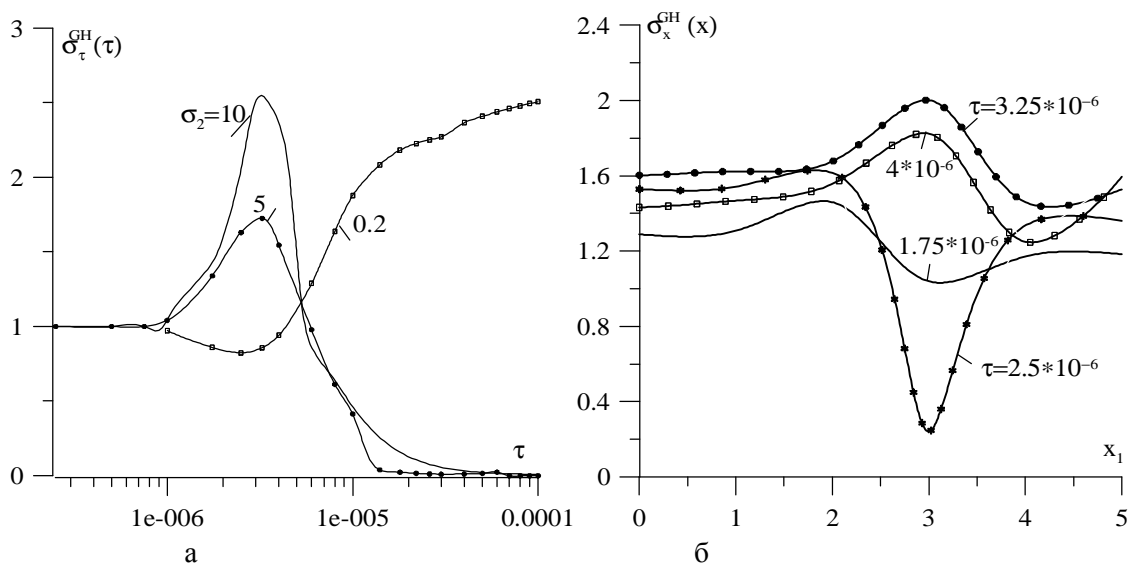


Рис. 4. Залежність позірних електропровідностей від провідності увімкнення (а) та часу (б)

Висновки

Запропонована для кусково-однорідного півпростору методика дає змогу:

- 1) розраховувати всі компоненти ЕМП в часовій області, не вводячи потенціалів електричного чи магнітного типів, що значно спрощує формулювання та розв'язування задачі;
- 2) розміщувати точкові та скінченних розмірів джерела різних типів і точки спостереження в будь-якому місці півпростору, розглядати довільний імпульсний режим збудження струму, що істотно для сучасних (малоглибинних) умов застосування індуктивної імпульсної електророзвідки;
- 3) на основі розв'язків прямої задачі моделювати ефективні трансформації для оперативної обробки великих масивів площинних даних за тривимірної інтерпретації.

Результати виконаного математичного моделювання та числових експериментів свідчать про те, що інформацію про електромагнітне поле, одержану на граничній поверхні і всередині півпростору, можна використовувати для виявлення в ньому локальних чужорідних включень. За допомогою запропонованої методики можна достовірно визначати компоненти ЕМП. Одержані розв'язки прямих тривимірних задач є основою для розроблення підходів до визначення фізичних і геометричних параметрів включень, тобто до розв'язування обернених задач.

Отримані результати також підтверджують доцільність застосування індуктивних імпульсних електророзвідувальних методів становлення поля для виявлення високопровідних включень типу рудних родовищ. Загальними сприятливими умовами для виявлення і дослідження чужорідних областей з провідністю, вищою, ніж геосередовище, треба вважати співвимірну з горизонтальними розмірами (чи меншу) глибину їх залягання.

1. Заборовский А.И. *Электроразведка*. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 423 с.
2. Тихонов А.Н., Скугаревская О.А. *О становлении электрического тока в неоднородной среде // Изв. АН СССР. Географ. и геофиз.* - 1950. - № 4. - С. 281–293.
3. Шейнман С.М. *Об установлении электромагнитных полей в Земле // Прикл. геофизика*. - 1947. - Вып. 9. - С. 3–55.
4. Жданов М.С. *Теория обратных задач и регуляризации в геофизике*. – М.: Научн. мир, 2007. – 712 с.
5. Причепий Т.И. *Пересчет процессов становления электромагнитного поля в эквивалентную волновую область. Формальный анализ // Геофиз. журн.* – 2004. – 26, № 6. – С. 121–131.
6. Дмитриев В.И., Скугаревская О.А., Фролов П.П. *Некоторые вопросы метода становления поля в ближней зоне*. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 50 с.
7. Табаровский Л.А. *Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики*. – Новосибирск: Наука, 1975. – 140 с.
8. Goldman M.M. *The integral finite difference method for calculating transient electromagnetic fields in a horizontally stratified medium // Geophysical Prospecting*. – 1983. – 31, № 4. – P. 664–686.
9. Жданов М.С., Спичак В.В. *Математическое моделирование электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах*. – М.: Наука, 1992. – 188 с.
10. Табаровский Л.А., Соколов В.П. *Программа расчета нестационарного поля дипольных источников в горизонтально-слоистой среде (АЛЕКС) // Электромагнитные методы геофизических исследований*. – Новосибирск: Изд-во ИГиГ СО АН СССР, 1982. – С. 57–77.
11. Anderson W.L. *Computation of Green's tensor integrals for three-dimensional electromagnetic problems using fast Hankel transforms // Geophysics*. – 1984. – Vol. 49, № 10. – P. 1754–1759.
12. Anderson W.L. *A hybrid fast Hankel transform algorithm for electromagnetic modelling // Geophysics*. – 1989. – Vol. 54, № 2. – P. 263–266.
13. Кауфман А.А. *Введение в теорию геофизических методов*. Ч. 2: *Электромагнитные поля / Пер. с англ.* – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2000. – 483 с.
14. Гроза А.А., Гаврильцев В.Б., Рева Н.В. *Использование операционного метода для анализа нестационарных электромагнитных полей // Геофиз. журн.* – 1998. - 20, № 2. - С. 19–28.
15. Шуман В.Н. *О теоретических основах современной геоэлектрики // Геофиз. журн.* - 2005. - 27, № 2. - С. 218–234.
16. Могилатов В.С. *Возбуждение электромагнитного поля в слоистой Земле горизонтальным токовым листом // Изв. РАН. Физика Земли*. – 1998. – № 5. – С. 45–53.
17. Журавчак Л. М., Шуміліна Н. В. *Математичне моделювання електромагнітного поля у процесі дослідження складних геоелектричних розрізів // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. – 2004. – № 3. – С. 98–104.
18. Журавчак Л.М., Шуміліна Н.В. *Моделювання взаємного впливу нафтогазоносних покладів на розподіл електромагнітного поля //*

Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2004. – № 4. – С. 60–66. 19. Журавчак Л.М. Грицько Є.Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с. 20. Бенерджи П., Баттерфілд Р. Метод граничних елементів в прикладних науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с. 21. Журавчак Л. М., Шуміліна Н. В. Моделювання розподілу електромагнітного поля у зонально-однорідних об'єктах // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 521: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – С. 120–129.

УДК 622.692.4+622.691.24

Н. Притула^{1,2}, Р. Боровий¹, М. Притула^{1,2}, О. Химко³

¹ ТОВ “Математичний центр”,

² Центр математичного моделювання
ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України,

³ Національний університет “Львівська політехніка”,

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БІЛЬЧЕ-ВОЛИЦЬКОГО ПІДЗЕМНОГО СХОВИЩА ГАЗУ

© Притула Н., Боровий Р., Притула М., Химко О., 2010

Побудована математична модель процесу руху газу в системі пласт підземного сховища газу–магістральний газопровід, в яку входять моделі всіх технологічних об'єктів, гідравлічно пов'язаних між собою. Встановлено обмеження, які накладаються на параметри моделей та газодинамічні процеси. Наведено постановки основних задач, які виникають під час моделювання роботи системи пласт підземного сховища газу – магістральний газопровід.

Ключові слова: фільтрація газу, технологічна схема, компресорна станція, пористе середовище, шлейфово-колекторна система, свердловина, вибійна зона.

The gas transport process mathematical model of underground gas storage layer – main pipeline system that includes the models of all hydraulically related to each other technological objects was constructed. The restrictions that are applied to model parameters and gas-dynamic processes were set. The statements of all primary tasks that arise during underground gas storage layer – main pipeline system work modeling are presented.

Keywords: filtering gas scheme, compressor station, a porous medium shleyfovo-sewer system, well, Mounted Zone.

Вступ

Підземні сховища газу (ПСГ) є важливою частиною газотранспортної системи (ГТС) України. Вони слугують для ліквідації дисбалансу газу в ГТС в осінньо-зимовий період. Нерівномірність як відбору, так і закачування істотно впливає на основні режимні параметри: максимальний час безкомпресорного (за рахунок пластової енергії, для економії паливно-енергетичних ресурсів) відбору і закачування; максимальні відбори газу за визначений час (піковість); тривалість періоду відбору тощо. Основні процеси в ПСГ – процеси фільтрації газу в його пластах, які є істотно нестаціонарними, та газодинамічні, які проходять у вибоях свердловин, шлейфово-колекторній системі, КС тощо [1–4]. Параметри, що характеризують пласт (пористість, проникність, газонасиченість, фільтраційні коефіцієнти тощо) є складними нелінійними функціями багатьох параметрів і