

програмованих систем на чіпі для уніфікації характеристик діодних сенсорів / *Мат. 4-ї Міжнар. наук.-техн. конф. ACSN-2009 «Сучасні комп'ютерні системи та мережі»*, 9–11 лист. – Львів: Вид-во Націон. ун-ту «Львівська політехніка», 2009. – С. 236. 14. Гутников В.С. *Применение операционных усилителей в измерительной технике.* – Л.: Энергия, 1975. –118 с. 15. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ.* – М.: Наука, 1983. – 176 с.

УДК 517.958

Л. Журавчак, А. Струк

Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Суботіна НАН України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ ТИСКУ У ПЛАСТІ З УРАХУВАННЯМ ДЕБІТУ СВЕРДЛОВИНИ ТА ГІДРОНЕПРОНИКНОСТІ ЗОВНІШНЬОЇ КРИВОЛІНІЙНОЇ МЕЖІ

Ї Журавчак Л., Струк А., 2011

Обґрунтовано ефективність використання непрямого методу граничних елементів для побудови чисельно-аналітичного розв'язку задачі про неусталений рух стисливої рідини в пружному пористому замкненому пласті з урахуванням дебіту свердловини. З використанням фундаментального розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності та схеми послідовності початкових умов побудовано дискретно-континуальну модель задачі з довільними початковими умовами та граничними умовами другого роду. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінювання впливу характеристик середовища на зміну пластового та вибійного тисків.

Ключові слова: нестационарний процес зміни пластового тиску, непрямий метод граничних елементів.

The efficiency of using the indirect boundary element technique for the construction of numerical-analytical solution of the problem of unsettled motion of compressible fluid in porous, elastic, closed reservoir, including well production, was proved. Using the fundamental solution of the non-stationary thermal conductivity equation and sequence diagram of initial conditions the discrete-continual model of the problem with arbitrary initial conditions and boundary conditions of the second kind, was constructed. Series of computational experiments were carried out to assess the influence of characteristics of environment on reservoir pressure and well pressure change.

Key words: non-stationary process of reservoir pressure change, indirect boundary element technique.

Вступ

Процес розроблення конкретного нафтового родовища одноразовий і безпосередньому спостереженню доступний лише в обмеженій кількості точок-свердловин. Це дало поштовх до розвитку математичних методів його моделювання як посередників у наукових дослідженнях. Математичне моделювання дає можливість за порівняно невеликих витрат у короткий термін розглянути багато варіантів процесу розробки родовища у різних технологічних умовах і цим самим вибрати раціональну технологію. Під час створення моделей процесів розроблення нафтових родовищ враховують геолого-фізичні властивості пласту, його геометричну форму, флюїди та процес вилучення нафти й газу із надр.

Математична модель процесів розроблення нафтових родовищ ґрунтується на спрощенні (певній ідеалізації) складного реального процесу. Для її створення природні умови відповідним чином диференціюють, виділяють серед них головні, визначальні чинники і подають їх у такому

вигляді, який забезпечує можливість досягнення мети. При цьому сукупність нафтоносних пластів розглядають як єдину гідродинамічно зв'язану систему не лише в усій області нафтогазоносності, але й в навколишній водонапірній області. Переміщення флюїдів всередині цієї єдиної системи визначається початковими умовами (тими, що існували до початку розроблення) та граничними умовами (на поверхнях, які обмежують пласт із зовнішніх боків і на стінках свердловин у середині пластів). Отже, математичне моделювання вказаного процесу полягає у складанні й розв'язуванні диференціального рівняння в частинних похідних, яке його описує, доповненого початково-крайовими умовами. Зрозуміло, що для дослідження фільтраційних потоків у реальному пласті моделі повинні бути тривимірними. Та оскільки товщина пласту і її зміна є доволі малими порівняно з його розмірами в горизонтальній площині вздовж осей x_1 і x_2 , то вертикальною складовою швидкості руху можна знехтувати. Це дає змогу розв'язувати двовимірні рівняння руху для дуже протяжних пластів зі змінною товщиною $h(x_1, x_2)$ [2, 3].

Математична модель для знаходження пластового та вибійного тиску

Однією з основних складових математичної моделі процесу розроблення нафтового родовища є модель пласта. Розглянемо однорідний за параметрами пласт, змодельований опуклою областю Ω з довільною криволінійною межею Γ_z , що містить свердловину з контуром Γ_c . Ця модель реалізує гіпотезу про однорідність пласта як за площею, так і за вертикальним розрізом покладу.

Серед природних режимів виснаження технологічні розрахунки доцільно проводити для пружного режиму. Пружність пласта проявляється в початковий період розробки покладу, якщо тиск $p(\mathbf{x}, \tau)$ у ньому є вищим за тиск насичення нафти газом $p_n(\mathbf{x}, \tau)$, а також за цієї ж умови щодо тиску в процесі подальшого розроблення з підтримуванням пластового тиску в разі невідповідності темпів відбирання і нагнітання, тобто коли $p(\mathbf{x}, \tau) > p_n(\mathbf{x}, \tau)$, тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; τ – час. При цьому вибійний тиск не менший за тиск насичення: $p_b(\mathbf{x}, \tau) \geq p_n(\mathbf{x}, \tau)$. У разі пружного режиму визначають зміни дебітів свердловин або тисків у покладах з часом.

Для розрахунку зміни тиску в часі у кожній точці пласта розв'яжемо диференціальне рівняння, що описує неусталений (нестационарний) рух пружної (стисливої) рідини в пружному пористому середовищі, змодельованому двовимірним однорідним пластом Ω з довільною криволінійною межею [2, 3]:

$$\mathbf{P}_{0\tau}(p(\mathbf{x}, \tau)) = \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Omega \times \mathbf{T}, \quad (1)$$

у допущенні, що треба визначити зміну пластового і вибійного тисків у замкненому покладі за таких граничних і початкових умов

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z \times \mathbf{T}, \quad (2)$$

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^c(\mathbf{x})} = q(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_c \times \mathbf{T}, \quad (3)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Тут $p(\mathbf{x}, \tau)$ – тиск; $\kappa = k / (\mu \beta^*)$ – коефіцієнт п'єзопровідності; k – коефіцієнт проникності пласта; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини; β^* – коефіцієнт пружної ємності насиченого пласта; $\varepsilon = \frac{kh}{\mu}$ – коефіцієнт гідропровідності; $\mathbf{T} = \{\tau: 0 < \tau < \infty\}$; h – товщина пласта; $p_0(\mathbf{x})$ – початковий

пластовий тиск у покладі; $\oint_{\Gamma_c} q(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma(\mathbf{x}) = q_{\Gamma}(\tau)$ – дебіт свердловини; $\mathbf{n}^c(\mathbf{x}) = (n_1^c(\mathbf{x}), n_2^c(\mathbf{x}))$ –

однозначно визначена внутрішня нормаль до контуру Γ_c свердловини; $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}))$ – однозначно визначена зовнішня нормаль до зовнішньої непроникної межі покладу Γ_z .

Побудова інтегральних зображень розв'язків початково-крайової задачі та граничних інтегральних рівнянь

Згідно з основними положеннями непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) [1], на зовнішній межі пласта і на контурі свердловини введемо невідомі функції $\varphi_z(\mathbf{x}, \tau)$, $\varphi_c(\mathbf{x}, \tau)$, які описують розподіл невідомих фіктивних джерел тиску. Після розширення області визначення функції $p(\mathbf{x}, \tau)$ на всю площину \mathbf{R}^2 , рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{P}_{0\tau}(p(\mathbf{x}, \tau)) = -\varphi_z(\mathbf{x}, \tau)\chi_{\Gamma_z} - \varphi_c(\mathbf{x}, \tau)\chi_{\Gamma_c} - p_0(\mathbf{x})\delta(\tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}, \quad (5)$$

де $\chi_{\Gamma_z}, \chi_{\Gamma_c}$ – характеристичні функції межі Γ_z та контуру свердловини Γ_c , тобто $\chi_{\Gamma_z} = 1$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_z$, $\chi_{\Gamma_z} = 0$ при $\mathbf{x} \notin \Gamma_z$, $\chi_{\Gamma_c} = 1$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_c$, $\chi_{\Gamma_c} = 0$ при $\mathbf{x} \notin \Gamma_c$, $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака.

Оскільки для оператора $\mathbf{P}_{0\tau}(p(\mathbf{x}, \tau))$ існує й відомий фундаментальний розв'язок (ФР) $U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)$ [5], то інтегральне зображення розв'язку рівняння (5) та його похідних за нормальми з урахуванням початкового розподілу (4) мають вигляд

$$p(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, U) + b_\tau(\mathbf{x}, \tau, U), \quad -\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q) + b_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}, \quad (6)$$

$$-\varepsilon \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^c(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q^c) + b_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q^c), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}, \quad (7)$$

де $U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \frac{1}{4\pi\kappa(\tau - \xi_4)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa(\tau - \xi_4)}\right)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$, $\xi_4 \in T$, $r^2 = \sum_{i=1}^2 y_i^2$, $y_i = x_i - \xi_i$,

$$Q(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \varepsilon \sum_{l=1}^2 Q_l(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \mathbf{n}_l(\mathbf{x}), \quad Q^c(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \varepsilon \sum_{l=1}^2 Q_l(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \mathbf{n}_l^c(\mathbf{x}),$$

$$Q_l(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = -\frac{\partial U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)}{\partial x_l} = \frac{U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) y_l}{2\kappa(\tau - \xi_4)} = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa(\tau - \xi_4)}\right)}{8\pi\kappa^2(\tau - \xi_4)^2},$$

$$\mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_0^\tau \int_{\Gamma_z} \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \varphi_z(\xi, \xi_4) d\Gamma_z(\xi) d\xi_4 + \int_0^\tau \int_{\Gamma_c} \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \varphi_c(\xi, \xi_4) d\Gamma_c(\xi) d\xi_4, \quad (8)$$

$$b_\tau(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_\Omega \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, 0) p_0(\xi) d\Omega(\xi), \quad \Phi \in \{U, Q, Q^c\}. \quad (9)$$

Спрямувавши в (6), (7) \mathbf{x} з середини області Ω до межі Γ_z та контуру Γ_c для задоволення умов (2), (3), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi_z(\xi, \xi_4)$, $\varphi_c(\xi, \xi_4)$ з відомими $p_0(\xi)$ та заданою на контурі функцією $q(\mathbf{x}, \tau)$

$$-\frac{1}{2} \varphi_z(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q) = -b_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z \times \mathbf{T}, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi_c(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q^c) = q(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau(\mathbf{x}, \tau, Q^c), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_c \times \mathbf{T}. \quad (11)$$

Просторово-часова дискретизація математичної моделі

Оскільки виконати аналітичне інтегрування у рівняннях (10), (11) для прикладних задач внаслідок довільності області Ω практично неможливо, здійснимо просторово-часову дискретизацію за допомогою таких кроків. Зовнішню межу і контур свердловини дискретизовано відповідно на V_z та V_c граничних елементів Γ_{zv}, Γ_{cv} , причому $\cup_{v=1}^{V_z} \Gamma_{zv} = \Gamma_z$, $\cup_{v=1}^{V_c} \Gamma_{cv} = \Gamma_c$,

граничні елементи між собою не перетинаються. Тоді невідомі функції, які описують розподіл фіктивних джерел тиску в межах граничних елементів Γ_{zv}, Γ_{cv} , позначимо через $\Phi_{zv}(\mathbf{x}, \tau)$, $\Phi_{cv}(\mathbf{x}, \tau)$. Область Ω дискретизуємо на криволінійні елементи другого порядку з 8-ма вузлами Ω_q ($q=1, \dots, Q$). Для зручності опису залежності $\Phi_{zv}(\mathbf{x}, \tau)$, $\Phi_{cv}(\mathbf{x}, \tau)$ від часу часовий промінь \mathbf{T} розіб'ємо на однакові інтервали $\mathbf{T}_k =]\tau_{k-1}, \tau_k]$ ($k=1, 2, \dots, \tau_0=0$) і в межах кожного \mathbf{T}_k ($k=1, \dots, K, K>1$) ці функції апроксимуємо постійними d_{zv}^m, d_{cv}^m . Дискретно-континуальну модель побудуємо для покрокової часової схеми – схеми послідовності початкових умов (СППУ) [1, 6]. Кожний крок за часом \mathbf{T}_k розглянемо як нову задачу, тобто уведемо локальний час $\tilde{\tau} = \tau - (k-1)\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ – величина часового приросту) і обчислені в кінці $(k-1)$ -го часового інтервалу значення $p(\mathbf{x}, (k-1)\Delta\tau)$ у внутрішніх точках використано як початкові для наступного k -го кроку.

Оператори $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau, \Phi)$ (8) та $b_\tau(\mathbf{x}, \tau, \Phi)$ (9) після просторово-часової дискретизації для K -го кроку ($(K-1)\Delta\tau < \tau \leq K\Delta\tau, 0 < \tilde{\tau} \leq \Delta\tau$) отримаємо у вигляді

$$\mathbf{F}_\tau^K(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi) = \sum_{v=1}^{V_z} A_v^z(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) d_{zv}^K + \sum_{v=1}^{V_c} A_v^c(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) d_{cv}^K, \quad (12)$$

$$b_\tau^K(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi) = \sum_{q=1}^Q \int_{\Omega_q} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, 0) p_0^{(K)}(\xi) d\Omega_q(\xi), \quad (13)$$

де $p_0^{(1)}(\xi) = p_0(\xi)$, $p_0^{(k)}(\xi) = p(\xi, (k-1)\Delta\tau)$, $k > 1, x \in \Omega$,

$$A_v^z(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi) = \int_0^{\tilde{\tau}} \int_{\Gamma_{zv}} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, \xi_4) d\Gamma_{zv}(\xi) d\xi_4, \quad A_v^c(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi) = \int_0^{\tilde{\tau}} \int_{\Gamma_{cv}} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, \xi_4) d\Gamma_{cv}(\xi) d\xi_4, \quad 0 < \tilde{\tau} \leq \Delta\tau. \quad (14)$$

Дискретно-континуальна модель для знаходження невідомих інтенсивностей джерел тиску, введених у граничних елементах

Для задоволення граничних умов використаємо колокаційну методику. Точки колокації виберемо у кінцевий момент часу $\Delta\tau$ у середині кожного граничного елемента $\Gamma_{zw}, w=1, \dots, V_z$, $\Gamma_{vw}, w=1, \dots, V_c$. ГІР (10), (11) після просторово-часової дискретизації для K -го кроку запишемо у вигляді СЛАР

$$-\frac{1}{2} d_{zw}^K \delta_{vw} + \sum_{v=1, v \neq w}^{V_z} A_{zv}^z(x^w, \Delta\tau, Q_\tau) d_{zv}^K + \sum_{v=1}^{V_c} A_{zv}^c(x^w, \Delta\tau, Q_\tau) d_{cv}^K = -b_\tau^K(x^w, \Delta\tau, Q),$$

$$x^w \in \Gamma_{zw} \subset \Gamma_z, \quad w=1, \dots, V_z, \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2} d_{cw}^K \delta_{vw} + \sum_{v=1}^{V_z} A_{zv}^c(\mathbf{x}^{cw}, \Delta\tau, Q_\tau) d_{zv}^K + \sum_{v=1, v \neq w}^{V_c} A_{zv}^c(\mathbf{x}^{cw}, \Delta\tau, Q_\tau) d_{cv}^K = q(\mathbf{x}^{cw}, \tau) - b_\tau^K(\mathbf{x}^{cw}, \Delta\tau, Q^c),$$

$$\mathbf{x}^{cw} \in \Gamma_{cw} \subset \Gamma_c, \quad w=1, \dots, V_c, \quad (16)$$

де $A_{zv}^z(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) = \int_{\Gamma_{zv}} \Phi_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) d\Gamma_{zv}(\xi)$, $A_{zv}^c(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) = \int_{\Gamma_{cv}} \Phi_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) d\Gamma_{cv}(\xi)$, $\Phi_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \int_0^{\tilde{\tau}} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, \xi_4) d\xi_4$,

$$Q_\tau(\mathbf{x}, \tau, \xi) = \varepsilon \sum_{l=1}^2 Q_{\tau l}(\mathbf{x}, \tau, \xi) \mathbf{n}_l(\mathbf{x}), \quad Q_\tau^c(\mathbf{x}, \tau, \xi) = \varepsilon \sum_{l=1}^2 Q_{\tau l}(\mathbf{x}, \tau, \xi) \mathbf{n}_l^c(\mathbf{x}),$$

$$Q_{\tau l}(\mathbf{x}, \tau, \xi) = \frac{y_l}{2\kappa\pi r^2} \exp(-\beta_2), \quad \beta_2 = \frac{r^2}{4\kappa\tilde{\tau}}.$$

Зрозуміло, що для постійного кроку за часом матрицю системи (15), (16) обчислено один раз і збережено у пам'яті комп'ютера. Як бачимо, перед побудовою системи (15), (16) здійснено аналітичне інтегрування за часом інтегралів (14), що входять після просторово-часової дискретизації до лівої частини СЛАР.

Знайшовши з (15), (16) невідомі d_{zv}^K , d_{cv}^K , використаємо формулу, аналогічну (6) для обчислення шуканого тиску у вузлах, що описують внутрішні елементи Ω_q , в момент часу $\Delta\tau$

$$p^{(K)}(\mathbf{x}^{ql}, \Delta\tau) = \sum_{v=1}^{V_z} A_{zv}^z(\mathbf{x}^{ql}, \Delta\tau, U_\tau) d_{zv}^K + \sum_{v=1}^{V_c} A_{cv}^c(\mathbf{x}^{ql}, \Delta\tau, U_\tau) d_{cv}^K + b_\tau^K(\mathbf{x}, \Delta\tau, U), \mathbf{x}^{ql} \in \Omega_q, l=1, \dots, 8, (17)$$

де $U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \frac{1}{4\kappa\pi} E_1(\beta_2)$, $E_1(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} dz$ – інтегро-показникова функція.

Знайдені за формулою (17) значення тиску використовуємо у (13) для формування правої частини матриці СЛАР на таких часових кроках.

Для обчислення інтегралів $A_{zv}^z(\mathbf{x}^{ql}, \Delta\tau, U_\tau)$, $A_{cv}^c(\mathbf{x}^{ql}, \Delta\tau, U_\tau)$ використаємо такі способи апроксимації функції $E_1(z)$ [7]:

$$E_1(z) = \begin{cases} -\ln z + \alpha_5 z^5 + \alpha_4 z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 + \varepsilon_1(z), & z \in [0,1], \\ \frac{\exp(-z)}{z} \frac{z^4 + \eta_1 z^3 + \eta_2 z^2 + \eta_3 z + \eta_4}{z^4 + \zeta_1 z^3 + \zeta_2 z^2 + \zeta_3 z + \zeta_4} + \varepsilon_2(z), & 1 < z < \infty, \end{cases} (18)$$

де $|\varepsilon_1(z)| < 2 \cdot 10^{-7}$, $|\varepsilon_2(z)| < 2 \cdot 10^{-8}$, $\eta_1 = 8.5733287401$, $\eta_2 = 18.0590169730$, $\eta_3 = 8.6347608925$, $\eta_4 = 0.2677737343$, $\zeta_1 = 9.5733223454$, $\zeta_2 = 25.6329561486$, $\zeta_3 = 21.0996530827$, $\zeta_4 = 3.9584969228$, $\alpha_0 = -0.57721566$, $\alpha_1 = 0.99999193$, $\alpha_2 = -0.24991055$, $\alpha_3 = 0.05519968$, $\alpha_4 = -0.00976004$, $\alpha_5 = 0.00107857$.

У випадку, коли $E_1(z)$ на граничних елементах Γ_{zv} , Γ_{cv} набуває як менших, так і більших від одиниці значень, відрізок інтегрування у цих інтегралах розбиваємо відповідно до формули (18).

Потім чисельно знайдемо інтеграли за граничними та внутрішніми елементами, тобто відобразимо криволінійні граничні елементи на відрізки $[-1, +1]$, а внутрішні елементи з криволінійними межами на квадрат зі стороною 2 [5]:

$$A_{tv}^\alpha(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) = \int_{-1}^{+1} \Phi_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(\alpha v)}) \left| J(\xi^{(\alpha v)}, \zeta) \right| d\zeta, \alpha \in \{z, c\}, (19)$$

$$\int_{\Omega_q} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, 0) p_0^{(K)}(\xi) d\Omega_q(\xi) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(q)}, 0) \left| J_\Omega(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) \right| \sum_{l=1}^8 \beta_l(\boldsymbol{\eta}) p_0^{Kql} d\eta_1 d\eta_2. (20)$$

Тут $\left| J(\xi^{(\alpha v)}, \zeta) \right| = \sqrt{\left(\frac{d\xi_1^{(\alpha v)}}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{d\xi_2^{(\alpha v)}}{d\zeta} \right)^2}$, $\xi_j^{(\alpha v)}(\zeta) = \sum_{l=1}^3 \phi_l(\zeta) \xi_j^{(\alpha l)}$, $\phi_1(\zeta) = 0.5\zeta(\zeta-1)$,

$\phi_2(\zeta) = 0.5\zeta(1+\zeta)$, $\phi_3(\zeta) = (1-\zeta)(1+\zeta)$, $J(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \xi_1^{(q)}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \xi_2^{(q)}}{\partial \eta_2} - \frac{\partial \xi_2^{(q)}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \xi_1^{(q)}}{\partial \eta_2}$, $\xi_i^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{l=1}^8 \beta_l(\boldsymbol{\eta}) \xi_i^{(ql)}$,

$p_0^{Kql} = p_0^K(\xi^{(ql)})$, $\xi^{(ql)} = (\xi_1^{(ql)}, \xi_2^{(ql)})$ – координати l -го ($l=1, \dots, 8$) вузла q -го внутрішнього елемента дискретизації, $\beta_1(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1-\eta_1)(1-\eta_2)(-\eta_1-\eta_2-1)$, $\beta_2(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1+\eta_1)(1-\eta_2)(\eta_1-\eta_2-1)$,

$\beta_3(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1+\eta_1)(1+\eta_2)(\eta_1+\eta_2-1)$, $\beta_4(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1-\eta_1)(1+\eta_2)(-\eta_1+\eta_2-1)$, $\beta_5(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1-\eta_1^2)(1-\eta_2)$,

$\beta_6(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1-\eta_2^2)(1+\eta_1)$, $\beta_7(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1-\eta_1^2)(1+\eta_2)$, $\beta_8(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1-\eta_2^2)(1-\eta_1)$.

На останньому етапі до отриманих інтегралів (19), (20) застосуємо формули числового інтегрування Гаусса:

$$\int_{-1}^{+1} f_1(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^n w_i f_1(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \zeta_i), \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f_2(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f_2(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_{1i}, \eta_{2j}),$$

де $f_1(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \zeta) = \Phi_{\tau}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(\alpha\nu)}) \left| J(\xi^{(\alpha\nu)}, \zeta) \right|$,

$$f_2(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_1, \eta_2) = |\Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(q)}, 0)| J_{\Omega}(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) \sum_{l=1}^8 \beta_l(\boldsymbol{\eta}) p_0^{Kql} d\eta_1 d\eta_2, \quad n - \text{загальне число точок інтегрування};$$

$\zeta_i, (\eta_{1i}, \eta_{2j})$ – координати точки інтегрування; w_i, w_j – відповідні вагові множники; при $n=4$ вони мають вигляд: $\zeta_1 = \eta_{m1} = -0.86114$; $\zeta_2 = \eta_{m2} = -0.33998$; $\zeta_3 = \eta_{m3} = 0.33998$; $\zeta_4 = \eta_{m4} = 0.86114$ ($m=1,2$); $w_1 = w_4 = 0.34785$; $w_2 = w_3 = 0.65215$.

Числові дослідження

Числові дослідження проведено для області Ω , вибраної у вигляді еліпса з півосями $a=800$ м, $b=600$ м, в центрі якого розміщено круглу свердловину радіуса $R=1$ м. Фізичні характеристики пласта вибирали такими [3]: $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $h=18$ м; $q_{\Gamma}(\tau)=30$ м³/день. $=0.347 \cdot 10^{-3}$ м³/с.

Оскільки похибки, що виникають під час застосування непрямого методу граничних елементів, зумовлені тільки процедурами апроксимації, дискретизації та числового інтегрування, спочатку досліджували точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурі свердловини в різні моменти часу.

Зовнішню межу рівномірно розбивали на 16 граничних елементів, а контур свердловини – на 8, тобто СЛАР (15), (16) складалась з 24 рівнянь. Кількість внутрішніх елементів, на які дискретизували область Ω , дорівнювала 32 (зрозуміло, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці, оскільки інтеграл від початкової умови входить у праву частину вказаної СЛАР). Часовий інтервал $\mathbf{T} = \{\tau : 0 < \tau < 1728000\}$ с рівномірно розбивали на 5 проміжків. Проведено дослідження на різних функцій, якими моделювали початковий розподіл тиску у пласті, зокрема, для постійного: $p_0(\mathbf{x})=C=20 \cdot 10^6$ Па та у вигляді функції:

$$p_0(\mathbf{x}) = \frac{q_{\Gamma}(\tau)}{4\pi R \varepsilon (R - r_{el})} (r - r_{el})^2 + C, \quad (21)$$

де r, r_{el} – відстані в полярних координатах до точки \mathbf{x} та до відповідної їй на межі еліпса. Останню функцію побудовано з детальнішим урахуванням узгодженості початкової та граничних умов. Зазначимо, що з її використанням отримано точніші значення тиску в точках поблизу контуру свердловини, але це майже не вплинуло на значення у точках, розміщених ближче до зовнішньої межі. На всіх наведених нижче графіках наведено розподіл тиску для початкової умови, заданої формулою (21).

На рис. 1 подано абсолютну похибку задоволення граничних умов на частинах зовнішньої межі та контуру свердловини в момент часу $\tau=345600$ с (4 доби) для $k=1.1 \cdot 10^{-13}$ м³. Внаслідок симетрії задачі похибку подано лише на четвертій частині меж. Зазначимо, що у точках колокації похибка відсутня, найбільша спостерігається із наближенням до кінців граничних елементів, а в середині області похибки будуть меншими внаслідок виконання принципу максимуму.

На рис.2 подано розподіл тиску в пласті в різні моменти часу для $k=1.1 \cdot 10^{-13}$ м³, а на рис. 3 – зміну тиску з часом у декількох точках пласта: внутрішніх та на його межах. Досліджено вплив зміни коефіцієнта проникності на значення пластового та вибійного тисків, частину яких подано на рис. 4. Як бачимо, зростання коефіцієнта проникності пласта спричиняє підвищення тиску у внутрішніх точках пласта, однак на зовнішній гідронепроникливій межі ця залежність спостерігається не завжди.

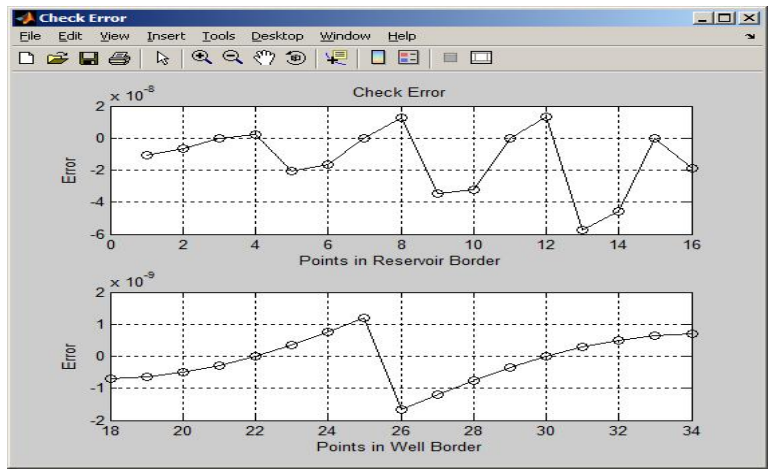


Рис.1. Точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурі свердловини

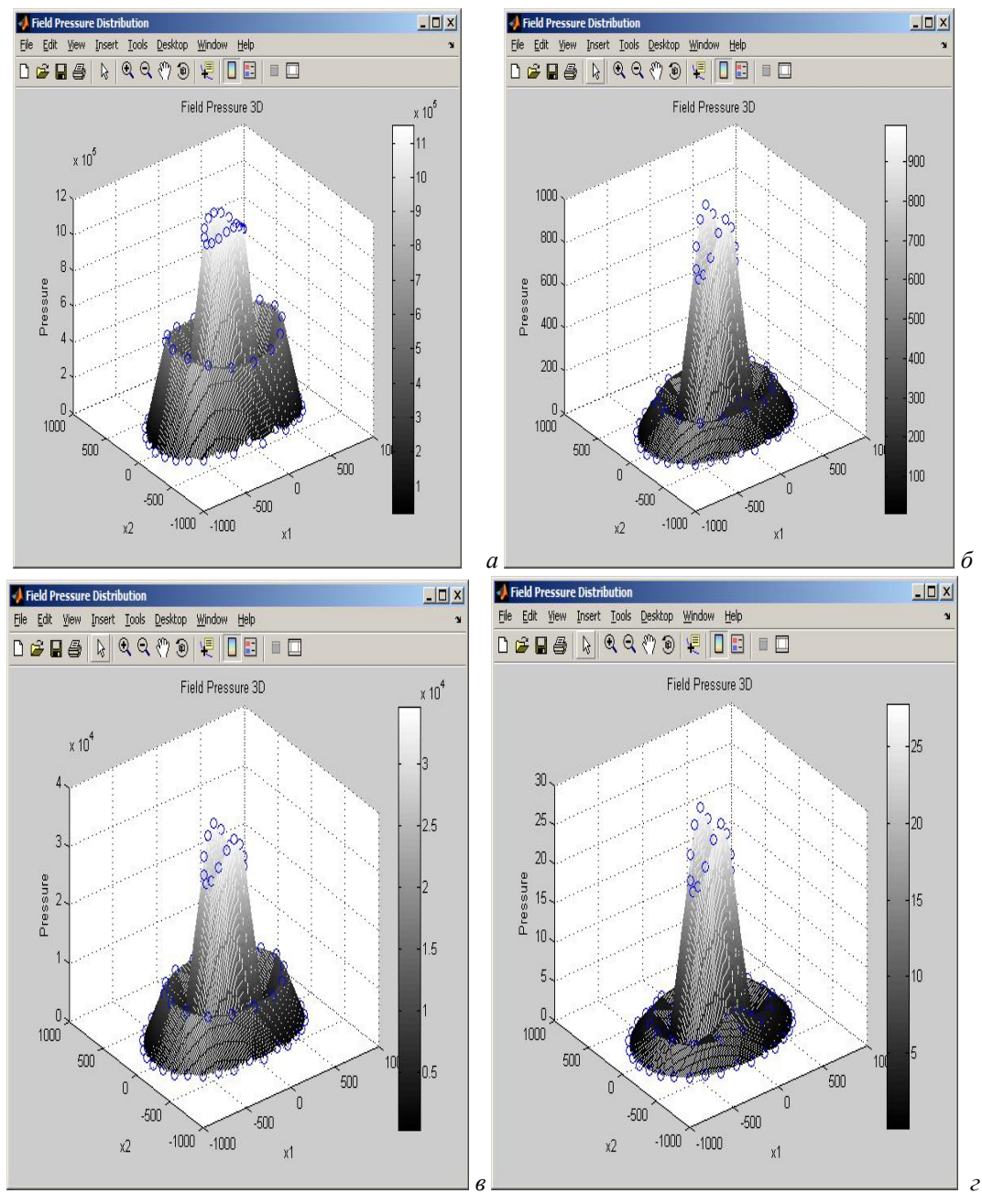


Рис.2 Розподіл тиску у різні моменти часу: 4 дні(а), 8 днів(б), 12 днів(в), 16 днів(г)

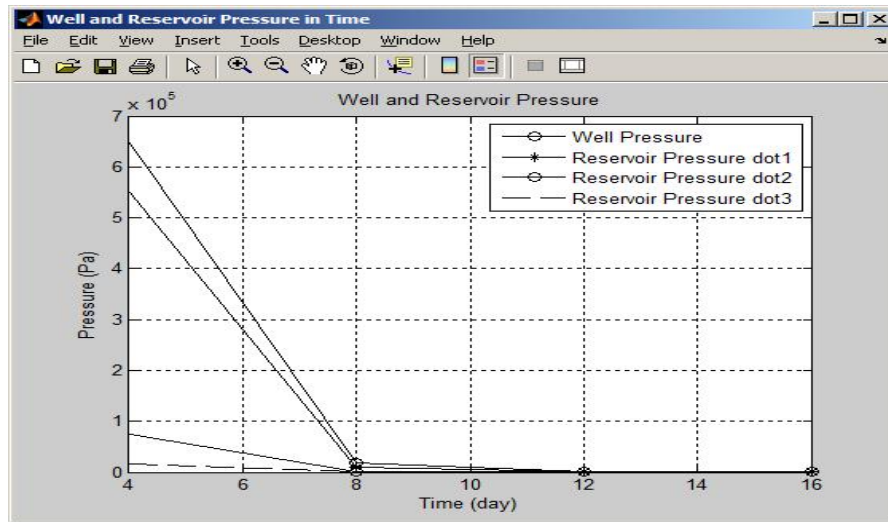


Рис. 3. Залежність тиску від часу в точці свердловини ($x_1=1, x_2=0$ (well pressure)) і в точках пласта ($x_1=400.5, x_2=0$ (dot2); $x_1=600.25, x_2=0$ (dot1); $x_1=800, x_2=0$ (dot3))

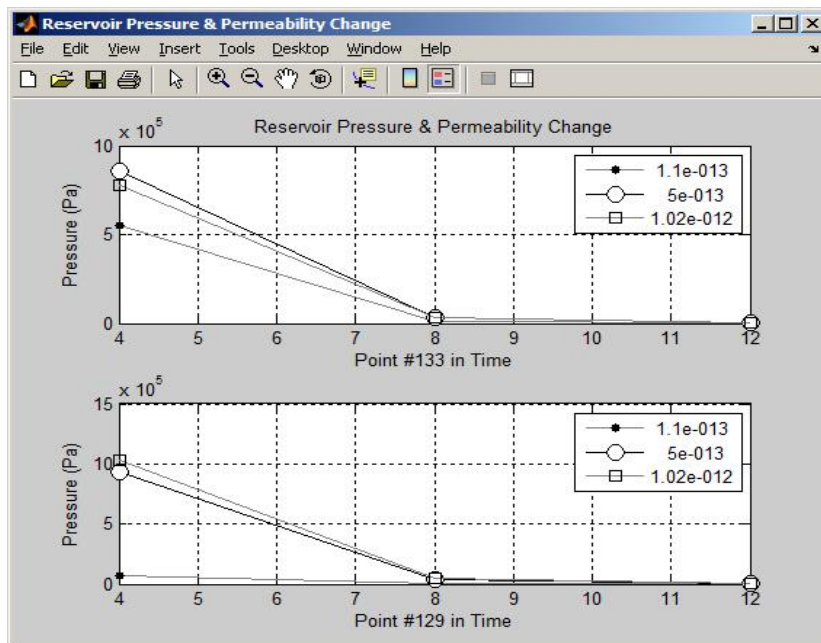


Рис. 4. Залежність зміни тиску у часі від зміни коефіцієнта проникності в точках пласта $x_1=600.25, x_2=0$ (point #129); $x_1=800, x_2=0$ (point #133)

Висновки

Побудовано математичну модель зміни в часі тиску у двовимірному однорідному пласті з криволінійною межею з урахуванням розміру свердловини, заданого на її контурі дебіту та гідронепроникності зовнішньої межі пласта. Для знаходження розв'язку задачі використано непрямий метод граничних елементів спільно з часовою схемою послідовності початкових умов, що дало змогу точно задовольнити рівняння в усій досліджуваній області та контролювати похибку задоволення граничних умов на її межах (внаслідок можливості вибору кількості граничних елементів). Здійснено програмну реалізацію запропонованого чисельно-аналітичного підходу з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних та часових параметрів на розподіл тиску у пласті.

Розроблену методику можна легко розширити для врахування інших типів граничних умов, заданих на зовнішній межі та контурі свердловини, зокрема тисків чи змішаних умов, а також для розгляду впливу кількох свердловин, що ми і плануємо здійснити під час подальших досліджень.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с. 2. Бойко В.С. Розробка та експлуатація нафтових родовищ. – К.: Реал-Принт, 2004. – 695 с. 3. Бойко В.С., Бойко Р.В. Підземна гідрогазомеханіка: Підручник. – Львів: Апріорі, 2007. – 452 с. 4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с. 5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с. 6. Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с. 7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. // Под ред. А.А. Абрамовица и И. Стиган: Пер.с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

УДК 004.4'232

В. Овсяк^{1,2}, М. Нізьолек², Ю. Петрушка¹

¹Українська академія друкарства, Львів, Україна;

²Політехніка Опольська, Ополь, Польща

МОДЕЛЬ ГРАФІЧНОГО ІНТЕРФЕЙСУ ЗАДАННЯ ПАРАМЕТРІВ СКЛАДЕНОГО УНІТЕРМУ

© Овсяк В., Нізьолек М., Петрушка Ю., 2011

Алгеброю алгоритмів описано модель графічного вікна задання параметрів складених унітермів. Наведено програмну реалізацію моделі.

Ключові слова: алгебра алгоритмів, модель, функційний унітерм, унітерм, складений унітерм.

Algebra algorithms described model graphic window setting parameters compound uniterms. An implementation program model.

Keywords: algebra of algorithms, model, featured uniterm, uniterm, made uniterm.

Вступ і формулювання задачі

Алгоритми засобами розширеної алгебри алгоритмів [1] описуються у вигляді математичних формул. Для автоматизації процесів набору і редагування формул алгоритмів створено спеціалізовані комп'ютерні редактори [2–4]. Формули алгоритмів утворені тривіальними унітермами, розділювачами тривіальних унітермів і знаками операцій. Тривіальні унітерми є текстовими і графічними знаками. Абстрактний графічний тривіальний унітерм є зафарбованим у сірий колір прямокутником з розмірами 7x12 одиниць. Знаки текстових унітермів утворені одним або низкою текстових символів. Знаки операцій алгебри алгоритмів, порівняно із знаками операцій класичної алгебри є складними графічними знаками. Формули алгоритмів, які утворені тривіальними унітермами і знаками операцій алгебри алгоритмів, є складними математичними виразами.

Зменшити складність формул алгоритмів можна введенням складених унітермів. Складеними є унітерми, які утворено з двох і більше тривіальних унітермів. Для задання параметрів складених унітермів, якими є кількість тривіальних унітермів складеного унітерму, видимість і невидимість тривіальних унітермів складеного. Створення моделі графічного вікна для задання параметрів складених унітермів і є предметом даної роботи.

Модель графічного вікна

Створена і описана розширеною алгеброю алгоритмів [1] модель інтерфейсного вікна для задання параметрів складеного унітерма наведена формулою (1). Модель вікна $ISU(x):W_i$ наслідуює (: – ідентифікатор наслідування) підсистему W_i операційної системи Windows і відображається на x . Підсистема W_i реалізована відомим класом Window [5, 6]. У формулі (1) використовуються такі позначення: $xs()=Wpf$ – підключення системних ресурсів відомої платформи Windows Presentation