

макромеханізму формування електроретиносигналу для задач підвищення достовірності офтальмодіагностичних систем : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / М.О. Хвостівський; Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя. – Т. : 2010. – 20 с. 9. Дозорський В. Обґрунтування математичної моделі фрикативного звуку у вигляді періодично корельованого випадкового процесу / Я. Драган, Є. Яворська, В. Дозорський // Вісник тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя. – Тернопіль : ТНТУ ім. І. Пулюя, 2010. – Т15, №10. – С. 159–164. 10. Дедів І. Обґрунтування математичної моделі дихальних шумів у вигляді періодично корельованого випадкового процесу / Я. Драган, І. Дедів // Науковий вісник Чернівецького університету. Фізика. Електроніка. ЧНУ – Чернівці: Рута. – 2008. – Вип. 423. – Ч. II. – С. 93–97. 11. Джичка Н. Обґрунтування математичної моделі коливань голосових зв'язок людини у вигляді періодично корельованого випадкового процесу для задачі діагностування мікропошкоджень голосових зв'язок // Вісник Національного університету «Львівська політехніка» – 2011. – №694. – С. 232–239. 12. Драган Я.П. Математичне й алгоритмічно-програмне забезпечення комп'ютерних засобів статистичного опрацювання стохастичних коливань (ритмічних процесів) // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». – 2008 – №621. – С.124–130. 13. Драган Я.П., Сікора Л.С., Яворський Б.І. Основи сучасної теорії стохастичних сигналів: енергетична концепція, математичний апарат, фізичне тлумачення. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біотехнічних систем, 1999. – 133 с. 14. Информационные связи био-гелио-геофизических явлений и элементы их прогноза / К.С. Войчишин, Я.П. Драган, В.И. Куксенко, В.Н. Михайловский. – К.: Наукова думка, 1983. – 366 с.

УДК 621.39

Я. Соколовський, В. Шиманський

Національний лісотехнічний університет України

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

© Соколовський Я., Шиманський В., 2011

Розглянуто фрактальну модель неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах, що описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком. Різницевим методом отримано числовий розв'язок задачі для різних значень дробової похідної.

Ключові слова: похідна дробового порядку, фрактальна, тепломасоперенесення, капілярно-пористий, числовий метод.

There was considered fractal model of non-isothermal moisture transfer in capillary-porous materials which is described by the system of differential equations in partial derivatives with fractional order. The difference method receives the numerical decision of a problem at various orders of a fractional derivative.

Keywords: fractional order derivative, fractal, heat and mass transfer, capillary-porous, numerical method.

Актуальність досліджень

Особливість фізичних систем з фрактальною структурою полягає в тому, що для них істотні такі властивості, як: “пам'ять”, складна природа просторових кореляцій та ефекти самоорганізації. Створення адекватних математичних моделей для систем з фрактальною структурою вимагає залучення нетрадиційних підходів, заснованих на застосуванні математичного апарату диференціальних рівнянь

дробового порядку. Системи, які можуть бути описані рівняннями в дробових похідних, повинні містити канали, що входять до складу розгалуженої фрактальної структури. Показник дробової похідної за часом відповідає ясткки каналів (гілок), відкритих для протікання [8].

Аналіз існуючих досліджень [4–6] свідчить про те, що аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь дробової дифузії виявляються малоефективними, а теорія числових методів їх вирішення має фрагментарний характер і далека від завершення.

У цій роботі використано чисельний метод предиктор-коректор для знаходження розв’язку системи диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку [8].

Постановка задачі

Фрактальна модель тепло- та масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком

$$\begin{cases} cT \frac{\partial^a T}{\partial t^a} = I_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + I_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + er_0 r \frac{\partial^a u}{\partial t^a} \\ \frac{\partial^a u}{\partial t^a} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a_1 d \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + a_2 d \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \end{cases} \quad (1)$$

і відповідними початковими умовами

$$T|_{t=0} = T_0(x); \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad (2)$$

та граничними умовами 3-го роду

$$\begin{cases} I_i \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + r_0(1-e)b(u|_{x_i=l_i} - u_p) = a_i(T|_{x_i=l_i} - t_c) \\ a_i d \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} + a_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_i=l_i} = b(u_p - u|_{x_i=l_i}) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0 \\ a_i d \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x_i=0} + a_i \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_i=0} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

де u – вологовміст; T – температура; t – час; $I_i(T, u)$ – коефіцієнти теплопровідності; $a_i(T, u)$ – коефіцієнти вологопровідності; n – зовнішня нормаль; $u_p(t_c, j)$ – рівноважний вологовміст, що є функцією від температури середовища t_c та відносної вологості зовнішнього середовища j ; $c(T, u)$ – питома теплоємність; $r(u)$ – густина; r_0 – базисна густина; e – коефіцієнт фазового переходу; n – швидкість руху агента сушіння; r – питома теплота пароутворення; $a_i(t_c, n)$ – коефіцієнти теплообміну; $b(t_c, j, n)$ – коефіцієнт вологообміну; $d(T, u)$ – термоградієнтний коефіцієнт; a – дробовий порядок похідної (характеризує частку каналів, відкритих для протікання);

Параметр $0 < a < 2$. Можна визначити два типи дифузії. Субдифузія характеризується значенням параметра $0 < a < 1$, супердифузія – $1 < a < 2$. У субдифузії частинки рухаються повільніше, у супердифузії швидше ніж у звичайній дифузії ($a = 1$) [3-6].

Числовий метод розв’язання диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку

Розглянемо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує процес тепло- та масоперенесення у середовищах з фрактальною структурою, що має вигляд (1). Приймається, що дробова похідна порядку a на відрізку $[t^n; t^{n+1}]$ є похідною Рімана–Ліувілля:

$$\frac{\partial^a f}{\partial t^a} \Big|_{t^n} = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \left[\frac{u(t^n)}{(t^{n+1} - t^n)^a} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{u'(x)}{(t^{n+1} - t^n)^a} dx \right],$$

де $\Gamma(a)$ – гамма-функція

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

n – індекс відповідного часового інтервалу $[t^n; t^{n+1}]$.

Представимо похідну $f'(x)$ на відрізку $[t^n; t^{n+1}]$ у вигляді скінченної різниці

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} (\Delta t = t^{n+1} - t^n)$$

Запишемо різницеву апроксимацію похідної дробового порядку a на відрізку $[t^n; t^{n+1}]$ так

$$\left. \frac{\partial^a f}{\partial t^a} \right|_{t^n} = \frac{u^{n+1} - au^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} \quad (5)$$

Тоді явна різницєва схема для системи диференціальних рівнянь (1) з дробовою похідною порядку a ($0 < a < 1$) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} c r \frac{T_{ij}^{n+1} - a T_{ij}^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} = I_1 \frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + I_2 \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_y^2} + \\ \quad e r_0 r \frac{u_{ij}^{n+1} - a u_{ij}^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} \\ \frac{u_{ij}^{n+1} - a u_{ij}^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} = a_1 \frac{u_{i-1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1j}^n}{h_x^2} + a_2 \frac{u_{ij-1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij+1}^n}{h_y^2} + \\ \quad a_1 d \frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_x^2} + a_2 d \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_y^2} \end{array} \right. \quad (6)$$

де $h_x = x_{i+1} - x_i$, $h_y = y_{i+1} - y_i$.

Неявна схема буде такою:

$$\left\{ \begin{array}{l} c r \frac{T_{ij}^{n+1} - a T_{ij}^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} = I_1 \frac{T_{i-1j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2} + I_2 \frac{T_{ij-1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2} + \\ \quad e r_0 r \frac{u_{ij}^{n+1} - a u_{ij}^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} \\ \frac{u_{ij}^{n+1} - a u_{ij}^n}{\Gamma(1-a)(1-a)\Delta t^a} = a_1 \frac{u_{i-1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2} + a_2 \frac{u_{ij-1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2} + \\ \quad a_1 d \frac{T_{i-1j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2} + a_2 d \frac{T_{ij-1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2} \end{array} \right. \quad (7)$$

Аналогічно чином формуються різницєві схеми для систем диференціальних рівнянь згідно з граничними умовами (3, 4). Для знаходження числового розв'язку задачі (1)–(4) використовувався метод предиктор-коректор. Як предиктор використовували метод, заснований на явній різницєвій схемі, а як коректор – на неявній.

Отримані результати

Числовий експеримент визначення розподілу вологості та температури у процесі сушіння деревини на основі наведеного алгоритму реалізації фізико-математичної моделі (1)–(4) наведемо для сосни з початковим значенням вологовмісту $u_0 = 0.4$ кг/кг, температури $T_0 = 20$ °C, температурою середовища $t_c = 70$ °C та такими умовами процесу сушіння деревини: $j = 60\%$, $v = 2$ м/с (j, v – відповідно відносна вологість та швидкість агента сушіння) [1, 7].

На рис.1, 2 відповідно наведено розподіл вологи та температури на взірці залежно від часу для порядку дробової похідної, що дорівнює $a = 1$. Розподіл вологи та температури розглядається за першу годину сушіння. За взірець береться брусок з такими розмірами $[l_1 \times l_2]$, де l_1 та l_2 – половини геометричних розмірів.

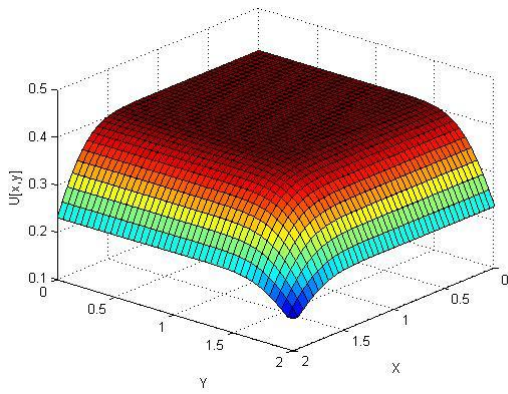


Рис. 1

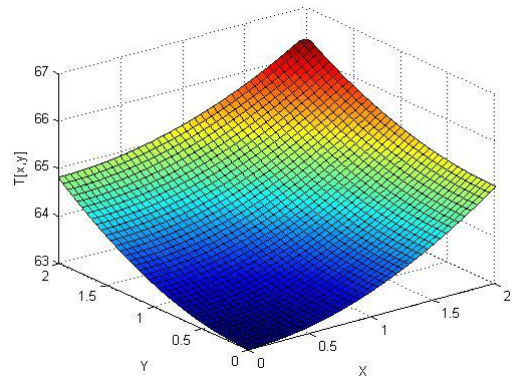


Рис. 2

На рис.3, 4 відповідно наведено розподіл вологи та температури на взірці залежно від часу для порядку дробової похідної, що дорівнює $\alpha = 0.9$.

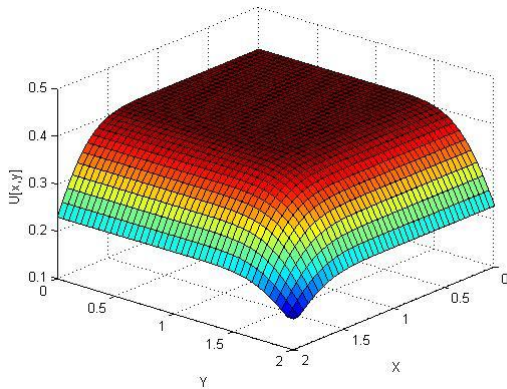


Рис. 3

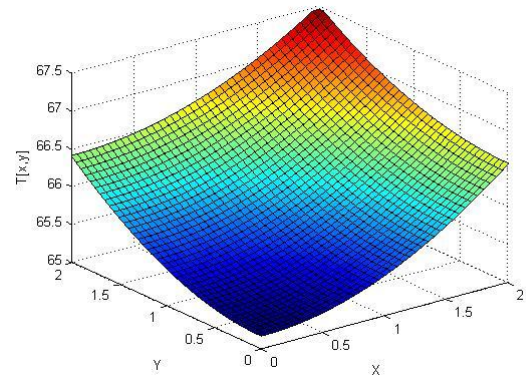


Рис. 4

Проаналізувавши отримані результати та графічні залежності на рис. 1–4 можна зробити висновок, що вологовиділення стає інтенсивнішим із зростанням температури взірця.

На рис.5 наведено розподіл вологи у точці $A(0;0)$, що є центром взірця, залежно від часу для порядку дробової похідної, що дорівнює $\alpha = 0.9$. На рис.6 наведено розподіл вологи у точці $A(0;0)$ залежно від часу для порядків дробової похідної, що дорівнюють $\alpha = 1$ та $\alpha = 0.9$ відповідно.

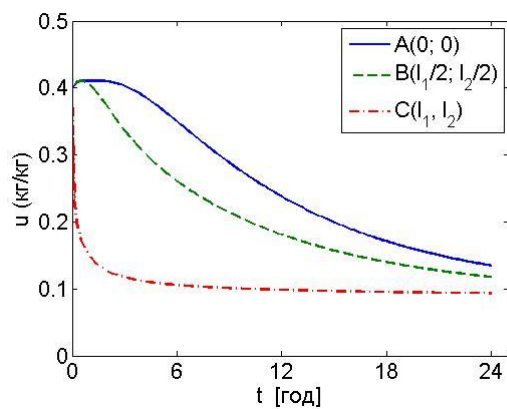


Рис. 5

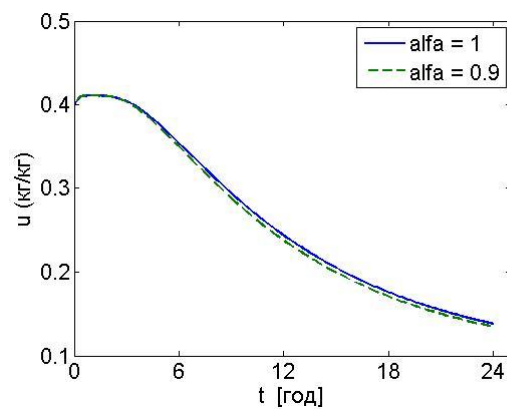


Рис. 6

Проаналізувавши графічні залежності, зображені на рис.5, можна зробити висновок, що вологовиділення стає інтенсивнішим у мірі просування із центру взірця до його границі.

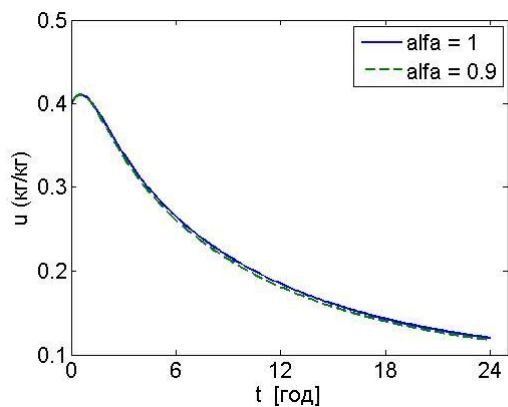


Рис. 7

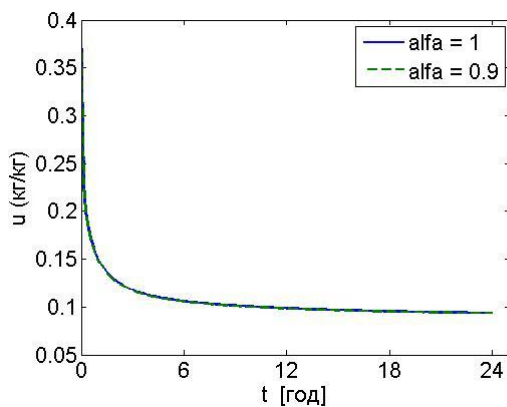


Рис. 8

На рис. 7, 8 наведено розподіл вологи у точках $B(\frac{l_1}{2}; \frac{l_2}{2})$ та $C(l_1; l_2)$ залежно від часу для порядку дробової похідної, що дорівнює $a = 0.9$. З графічних залежностей на рис. 6, 7, 8 випливає те, що із зменшенням порядку дробової похідної спостерігається явище сповільнення процесу вологовиділення, що є характерним для явища субдифузії. Адже показник дробової похідної за часом відповідає частки каналів (гілок), відкритих для протікання, тому розглядаючи процес темпота масоперенесення при порядку дробової похідної, що дорівнює $a = 0.9$ ми приймаємо, що тільки 90% каналів у деревині є відкритими для протікання процесу. Також можна зазначити, що це явище більше впливає на розподіл вологи у центрі взірця, ніж на його границі.

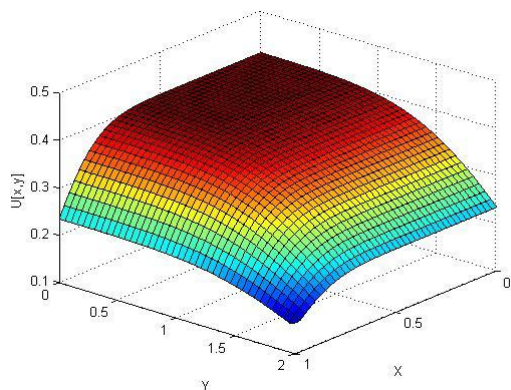


Рис. 9

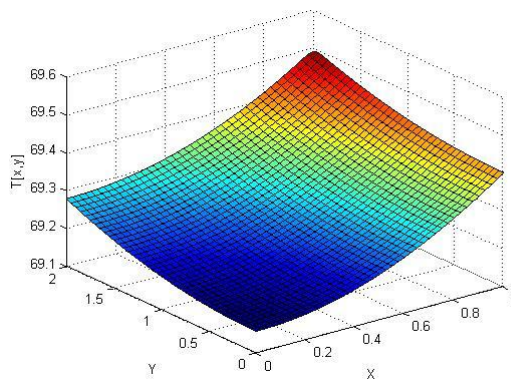


Рис. 10

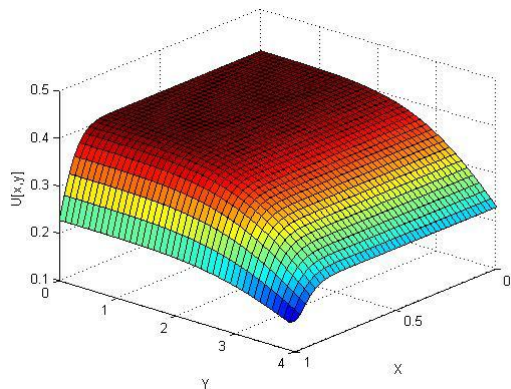


Рис. 11

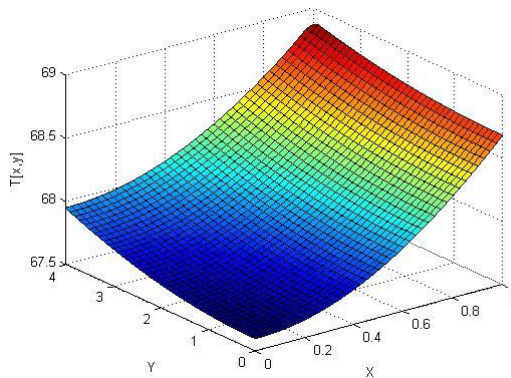


Рис. 12

Проаналізуємо вплив геометричних розмірів на процес тепло та вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою на прикладі розподілу температури. На рис. 9, 10, 11, 12 наведемо розподіл вологості та температури на взірцях, сторони яких співвідносяться як $m \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$ та

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{4} \text{ відповідно.}$$

У процесі сушіння деревини ми на взірець діємо певною сталою температурою. Також можна сказати, що температурні та вологісні поля взірця напряму залежать від його геометричних розмірів. З рис. 9–12 видно, що із збільшенням геометричного розміру збільшується вплив зовнішнього середовища на взірець через границю, що відповідає цьому розміру.

1. Соколовський Я.І., Бакалець А. *Моделювання нелінійних тепломасообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів*// Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2005, вип. 543. – С. 129–134. 2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. 3. Y.Z. Povstenko / *International Journal of Engineering Science*, 43 (2005): 977–991. 4. Y.Z. Povstenko / *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007): 2324–2348. 5. Y.Z. Povstenko / *Journal of Thermal Stresses*, 28: 83–102, 2005. 6. Бейбалаев В.Д. *Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой : автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Махачкала, 2009. – 18 с.* 7. Соколовський Я.І., Шиманський В.М. *Двовимірна математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою* // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України. – 2011. – Вип. 21.2. – С. 341–348. 8. Соколовський Я., Шиманський В. *Фрактальна модель тепло- та масо перенесення у капілярно-пористих матеріалах* // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2011, № 694. – С. 424–428.

УДК 504.75:681.2.543

Р. Джала, В. Юзевич, М. Мельник, О. Чабан*

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів),

* Державний науково-дослідний інститут метрології,

вимірювальних і управляючих систем (ДНД "Система") (Львів)

МОДЕЛЮВАННЯ АДГЕЗІЙНОГО ШАРУ НА МЕЖІ “МЕТАЛ-ДІЕЛЕКТРИК”

Ї Джала Р., Юзевич В., Мельник М., Чабан О., 2011

Описано методологію математичного моделювання адгезійного шару на межі «метал–діелектрик». Для перехідної області визначено ємність, ефективну товщину подвійного електричного шару, роботу адгезії, енергію адгезійних зв’язків.

Ключові слова: метал, діелектрик, моделювання, міжфазна енергія, адгезія.

Methodology of mathematical modelling of adhesion layer on a interface "metal–dielectric " is described . For a transitional area a capacity, effective thickness of double electric layer, work of adhesion and energy of adhesive bonds is determine.

Keywords: metal, dielectric, modelling, interface energy, adgesion.

Вступ

Для прогнозування якості антикорозійних (діелектричних) покриттів на поверхнях металу (сталей) різного призначення необхідно знати розподіл механічних напружень поблизу границі розділу контактуючих середовищ і характер адгезійних зв’язків [1]. Слід зазначити, що існуючі