порядка/ М.Ю. Альес, С.П. Копысов, А.К. Новиков// Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, №2. – С. 43 – 45. 9. Копысов, С.П. Комбинированное уточнение по p – и h-версии МКЭ при решении трехмерных задач теории упругости/ С.П. Копысов, С.Л. Устюжанин // XIII Всероссийской конференции посвященной памяти К.И. Бабенко «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики». – Пущино: 2000. 10. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals/ Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhov. Z.// Elsevier. Oxford, 6-th Edition, 2005. – 792 p. 11. Коваль В. Генерація адаптивних сіток з чотиризначних елементів у скінченно-елементному аналізі/ В. Марал, Я. Савула// Вісник Львівського національного університету ім. І. Франка, серія «Прикладна математика та інформатика». – 2002. – №10. – С. 64 – 71. 12. Макар В. Автоматизована числова схема розв'язання крайових задач на основі h-адаптивного методу скінченних елементів/ В. Макар, О. Куліш// Вісник національного університету «Львівська політехніка», 2011, №694, стор. 406 – 413. 13. Копысов С.П. Реализация объектно-ориентированной модели метода безконечных областей на основе параллельных распределённых элементов// С.П. Копысов, И.В. Краснопёров, В.Н. Рычков// Вычислительные методы и программирование. – 2003. –Т.4., №1. – с.194 – 206. 14. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами/ Я.Г. Савула. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – с. 222. 15. Sokolowskjy Ya. Mathematical simulation of deformatical and relaxation process in capillary-porous materials/ Ya. Sokolowskjy, O. Mokritska// Forestry, Forest, Paper and Woodworking Industry, 2010, №36. p.116 – 124. 16. Соколовський Я.І. Математична модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів/ Я. Соколовський, О. Мокрицька// Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів, НЛТУ України, 2011, Вип. 21.2. стр. 320 – 328. 17. JAMA: A Java Matrix Package [електронний ресурс]. – http://math.nist.gov/javanumerics./jama/ 18. Соколовський Я.І. Методика та результати експерименту нових досліджень реологічної поведінки деревини/ Я. Соколовський, Й. Андреняк/ Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів, УкрДЛТУ. – 1999. – Вип. 9.13. – С. 15 – 26.

УДК 531.36+534

І. Дронюк
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра автоматизованих систем управління

МОДЕЛЮВАННЯ ЗБУРЕНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ ЗАСОБАМИ ATEB-ФУНКЦІЙ

ã Дронюк І., 2011

Здійснено моделювання періодичних процесів у коливних системах на основі Ateb-функцій без збурень. Розглянуто типи малих збурень, які діють на коливну систему. Розроблено відповідне програмне забезпечення, яке подає результати у графічному і табличному вигляді.

Ключові слова: Ateb-функції, коливні системи з малим збуренням, моделювання.

A simulation of periodic processes in vibration systems based on Ateb-functions without perturbation was done. The types of small perturbations that act on the vibration system are considered . Appropriate software that provides results in graphical and tabular form is developed.

Keywords: identification, Ateb-function, oscillating system with small pertubation, simulation.

Вступ

Методи математичного моделювання коливних процесів ґрунтуються на диференціальних рівняннях. Побудова точних розв'язків ґрунтується на асимптотичних методах та теорії Ateb–

функцій [1]. Аналогічні задачі розглядались в роботах [2–4]. У цій роботі запропоновано застосовувати теорію Ateb–функцій до задачі растрування у поліграфії. Цифровий растр можна подати як періодичну структуру, яку в межах одного періоду можна задати певною функцією [5]. Відомо, що Ateb–функції при заданих значеннях параметрів є періодичними. Тому пропонується побудувати растр у межах однієї елементарної площі у вигляді півперіоду Ateb-функції. На всю площину зображення елементарна площа повторюється за законом періодичності Ateb-функції.

Постановка проблеми

Проблема моделювання періодичних процесів у нелінійних системах, задача побудови та прогнозування поведінки таких систем є практично важливим. Це зумовлює актуальність розроблення методів моделювання таких систем. Запропонована модель нелінійної коливної системи з одним ступенем вільності, рух якої описується звичайним диференціальним рівнянням другого порядку та розв'язана задача моделювання на основі теорії Ateb-функцій. Застосування отриманих результатів моделювання коливної системи без збурення та з малими збуреннями до побудови періодичних растрів розглянуто у статті.

Виклад основного матеріалу

Нехай коливна система з одним степенем вільності описується диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} + c^2 x^{\nu} = 0, \tag{1}$$

де стала $c^2 > 0$, показник степені задається виразом

$$\nu = \frac{2\nu_1 + 1}{2\nu_2 + 1}, \left(\nu_1, \nu_2 = 0,1,2,\ldots\right)$$

Розглянемо побудову розв'язків такого рівняння із використанням періодичних Ateb-функцій.

Для випадку $\nu \neq 1$ коливання будуть періодичні, і представлення розв'язків має вигляд [3]

$$x = a \cdot u(y) = a \cdot Ca(\nu, 1, q), \tag{2}$$

$$x = h \cdot a^{\frac{\nu+1}{2}} \cdot u(y) = h \cdot a^{\frac{\nu+1}{2}} \cdot Sa(1, \nu, q)$$

де $h^2 = \frac{2c^2}{\nu+1}$.

У виразі (3) a – амплітуда та y – фазовий кут обертання. Оскільки обертання рівномірне, то справедливе співвідношення:

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = \frac{w(a)}{L}, \left(y = \frac{w(a)}{L} \cdot t + y_0\right).$$

Амплітуда a і початкова фаза y_0 коливань будуть постійними в часі величинами, що залежать від заданих початкових умов.

Нехай до коливної системи уведено мале збурення, що задається силою $F(x, \dot{x}, e)$. Тоді така система буде описуватися диференціальним рівнянням виду

$$\ddot{x} + c^2 x^{\nu} = eF(x, \dot{x}, e), \tag{3}$$

де e – малий додатний параметр, $F(x, \dot{x}, e)$ – неперервна функція своїх змінних $x, \dot{x}$ і параметра e. Причому справедливий розклад за малим параметром

$$F(x, \dot{x}, e) = F_1(x, \dot{x}) + eF_2(x, \dot{x}) + e^2 F_3(x, \dot{x}) + \ldots .$$

Нелінійна відновлювальна сила $c^2 x^{\nu}$ та нелінійне збурення приводять до виникнення у розв'язках рівняння (3) обертових складових, які обумовлюються залежністю миттєвої частоти $\dot{y}$ від амплітуди. Нелінійне збурення може викликати систематичне збільшення чи зменшення

амплітуди коливань залежно від збільшення чи зменшення енергії збурювальної сили. Розв'язок рівняння (3) шукатимемо у вигляді розкладу

$$x = au(y) + eU_1(a,u) + e^2U_2(a,u) + e^3\ldots \tag{4}$$

де $u(y) = Ca(v,1,q)$, $q = \dfrac{y \cdot L \cdot h \cdot (v+1)}{2}$ $\quad h^2 = \dfrac{2c^2}{v+1}$, $L = \dfrac{1}{p \cdot h \cdot (v+1)} \cdot B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{v+1}\right)$

а $B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{v+1}\right)$-Beta-функція, функції $U_1(a,u), U_2(a,u),\ldots$ є періодичними функціями кута y з періодом $2p$. Величини a, y як функції часу визначаються диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = e \cdot A_1(a) + e^2 \cdot A_2(a) + \ldots \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{w(a)}{L} + e \cdot B_1(a) + e^2 \cdot B_2(a) + \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Функції $w(a), U_n(a,u)$, $A_n(a)$ і $B_n(a)$ визначаємо так, щоб вираз (3), в який замість a та y будуть уведені функції, що визначені рівняннями (5), задовольнятимуть вихідне рівняння (1) з точністю до величин порядку e^{n+1}.

Коли будуть знайдені вирази для коефіцієнтів розкладів, що стоять в правих частинах рівнянь (5) та (4), інтегрування рівняння (1) зводиться до системи диференціальних рівнянь з розділеними змінними.

Зауважимо, що функціональний ряд (4) при виконанні умов, накладених на функцію $F(x, \dot{x}, e)$, є збіжним.

Як показано в працях [1, 3, 4], за допомогою розкладів (4) можна отримати наближені розв'язки рівняння (4), які задовольняють рівняння (1) з похибкою порядку e^{n+1}.

Уведемо позначення:

$$V_1(a,u) = A_1(a) \cdot \frac{\partial U_1}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy}, \tag{6}$$

$$W_1(a,u) = A_1(a) \cdot \frac{\partial A_1(a)}{\partial a} \cdot u(y) + a \cdot A_1(a) \cdot \frac{\partial B_1(a)}{\partial a} \cdot \frac{du}{dy} +$$

$$+ \frac{1}{L} \frac{dw(a)}{da} \cdot A_1(a) \cdot \frac{\partial U_1}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} + 2 \cdot A_1(a)$$

$$2\frac{w(a)}{L} \cdot A_1(a) \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \cdot \partial u} \cdot \frac{du}{dy} + aB_1^2(a) \cdot \frac{d^2u}{dy^2} +$$

$$2\frac{w(a)}{L} \cdot B_1(a) \cdot \left[\frac{\partial U_1}{\partial u} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right].$$

Здійснюючи диференціювання правої частини розкладу (4) із врахуванням виразу (5) та позначень (6), знаходимо:

$$\dot{x} = a \cdot \frac{w(a)}{L} \cdot \frac{du}{dy} + e \cdot \left\{ A_1(a) \cdot u(y) + \frac{w(a)}{L} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} + \right.$$

$$\left. a \cdot B_1(a) \cdot \frac{du}{dy} \right\} + e^2 \cdot \left\{ A_2(a) \cdot u(y) + a \cdot B_2(a) \frac{du}{dy} + \frac{w(a)}{L} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} + V_1(a,u) \right\} \tag{7}$$

$$\ddot{x} = a \cdot \frac{w^2(a)}{L^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} + e \cdot \left\{ \left[\frac{a}{L} \cdot \frac{dw(a)}{da} \cdot \frac{du}{dy} + 2\frac{w(a)}{L} \cdot \frac{du}{dy} \right] \cdot A_1(a) + \right.$$

$$+2a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot B_1(a)\cdot\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\left[\frac{\partial U_1}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2U_1}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]+e^2\left\{\frac{2w(a)}{L}\cdot A_2(a)+2a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot B_2(a)\cdot\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\left[\frac{\partial U_2}{\partial u}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\right.\right. \quad (8)$$

$$\left.\left.\frac{\partial U_2}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}\right]+W_1(a,u)\right\}.$$

Розкладемо функцію

$$\overline{F}(x,\&)=-c^2x^\nu+eF_1(x,\&)+e^2F_2(x,\&)+... \quad (9)$$

в ряд Тейлора в околі

$$x=a\cdot u(y), \quad (10)$$

$$\&=a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}. \quad (11)$$

Тоді вираз (9) буде представлений таким чином

$$\overline{F}(x,\&)=-c^2a^\nu u^\nu(y)+e\left\{F_1\left(a\cdot u(y),a\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)-\right.$$

$$-\nu\cdot c^2\cdot a^{\nu-1}\cdot u^{\nu-1}(y)\cdot U_1(a,u)+e^2\left\{-\nu\cdot c^2\cdot a^{\nu-1}\cdot u(y)\cdot U_2(a,u)-\right.$$

$$-\frac{\nu(\nu-1)}{2!}\cdot c^2\cdot a^{\nu-2}\cdot u^{\nu-2}(y)U_1^2(a,u)+F'_{1x}\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)\cdot U_1(a,u)+ \quad (12)$$

$$+F_2\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)+F'_{1x}\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)\cdot\left[u(y)\cdot A_1(a)+\right.$$

$$\left.\left.+a\cdot\frac{du}{dy}\cdot B_1(a)+a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\cdot\frac{\partial U_1(a,u)}{\partial u}\right]\right\}+...$$

Для того, щоб вираз (4) задовольняв вихідне рівняння (3) з точністю до величин порядку e^{n+1}, необхідно, підставляючи вирази (7), (8) та (12) у рівняння (3), прирівняти коефіцієнти при однакових степенях параметра e до членів n-го порядку включно.

У результаті отримаємо такі рівняння

$$a\cdot\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}=-c^2a^\nu u^\nu(y) \quad (13)$$

$$\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^2\cdot\frac{\partial^2U_1(a,u)}{\partial u^2}+\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{\partial U_1(a,u)}{\partial u}+ \quad (14)$$

$$+\nu\cdot c^2\cdot a^{\nu-1}\cdot u^{\nu-1}(y)\cdot U_1(a,u)=\Phi_1(a,u)-a(a,u)\cdot A_1(a)-b(a,u)\cdot B_1(a)$$

...

$$\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^2\cdot\frac{\partial^2U_n(a,u)}{\partial u^2}+\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{\partial U_n(a,u)}{\partial u}+$$

$$+\nu\cdot c^2\cdot a^{\nu-1}\cdot u^{\nu-1}(y)\cdot U_n(a,u)=\Phi_n(a,u)-a(a,u)\cdot A_n(a)-b(a,u)\cdot B_n(a), \quad (15)$$

де введено позначення:

$$a(a,u)=\frac{\nu+3}{2}\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy},$$

$$b(a,u)=2a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{d^2u}{dy^2},$$

$$\Phi_1(a,u)=F_1\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right), \tag{16}$$

$$\Phi_2(a,u)=-\frac{v(v-1)}{2!}\cdot c^2\cdot a^{v-2}\cdot U_1^{\,2}(a,u)\cdot u(y)+F'_{1x}\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)\cdot U_1^2(a,u)+ \tag{17}$$

$$+F_2\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)+F_{1x}'\left(a\cdot u(y),a\cdot\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{du}{dy}\right)\cdot\left[A_1(a)\cdot u(y)+\right.$$

$$\left.+a\cdot B_1(a)+\frac{w(a)}{L}\cdot\frac{\partial U_1(a,u)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy}\right]-W_1(a,u).$$

Вираз $\Phi_n(a,u)$ визначається аналогічно формулі (17).

Праві частини рівнянь (13) – (15) будуть відомі до n-го порядку включно, якщо визначити вирази $A_n(a)$, $B_n(a)$ та $U_n(a,u)$.

Для визначення $A_i(a)$, $B_i(a)$ та $U_i(a,u)$ з рівнянь (13) – (15), спочатку розглянемо їх однорідні диференціальні рівняння $i=2,...,n$. Розглянемо випадок $i=n$

$$L_1(a,u)=\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\frac{\partial^2U_n(a,u)}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{w^2(a)}{L^2}\cdot\frac{\partial U_n(a,u)}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}+$$

$$+v\cdot w^2(a)\cdot U_n(a,u)\cdot u^{v-1}=\Phi_1(a,u)-a(a,u)\cdot A_n(a)-b(a,u)\cdot B_n(a).$$

Часткові розв'язки для однорідного рівняння (14) можна записати у вигляді:

$$U_n^{(1)}(a,u)=(-1)^k\cdot L\cdot h\cdot\sqrt{1-u^{v+1}}, \tag{18}$$

$$U_n^{(2)}(a,u)=\frac{(-1)^k}{L\cdot h}\cdot\sqrt{1-u^{v+1}}\cdot\int_0^u\left(1-\overline{u}^{v+1}\right)^{\frac{-3}{2}}d\overline{u}, \tag{19}$$

де $k=0,1,2,3,...$.

Розв'язки (18) та (19) можна представити через періодичні Ateb-функції

$$U_n^{(1)}(a,u)=L\cdot h\cdot Sa(1,v,q), \tag{20}$$

$$U_n^{(2)}(a,u)=\frac{1}{L\cdot h}\cdot\left[\frac{2}{v+1}\cdot Ca(v,1,q)+B_u\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right)\cdot Sa(1,v,q)\right] \tag{21}$$

де B_u – неповна Beta-функція.

Оператор $L_1(a,u)$ задовольняє умови

$$\int_{-1}^{1}L_1(a,u)du=0; \tag{22}$$

$$\int_{-1}^{1}L_1(a,u)\,l(a,u)\,du=0;$$

$$l(a,u)=\frac{2}{v+1}\cdot\frac{u}{\sqrt{1-u^{v+1}}}+\frac{v-1}{v+1}\cdot B_u\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right). \tag{23}$$

Виконання цих умов дає можливість однозначно визначити функції (20), (21), де величина a є повною амплітудою першої основної гармоніки коливання.

Інтегруючи (21) та (22) на проміжку $[-1,1]$, отримаємо:

$$\int_{-1}^{1}\Phi_1(a,u)\,du - A_1(a)\cdot\int_{-1}^{1}a(a,u)du - B_1(a)\cdot\int_{-1}^{1}b(a,u)du = 0, \tag{24}$$

$$\int_{-1}^{1}\Phi_1(a,u)\cdot l(a,u)\,du - A_1(a)\cdot\int_{-1}^{1}a(a,u)\cdot l(a,u)\,du - B_1(a)\cdot\int_{-1}^{1}b(a,u)\cdot l(a,u)\,du = 0, \tag{25}$$

Вводячи позначення:

$$a_1(a) = \frac{3h\cdot w(a)}{v+1}\cdot B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{v+1}\right),$$

$$b_1(a) = -2a\cdot w(a)\cdot c^2\cdot L\cdot\int_{-1}^{1}u^v du = 0$$

$$a_2(a) = \int_{-1}^{1}a(a,u)\cdot l(a,u)\,du = 0$$

$$a_2(a) = \int_{-1}^{1}a(a,u)\cdot l(a,u)\,du = 0$$

$$b_2(a) = -\frac{8a\cdot w(a)}{(v+1)^3\cdot L\cdot h^2}\left[(v+3)\cdot B\left(\frac{v+2}{v+1},\frac{1}{2}\right)+(v-1)\cdot B\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{26}$$

Вирази (24), (25) запишуться у вигляді

$$\int_{-1}^{1}\Phi_1(a,u)\,du - a_1(a)A_1(a) = 0,$$

$$\int_{-1}^{1}\Phi_1(a,u)\cdot l(a,u)\,du - b_2(a)B_1(a) = 0, \tag{27}$$

Розв'язуючи рівняння (27) відносно $A_1(a)$ та $B_1(a)$, отримаємо

$$A_1(a) = \frac{1}{a_1(a)}\cdot\int_{-1}^{1}\Phi_1(a,u)du \tag{28}$$

$$B_1(a) = \frac{1}{b_2(a)}\cdot\int_{-1}^{1}\Phi_1(a,u)\cdot l(a,u)\,du \tag{29}$$

Маючи часткові розв'язки (18) та (19) однорідного рівняння (14), запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$U_1(a,u) = \frac{2}{(v+1)\cdot h^2\cdot w(a)}\cdot\left\{u\cdot\int_0^u\Phi_1^*(a,\bar{u})\,d\bar{u} - \sqrt{1-u^{v+1}}\cdot\int_0^u\frac{\Phi_1^*(a,\bar{u})}{\sqrt{1-\bar{u}^{v+1}}}d\bar{u} + \right. \tag{30}$$

$$\left. +(v+1)\cdot\sqrt{1-u^{v+1}}\cdot\left[B_u\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^u\Phi_1^*(a,\bar{u})\cdot B_u\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right)d\bar{u}\right]\right\},$$

де введено позначення

$$\Phi_1^*(a,u) = \Phi_1(a,u) - a(a,u)\cdot A_1(a) - b(a,u)\cdot B_1(a).$$

Після визначення величин $A_1(a)$, $B_1(a)$ та $U_1(a,u)$ можна записати в правій частині рівняння (15) значення функції $\Phi_2(a,u)$. Аналогічно з рівняння (23) визначаємо величини $A_2(a)$, $B_2(a)$ та $U_2(a,u)$.

$$A_2(a)=\frac{1}{a_1(a)}\cdot\int_{-1}^{1}\Phi_2(a,u)du \tag{31}$$

$$B_2(a)=\frac{1}{b_2(a)}\cdot\int_{-1}^{1}\Phi_2(a,u)\cdot l\,(a,u)\,du\,, \tag{32}$$

Де

$$U_2(a,u)=\int_0^u\Phi_2^*(a,\bar{u})\left[U_1^{(1)}(a,\bar{u})-U_2^{(1)}(a,\bar{u})\cdot U_2^{(2)}(a,\bar{u})\right]d\bar{u} \tag{33}$$

$$\Phi_2^*(a,u)=\Phi_2(a,u)-a\,(a,u)\cdot A_2(a)-b\,(a,u)\cdot B_2(a). \tag{34}$$

Продовжуючи викладений метод, визначаємо $A_i(a)$, $B_i(a)$ та $U_i(a,u)$ до n-го порядку включно і розв'язуємо рівняння (3) з точністю до e^{n+1}.

Перший наближений розв'язок рівняння (3) будемо виражати через Ateb-функції.

$$x_I=a\cdot Ca(v,1,y\,)\,, \tag{35}$$

Де a та y визначаються диференціальними рівняннями першого наближення (5) із врахуванням рівнянь (28), (29).

$$\frac{da}{dt}=e\cdot\frac{v+1}{3h\cdot w(a)\cdot B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{v+1}\right)}\cdot\int_0^1\Phi_1(a,u)du \tag{36}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{w(a)}{L}-e\cdot\frac{L\cdot c^2(v+1)^2\int_0^1\Phi_1(a,u)\cdot l\,(a,u)\,du}{4a\cdot w(a)\cdot\left[(v+3)\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{v+2}{v+1}\right)+(v-1)\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{v+1}\right)\right]} \tag{37}$$

Етапи обчислення першого наближення для формули (4) показано на рис. 1.

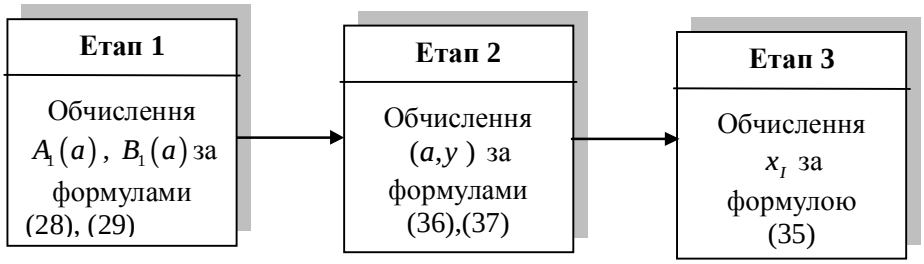

Рис. 1. Етапи обчислення першого наближення розв'язку диференціального рівняння (3)

Друге наближення розв'язку (4), враховуючи вираз (30), виражається співвідношенням

$$x_{II}=a\cdot Ca(v,1,y\,)+e\cdot\frac{2}{(v+1)\cdot h^2\cdot w(a)}\cdot\left\{u\cdot\int_0^u\Phi_1^*(a,\bar{u})\,d\bar{u}-\sqrt{1-u^{v+1}}\cdot\int_0^u\frac{\Phi_1^*(a,\bar{u})}{\sqrt{1-u^{v+1}}}d\bar{u}+\right. \tag{38}$$

$$\left.+(v+1)\cdot\sqrt{1-u^{v+1}}\cdot\left[B_u\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^u\Phi_1^*(a,\bar{u})\,d\bar{u}-\int_0^u\Phi_1^*(a,\bar{u})\,d\bar{u}\cdot B_u\left(\frac{1}{v+1},\frac{1}{2}\right)d\bar{u}\right]\right\},$$

в якому функції a та y задовольняють рівняння:

$$\frac{da}{dt}=e\cdot\frac{v+1}{3h\cdot w(a)\cdot B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{v+1}\right)}\cdot\left[\int_0^1\Phi_1(a,u)du+e\cdot\int_0^1\Phi_2(a,u)du\right] \tag{39}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{w(a)}{L}-e\cdot\frac{L\cdot c^2(\nu+1)^2\left[\int_0^1\Phi_1(a,u)\cdot l(a,u)\,du+e\cdot\int_0^1\Phi_2(a,u)\cdot l(a,u)\,du\right]}{4a\cdot w(a)\cdot\left[(\nu+3)\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)+(\nu-1)\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\nu+1}\right)\right]} \qquad (40)$$

У всіх отриманих формулах амплітуду a при інтегруванні по u вважаємо постійним параметром. Порівнюючи отримані вирази для першого та другого наближення у випадку $\nu=1$, легко переконатися, що результати повністю збігаються.

Етапи обчислення другого наближення для формули (4) показано на рис.2.

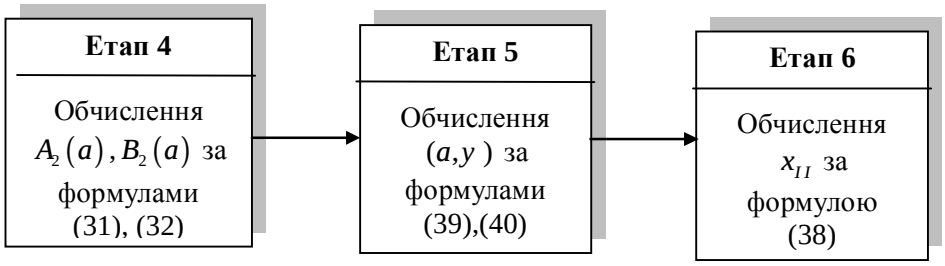

Рис. 2. Етапи обчислення другого наближення розв'язку диференціального рівняння (3)

На основі представлених формул реалізовано обчислення значень першого та другого наближення згідно з розкладом (4) розв'язку диференціального рівняння (3) з малим параметром. Порівняння результатів обчислень розв'язків рівняння (3) з отриманими в [6] значеннями розв'язків рівняння (1) показує, що внесок збуреної складової відповідає порядку збурення.

Таблиця 1

Результати обчислень поведінки коливної системи з малим збуренням при $\nu=1/3$, e =0,1

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40
$X_I(t)$	0,0000000	0,0997829	0,1992899	0,2976918	0,3945262

t	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,96	1,00
$X_I(t)$	0,4892491	0,5811188	0,6693744	0,7531268	0,8311107	0,9015342	0,9612500

Таблиця 2

Результати побудови растру на основі першого наближення розв'язку рівняння (3) при $\nu=1/3$, e =0,1

1,00	0,96	0,90	0,83	0,75	0,67	0,58	0,49	0,39	0,39	0,20	0,10	0,00
0,96	0,90	0,83	0,75	0,67	0,58	0,49	0,39	0,30	0,30	0,10	0,00	0,10
0,90	0,83	0,75	0,67	0,58	0,49	0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20
0,83	0,75	0,67	0,58	0,49	0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30
0,75	0,67	0,58	0,49	0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39
0,67	0,58	0,49	0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49
0,58	0,49	0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58
0,49	0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58	0,67
0,39	0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58	0,67	0,75
0,30	0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83
0,20	0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90
0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90	0,96
0,00	0,10	0,20	0,30	0,39	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90	0,96	1,00

Приклад побудови растру на основі періодичної Ateb-функції розглянемо у випадку $\nu = 1/3$, e =0,1. За рахунок вибору константи L в (4) отримані розвязки є $2p$ -періодичними. Для побудови растру отримані результати обчислень нормуємо до періоду 2. Отримані результати обчислень на півперіоді показано в табл. 1.

На основі значень, представлених у табл. 1, побудуємо растр, продовживши та заокруглivши отримані значення. У табл.2 величині растру відповідає значення комірки таблиці, а значення функції в комірці визначає величину растрового пікселя.

На основі даних, представлених у табл. 2, побудовано графік величини растру, який показано на рис. 3.

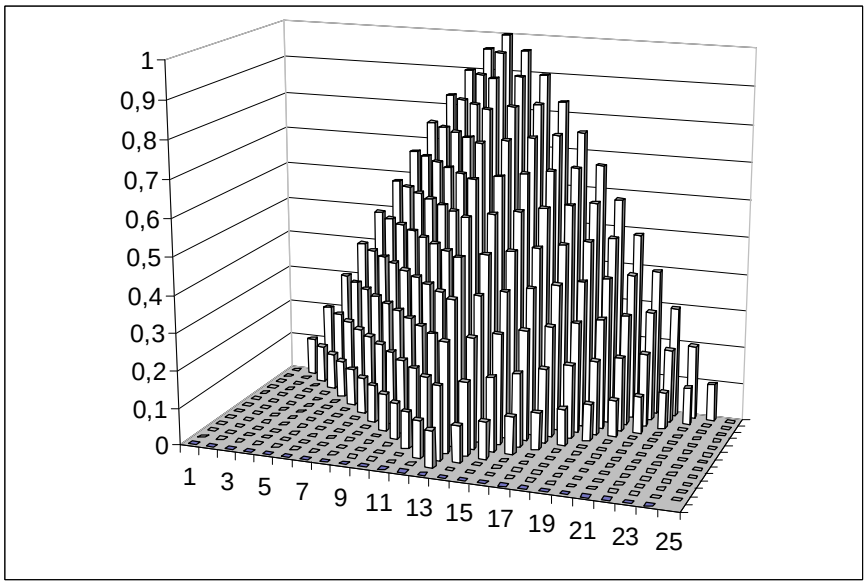

Рис. 3. Графік побудови величини растру

Висновки

Здійснено моделювання періодичних процесів у коливній системі без збурень на основі теорії Ateb-функцій.

Моделювання коливних процесів ґрунтується побудові розв'язків диференціальних рівнянь за допомогою асимптотичних методів, які розробили Н. Н. Боголюбов та Ю. А. Митропольский. На основі асимптотичних методів побудовано два наближення розв'язків.

Розглянуто типи малих збурень, які діють на коливну систему. Наведено цифрові значення результатів моделювання. Запропоновано побудову растрових комірок у межах однієї елементарної площі у вигляді півперіоду Ateb-функцій. Наведено графік побудови величини растру.

1.Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 2. Сеник П. М. Обращение неполной Beta-функции // Укр. мат. журн. 1969. – Т. 21, № 3. – С. 325–333. 3.Сокол Б.И. Асимптотическиеприближениярешения для одного нелинейного неавтономного уравнения // Укр. мат. журнал. — 1997. — 49, № 11. — С. 1580–1583. 4.Сокіл Б.І. Ліщинська Х.І.Застосування асимптотичного методу та Ateb-функцій для побудови розв'язків неоднорідних крайових задач, які описують нелінійні коливання системи, що характеризуються поздовжнім рухом // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка» Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. — 2008. — № 614. – С.120–124. 5. Иванова Т. Допечатная підготовка: Учеб. курс / Т. Иванова. – СПб.: Питер, 2004. — 304 с. 6. Дронюк І. Створення графічної бази даних елементарних періодичних Ateb-функцій / І. Дронюк, М. Мавко, М. Назаркевич // Вісник Держ. ун-ту «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. — 2008. — № 616. — С.98 – 105.