

сегментів ритміки меншого. У разі кардіосигналу такі методи можна використовувати для оцінювання змін стану серцево-судинної системи упродовж доби і кількох діб, як вимагає голтерівський моніторинг.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 755 с. 2. Баевский Р.М. Временная организация функций и адаптивно-приспособительная деятельность организма / Р.М. Баевский // Теоретические и прикладные аспекты анализа временной организации биосистем. – М.: Наука. – С. 88–111. 3. Войчишин К.С. О простой стохастической модели естественных ритмических процессов / К.С. Войчишин, Я.П. Драган // Отбор и передача информации, 1971. – Вып.29. – С.7–15. 4. Драган Я. Поліперіодично корельовані випадкові процеси як адекватні моделі сигналів кратної ритміки природних явищ і технологічних процесів / Я. Драган, П. Євтух, Л. Сікора, Б. Яворський // Комп'ютерні технології друкарства, 2000, № 1. – С.69–90. 5. Информационные связи био-гелио-геофизических явлений и элементы их прогноза / [К.С. Войчишин, Я.П. Драган, В.И. Куксенко, В.Н. Михайловский]. – К.: Наук. думка, 1974. – 208 с. 6. Драган Я.П. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы / Я.П. Драган, И.Н. Яворский – К.: Наук. думка, 1982. – 246 с. 7. Драган Я.П. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів / Я.П. Драган. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біотехнічних систем, 1997. – 361 с.

УДК 536.24

В. Гавриш, А. Косач

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООВОГО СТАНУ В ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ЕЛЕМЕНТІ ПОТУЖНОГО СВІТЛОДІОДА

© Гавриш В., Косач А., 2011

Розглянуто стаціонарну нелінійну осесиметричну задачу теплопровідності для термочутливого шару, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла і тепловим потоком. Отримано аналітичний розв'язок цієї задачі та виконано числовий аналіз для заданої залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.

Ключові слова: температура, теплопровідність, стаціонарна, ізотропний, тепловий потік, термочутливий, осесиметрична.

The steady state nonlinear axially symmetric problem of thermal conduction for the heat sensitive layer, which heats at internal thermal source and heat flow, has been considered. The analytical solution for this problem has been obtained and the numerical analysis for the given dependence of the layer substance thermal conductivity on the temperature has been conducted.

Keywords: temperature, thermal conduction, steady state, isotropic, heat flow, heat sensitive, axially symmetric.

Вступ

Останні досягнення у галузі світлотехніки вимагають розроблення та створення принципово нових джерел світла на основі потужних світлодіодів. Оскільки їхня ефективність є досить високою, то згодом вони замінять звичайні лампи розжарювання і застосовуватимуться для вуличного освітлення, автомобільної світлотехніки, рекламних вивісок, світлодіодних панелей, індикаторів, рухомих світлових рядків, світлофорів, декоративного освітлення, світлодинамічних

систем тощо. Такі пристрої вигідно застосовувати для економії електроенергії та в установах із високими вимогами до електробезпеки.

У процесі проектування потужних світлодіодів важливим завданням є забезпечення ефективного тепловідводу, оскільки 70–80 % електричної енергії перетворюється на теплову, що призводить до зменшення надійності та негативно впливає на їхні електричні та оптичні характеристики (зменшується світловіддача кристала, змінюються характеристики люмінофора, зменшується світлопропускання оптичної системи). У зв'язку з цим виникає необхідність побудови нових математичних моделей процесів теплообміну, розроблення ефективних алгоритмів і програмних засобів для аналізу теплового стану у наведених структурах.

Деякі дослідження температурних режимів для окремих елементів мікроелектронних пристроїв виконано раніше [1–3].

Нижче сформульовано граничну осесиметричну стаціонарну нелінійну задачу теплопровідності, побудовано аналітичний розв'язок та виконано числовий аналіз для елемента світлодіода, який описується термочутливим шаром, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла і тепловим потоком. Наведено [4, 5] загальні рівняння теплопровідності для термочувливих тіл.

Формулювання задачі

Розглянемо термочувливий у сенсі теплофізичних характеристик ізотропний шар, який віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$ і нагрівається: а) рівномірно розподіленими по об'єму скінченного циліндра $2pR^2l$ внутрішніми джерелами тепла з потужністю $q_0 = const$ (рис. 1, а); б) тепловим потоком з такою самою потужністю, який падає на круг скінченної площі pR^2 однієї з граничних поверхонь шару (рис. 1, б).

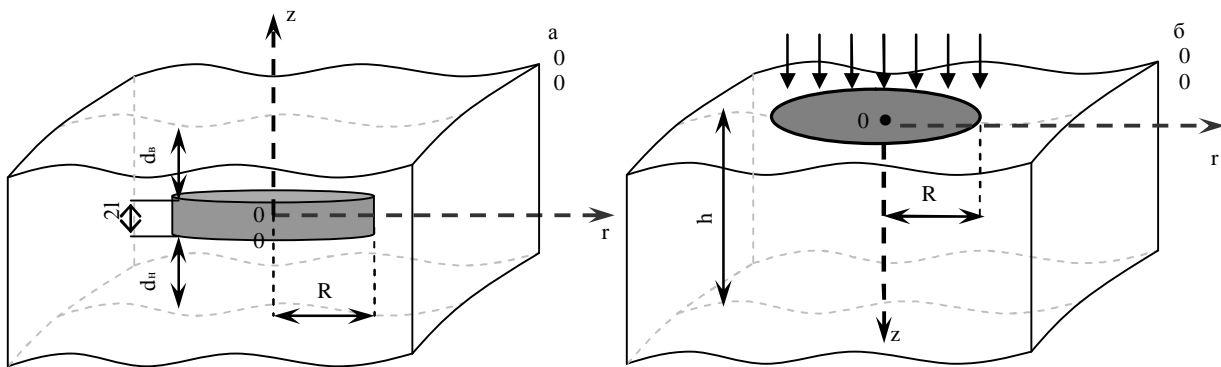


Рис.1. Ізотропний термочувливий шар, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла (а) і тепловим потоком (б)

Розподіл осесиметричного стаціонарного температурного поля $t(r, z)$ в розглядуваному тілі отримаємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [4, 5]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = F \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -q_0 S_-(R-z) \quad (\text{б}), & \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=h} &= 0 \quad (\text{б}), \\ \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=-l-d_n} &= \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=l+d_e} = 0 \quad (\text{а}), & t \Big|_{r \rightarrow \infty} &= \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності шару, $N(z) = S_-(z+l) - S_+(z-l)$;

$$S_{\pm}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0,5 \mathbf{m} 0,5, & z = 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad - \text{асиметричні одиничні функції [6];}$$

$$F = \begin{cases} -q_0 S_-(R-r)N(z) & \text{для випадку (a),} \\ 0 & \text{для випадку (б).} \end{cases}$$

Лінеаризована гранична задача

Розглянемо змінну Кірхгофа [7]

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{t(r,z)} \lambda(\zeta) d\zeta, \quad (3)$$

із використанням якої рівняння (1) та умови (2) запишуться у вигляді

$$\Delta \vartheta = \frac{F}{\lambda^0}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=0} &= -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(R-r) \quad (\text{б}), & \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=h} &= 0 \quad (\text{б}), \\ \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=-l-d_n} &= \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=l+d_e} = 0 \quad (\text{a}), & \vartheta \Big|_{r \rightarrow \infty} &= \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності шару; $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Тут враховано, що

$$\lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r}, \quad \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Побудова аналітичного розв'язку задачі

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до граничної задачі (4), (5), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = \frac{\bar{F}}{\lambda^0} \quad (6)$$

і граничних умов

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{Rq_0}{\xi} J_1(R\xi) \quad (\text{б}), \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=h} = 0 \quad (\text{б}), \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=l+d_e} = \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=-l-d_n} = 0 \quad (\text{a}), \quad (7)$$

де $\bar{\vartheta} = \int_0^{\infty} r J_0(r\xi) \vartheta dr$ – трансформанта функції ϑ ; $J_\nu(\xi)$ – функція Бесселя першого роду ν -го порядку; ξ – параметр інтегрального перетворення;

$$\bar{F} = \begin{cases} -\frac{Rq_0}{x} J_1(Rx)N(z) & \text{для випадку (a),} \\ 0 & \text{для випадку (б).} \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння (6) запишемо у вигляді

$$\bar{\vartheta} = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z} + \bar{F}_q,$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування;

$$\bar{F}_4 = \begin{cases} \frac{Rq_0}{x^3} J_1(Rx) [(1 - chx(z+l))S_-(z+l) - (1 - chx(z-l))S_+(z-l)] & \text{для випадку (а),} \\ 0 & \text{для випадку (б).} \end{cases}$$

Використавши граничні умови (7), отримаємо частковий розв'язок задачі (6), (7)

$$\bar{J} = \frac{Rq_0}{I^0 x^3} J_1(Rx) \bar{F}_3, \quad (8)$$

де

$$\bar{F}_3 = \begin{cases} \frac{chx(z+l+d_n)}{shx(2l+d_n+d_g)} [shx(2l+d_g) - shxd_g] + N(z) - chx(z+l)S_-(z+l) + chx(z-l)S_+(z-l) & \text{для випадку (а),} \\ \frac{xchx(z-h)}{shxh} & \text{для випадку (б).} \end{cases}$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (8), знайдемо вираз для функції ϑ

$$\vartheta = \frac{Rq_0}{\lambda^0} \int_0^\infty \frac{J_1(R\xi) J_0(r\xi)}{\xi^2} \bar{F}_3 d\xi. \quad (9)$$

Шукане температурне поле для нелінійної граничної задачі теплопровідності (1), (2) визначається з нелінійного алгебраїчного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (3), (9), після підстановки в них конкретних виразів залежностей коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.

Частковий приклад та аналіз числових результатів

На практиці відзначається така залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [8, 9]:

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (10)$$

де λ^0, k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності.

Тоді, використавши вирази (3), (9) і (10), одержимо формулу для визначення температури t в шарі

$$t = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k\vartheta}}{k}. \quad (11)$$

Формула (11) повністю описує розподіл температурного поля в термочутливому шарі.

Виконано числовий аналіз безрозмірної температури $T = kt$ за формулою

$$T = 1 - \sqrt{1 - 2Ki\vartheta^*}$$

для критерію Кірпічова $Ki = \frac{q_0 R^2 k}{I^0}$ (а), $Ki = \frac{q_0 R k}{I^0}$ (б) і таких безрозмірних величин:

$$J^* = \frac{I^0}{q_0 R^2} J \quad (а), \quad J^* = \frac{I^0}{q_0 R} J \quad (б).$$

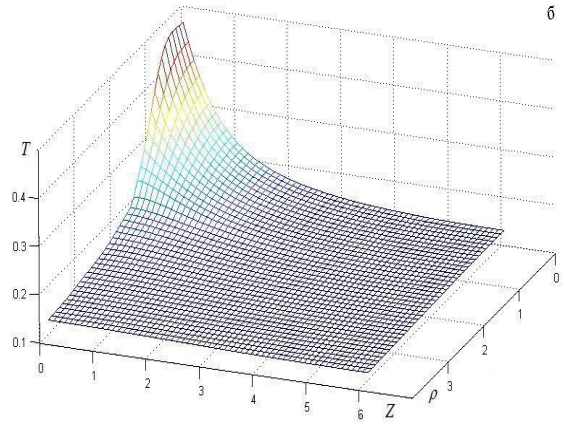
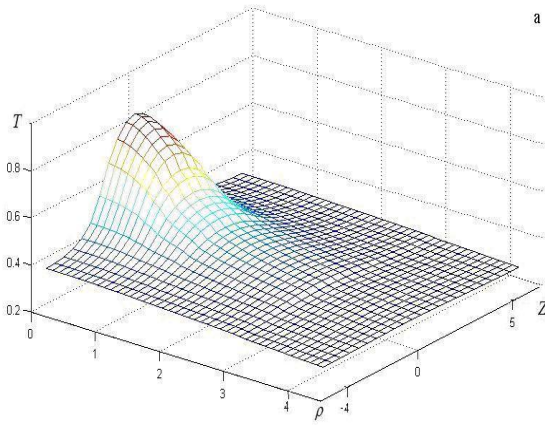


Рис. 2. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірних координат Γ та Z для термочутливого шару, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла (а) і тепловим потоком (б)

Побудовано (рис. 2) залежність температури T від безрозмірних радіальної $r = r/R$ та аксіальної $Z = z/r$ координат для значення критерію Кірпічова $Ki = 0,27$. Як бачимо, максимальна температура досягається в області дії рівномірно розподілених по об'єму скінченного циліндра внутрішніх джерел тепла (а) і теплового потоку, який падає на скінченний круг граничної поверхні термочутливого шару (б).

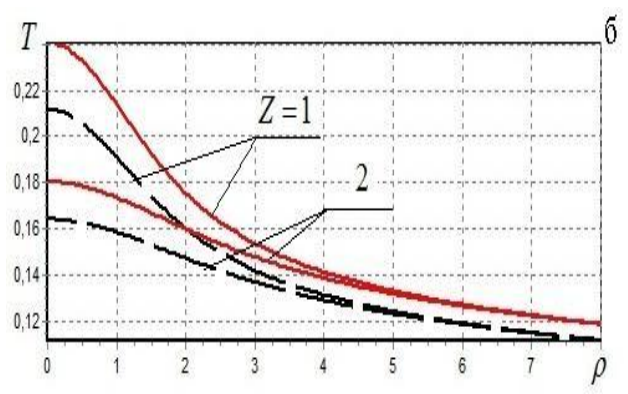
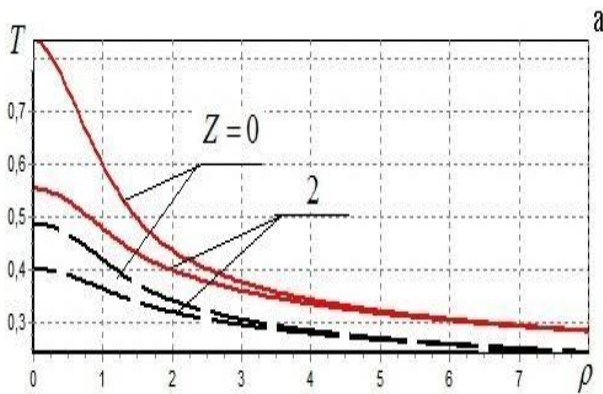


Рис.3. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірної координати Γ

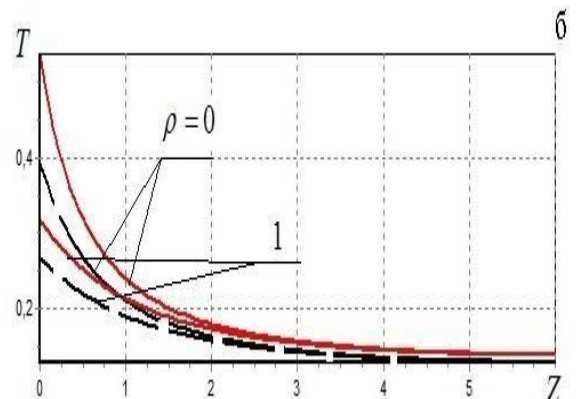
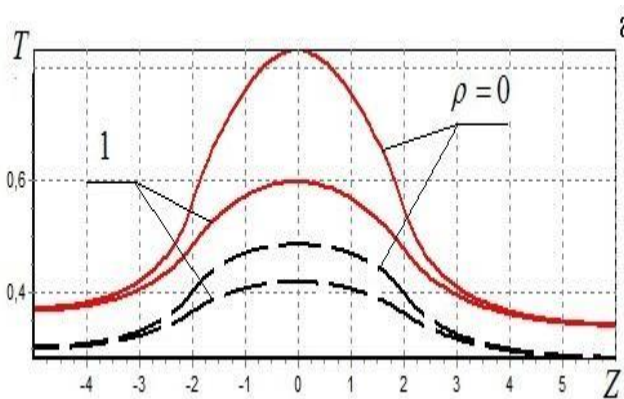


Рис. 4. Залежність безрозмірної температури T від безрозмірної координати Z

Рис. 3 ілюструє зміну температури T залежно від радіальної r , а рис. 4 – цю саму зміну від аксіальної Z координат (суцільна лінія для нелінійної, а штрихова – для лінійної моделей). Як видно із графіків, значення температур різні для лінійної та нелінійної моделей. Для $r \geq 2,5$ (рис. 3, а), $r \geq 4$ (рис. 3, б) і вказаних значень Z та $|Z| \geq 3$ (рис. 4, а), $Z \geq 1,5$ (рис. 4, б) і наведених значень r для нетермочутливого шару значення температури практично не відрізняються, а для термочутливого шару вони є такими для $r \geq 3,5$ (рис. 3, а), $r \geq 4$ (рис. 3, б) і $|Z| \geq 2,5$ (рис. 4, а), $Z \geq 1,5$ (рис. 4, б).

Із наведених вище графіків, що відображають залежність безрозмірної температури T від безрозмірних координат r та Z для лінійної та нелінійної моделей, важко встановити відносну похибку результатів обчислень. Тому проведено числові розрахунки температури $t(r, z)$ для випадку, коли шар нагрівається внутрішніми джерелами тепла, за формулою (11) для таких вихідних даних: $I^0 = 40,14 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{C}^0)$, $k = -3,96 \cdot 10^{-4} / \text{C}^0$, $q_0 = 600 \text{ Вт}/\text{м}^3$, $R = 3 \text{ мм}$, $l = 2 \text{ мм}$, $d_6 = 3 \text{ мм}$, $d_n = 5 \text{ мм}$. Результати показують, що для термочутливого шару значення температури зменшуються на 5 % порівняно з нетермочутливим шаром (рис. 5).

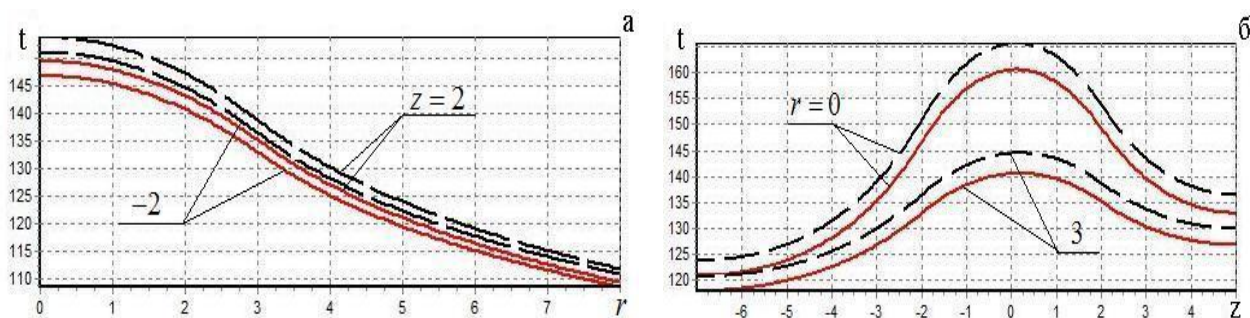


Рис. 5. Залежність температури t від радіальної r (а) та аксіальної z (б) координат

Висновки

Із використанням змінної Кірхгофа (3) виконано лінеаризацію стаціонарної осесиметричної граничної задачі теплопровідності для термочутливого шару, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла і тепловим потоком. Побудовано аналітичний розв'язок (9) для визначення змінної Кірхгофа. Розглянуто залежність коефіцієнта теплопровідності від температури для термочутливого шару у вигляді співвідношення (10). Встановлено, що у разі врахування цієї залежності значення температури зменшуються порівняно з нетермочутливим шаром на 5 %.

1. Барвінський А.Ф. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла / А.Ф. Барвінський, В.І. Гавриш // Проблеми машиностроения. – 2009. – 12, № 1. – С. 47–53. 2. Гавриш В.І. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням / Гавриш В.І., Федасюк Д.В. // Промышленная теплотехника. – 2010. – 32, № 5. – С. 18–25. 3. Гавриш В.І. Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням / В.І. Гавриш, Д.В. Федасюк, А.І. Косач // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 5. – С. 115–120. 4. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с. 5. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с. 6. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1977. – 720 с. 7. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 229 с. 8. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с. 9. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1979. – 288 с.