

## АВТОМАТИЗОВАНА ЧИСЛОВА СХЕМА РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ $h$ -АДАПТИВНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© Макар В., Куліш О., 2011

Досліджено питання розроблення та реалізації  $h$ -адаптивного обчислювального процесу на основі методу скінченних елементів, метою якого є автоматизація отримання розв’язку заданої точності. На прикладі модельної крайової задачі лінійної теорії пружності для дослідження пружного стану тіла L-подібної форми продемонстровано переваги та ефективність розробленого підходу.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, похибка дискретизації, апостеріорна оцінка похибки,  $h$ -адаптивність, генерація сітки.

Some problems of development and implementation of  $h$ -adaptive computational process based on finite element method which is aimed to automation of obtaining solution prescribed accuracy are investigated in the paper. The efficiency and advantages of the developed approach are demonstrated by the example of boundary value problem of linear elasticity for L-shaped body.

**Keywords:** finite element method, the error of sampling, a- posteriori estimation error,  $h$ -adaptivity, mesh generation.

### 1. Вступ

На сучасному етапі розвитку науки і техніки математичне моделювання реальних фізичних явищ та процесів базується, здебільшого, на використанні числових методів та комп’ютерної техніки. Найпопулярнішими числовими методами в технології обчислювального експерименту є метод скінченних елементів (МСЕ) та метод граничних елементів, про що свідчить велика кількість комерційних програмних систем проектування та розрахунку на їх основі. Математична основа МСЕ, побудована в 70-х роках минулого століття, сприяла бурхливому розвитку різних схем МСЕ для конкретних прикладних задач. Успішне застосування розроблених схем МСЕ в практиці інженерного проектування вимагає зведення до мінімуму втручання користувача в обчислювальний процес, особливо для тих користувачів, які не є фахівцями в сфері числових методів загалом і в МСЕ зокрема. Один зі способів досягнення цієї мети полягає у розробленні автоматизованих числових схем розв’язування складних крайових задач математичної фізики з високою точністю на основі процедур оцінки точності отриманих апроксимацій МСЕ. На ранніх етапах практичного застосування МСЕ такі процедури полягали у розв’язуванні задач з відомими точними розв’язками та порівнянні останніх з отриманими наближеними розв’язками МСЕ. Однак очевидно, що такий підхід не давав змоги автоматизувати сам обчислювальний процес, оскільки для реальних задач інженерної практики одержати точний розв’язок неможливо. І більше, як виявилось, налагоджене у такий спосіб програмне забезпечення, яке реалізує МСЕ, ще не гарантує прийнятності та точності отриманих числових розв’язків, оскільки в реальних задачах неможливо а рїогі побудувати сітку скінченних елементів, на якій локальна похибка дискретизації рівномірно розподілена по елементах, а глобальна похибка задовольняє наперед заданий критерій точності. Це приводить до виникнення підобластей, на яких локальна похибка є дуже великою. Для того щоб визначити такі підобласті, було запропоновано апостеріорні оцінки похибки, які, використовуючи скінченно-

елементну апроксимацію, дають змогу оцінити локальну похибку дискретизації. Отриманий розподіл похибки можна використати для зміни (адаптації) параметрів дискретизації за МСЕ, а саме діаметра скінченноелементної сітки ( $h$ -адаптивність), поліноміального порядку базисних функцій ( $p$ -адаптивність) або одночасно обох параметрів ( $hp$ -адаптивність). [1-2].

**Мета цієї роботи** – на прикладі крайової задачі двовимірної лінійної теорії пружності для L-подібної області продемонструвати переваги та ефективність розробленої у попередніх роботах авторів [3-5]  $h$ -адаптивної схеми МСЕ, яка дає змогу автоматизувати процес отримання числового розв’язку заданої точності за допомогою побудови оптимальної, в сенсі рівномірного розподілу локальної похибки дискретизації, скінченноелементної сітки з мінімальним втручанням користувача в обчислювальний процес.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо задачу дослідження пружного стану тіла L-подібної форми, на яке діє система зовнішніх поверхневих сил  $\mathbf{p}$  (рис. 1).

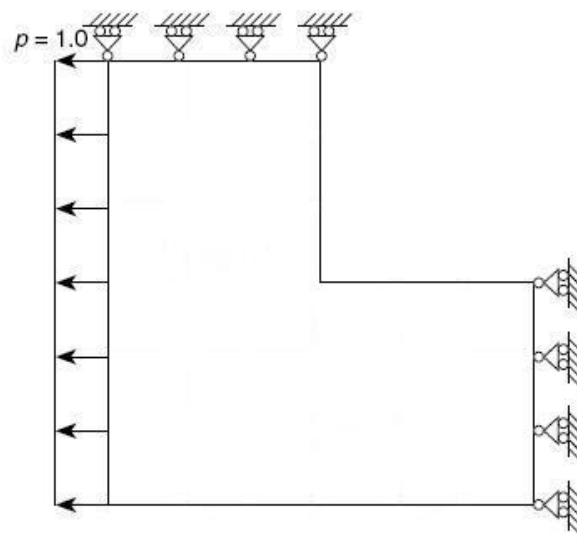


Рис.1. Область дослідження

Тоді, як відомо [6], така задача полягає у знаходженні вектора переміщень  $\mathbf{u}$  і тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ , які задовольняють рівняння

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \text{ на } \Gamma_u, \quad \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } \Gamma_p \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad (4)$$

де (1) – рівняння рівноваги; (2) – граничні умови; (3) – рівняння закону Гука; (4) – диференціальні співвідношення Коші;  $\Omega$  – обмежена область з неперервною за Ліпшицем границею  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$ ;  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$  – шуканий вектор переміщень у точці пружного тіла  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  – заданий вектор переміщень на частині границі  $\Gamma_u$ ;  $p_i$  – компоненти заданого вектора поверхневого навантаження на частині границі  $\Gamma_p$ ;  $n_j$  – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до границі області  $\Gamma$ ;  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ ;  $\mathbf{D}$  – матриця пружних сталей закону Гука;  $\mathbf{S}$  – матриця диференціальних операторів, за допомогою якої компоненти тензора деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  виражаються через переміщення.

Класична схема застосування МСЕ для числового розв'язання крайової задачі (1)–(4) полягає у переході до еквівалентної слабкої постановки у вигляді варіаційного рівняння

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V = \{v : v_i = 0 \text{ на } \Gamma_u, v_i \in H^1(\Omega), i = 1, 2\}, \quad (5)$$

з добре відомими виразами для білінійної форми  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  та функціонала  $\langle l, \mathbf{v} \rangle$  [7]. Тепер можна сформулювати варіаційну задачу для визначення узагальненого розв'язку лінійної статичної задачі теорії пружності (1)–(4): знайти таку функцію  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ , що задовольняє варіаційне рівняння (5).

### 3. Загальна структура автоматизованої числової схеми на основі $h$ -адаптивного МСЕ

Повністю автоматизована числова схема підвищення точності розрахунків на основі  $h$ -адаптивної версії МСЕ, метою якої є отримання розв'язку заданої точності, поділяється на три етапи, які повинні здійснюватися циклічно (рис. 2):



Рис. 2. Блок-схема повного  $h$ -адаптивного обчислювального процесу

1) одержання розв'язку на початковій сітці та оцінка його точності за допомогою апостеріорної оцінки похибки;

2) найефективніше прогнозування локального згущення сітки, необхідного для досягнення заданої точності;

3) згущення сітки, отримання нового розв'язку і оцінка нової похибки з поверненням на другий крок, якщо нова похибка перевищує бажану.

При реалізації цього процесу на перший план виходять питання ефективності та економності. Тому дуже важливо гарантувати, щоб:

- прогнозування локального згущення сітки було таким, щоб бажана точність досягалася найменшою кількістю кроків 2 і 3;
- похибка оцінювалася точно на усіх етапах обчислень;

• втручання користувача в обчислювальний процес має бути зведене до мінімуму, тобто користувач задає лише вхідну інформацію, таку як геометрія області, крайові умови, прикладене навантаження, очікувану точність наближеного розв'язку та початкову скінченноелементну сітку на першому етапі цього процесу.

В результаті користувач повинен отримати числовий розв'язок вихідної задачі з заданою

точністю, причому ітераційна процедура послідовного досягнення заданої точності апроксимації здійснюється автоматично. Навіть більше, поставлена мета досягається побудовою оптимальної в сенсі рівномірного розподілу локальної похибки дискретизації сітки, завдяки чому вдається одержати наближений розв'язок без великих локальних градієнтів.

### 4. Опис автоматизованої числової схеми на основі $h$ -адаптивного МСЕ

В основу запропонованої  $h$ -адаптивної числової схеми МСЕ покладено апостеріорну  $Z^2$ -оцінку [8], основна ідея якої полягає у тому, що поряд зі “стандартними” напруженнями  $\sigma_h$ , отриманими безпосередньо зі скінченноелементної апроксимації  $\mathbf{u}_h$  компонентів вектора переміщень, обчислюються так звані “згладжені” (smoothed) напруження  $\sigma^*$ , які в певному сенсі є

точнішими, і різниця між ними використовується для наближеного розрахунку енергетичної норми похибки за формулою

$$\|\tilde{\epsilon}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega}. \quad (6)$$

Процедура обчислення напружень  $\sigma^*$  основана на середньоквадратичній апроксимації  $\sigma_h$  з використанням як базисних функцій системи функцій форм  $\mathbf{N}$  зі скінченноелементної апроксимації компонент вектора переміщень  $\mathbf{u}$ :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega = 0,$$

звідки випливає таке співвідношення для обчислення напружень  $\sigma^*$

$$\sigma^* = \mathbf{A}^{-1} \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}, \quad (7)$$

де  $\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  – вектор вузлових значень скінченноелементної апроксимації  $\mathbf{u}_h$ .

Для оцінки точності обчислень використаємо відносну похибку  $\eta$ , яка в у термінах енергетичної норми має вигляд

$$\eta = \frac{\|\tilde{\epsilon}\|}{\|\mathbf{u}\|} \cdot 100\%,$$

причому відносна похибка  $\eta$  може бути як глобальною (обчисленою на всіх скінченних елементах області  $\Omega$ ), так і локальною (обчисленою на окремих скінченних елементах). У практичних задачах точний розв'язок  $\mathbf{u}$  невідомий, тому енергію деформації можна оцінити як

$$\|\mathbf{u}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{\epsilon}\|^2,$$

де  $\|\mathbf{u}_h\|^2$  – енергія деформації скінченноелементної апроксимації, а  $\|\tilde{\epsilon}\|^2$  – похибка на поточній сітці, тобто похибка, для оцінки якої використовується покращений розв'язок  $\sigma^*$ . Отже, відносна процентна похибка  $\eta$  обчислюватиметься за формулою:

$$\eta = \sqrt{\frac{\|\tilde{\epsilon}\|^2}{\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{\epsilon}\|^2}}. \quad (8)$$

Наступним кроком у розробленій процедурі  $h$ -адаптивного моделювання є вироблення стратегії згущення сітки скінченних елементів, тобто визначення підобластей, в яких необхідно здійснити локальне згущення поточної сітки та прогнозування її діаметра в цих підобластях, щоб забезпечити мінімальну кількість ітерацій процесу послідовного уточнення скінченноелементної апроксимації. Цілком очевидно, що стратегія згущення сітки залежить від природи заданого критерію точності числового розв'язку. Найпоширенішим та найпростішим критерієм є задання максимально допустимої відносної процентної похибки  $\eta_{\max}$ . Тоді результатом запропонованого  $h$ -адаптивного обчислювального процесу має бути така скінченноелементна апроксимація розв'язку досліджуваної задачі, для якої буде виконуватися умова:

$$\eta \leq \eta_{\max}. \quad (9)$$

Більше того, розв'язок, що задовольняє умову (9), отримують, побудувавши оптимальну скінченноелементну сітку, тобто таку сітку, на якій похибка в енергетичній нормі розподілена рівномірно по елементах. Із умови (9), припустивши рівномірний розподіл локальної похибки, легко можна отримати умову, яку повинна задовольняти похибка на кожному елементі  $m$  ( $m = 1, \dots, M$ ). Для цього підставимо (8) у (9) і, виконавши нескладні перетворення, одержимо:

$$\|\tilde{\epsilon}\|_m \leq \eta_{\max} \cdot \left[ (\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\tilde{\epsilon}\|^2) / M \right]^{\frac{1}{2}} = e_M. \quad (10)$$

Тоді із співвідношення (10) легко можна отримати умову визначення елементів, для яких потрібно згущувати сітку

$$\zeta_m = \frac{\|\tilde{e}\|_m}{e_M} > 1. \quad (11)$$

Саму величину  $\zeta_m$  можна використати для прогнозування розмірів нових скінченних елементів. Правильне визначення розмірів елементів нової сітки дає змогу мінімізувати кількість кроків, необхідних для побудови такої сітки, кожний елемент якої буде задовольняти умову (10). У цій роботі розмір нових елементів обчислюється за формулою [4]:

$$h_n^{(i)} \approx h_n^{(i)} \cdot \left( \frac{\|\tilde{e}^{(i)}\|_n}{\|\tilde{e}^{(i)}\|_n} \right)^{1/c}, \quad (12)$$

де  $h_n^{(i)}$  – розмір  $i$ -го скінченного елемента попередньої сітки;  $h_n^{(i)}$  – розмір елемента нової сітки, який потрапляє в  $i$ -й скінченний елемент попередньої сітки;  $\|\tilde{e}^{(i)}\|_n$  – похибка на всіх нових елементах, що потрапляють в  $i$ -й елемент попередньої сітки;  $\|\tilde{e}^{(i)}\|_n$  – похибка на  $i$ -му скінченному елементі попередньої сітки;  $c = \min(p, \lambda)$  – порядок швидкості збіжності скінченноелементного розв'язку;  $p$  – поліноміальний порядок функцій форм МСЕ;  $\lambda$  – порядок сингулярності.

Визначений таким способом розмір нових елементів залежить від результатів розрахунків, виконаних на попередній або початковій сітці, а також від порядку збіжності похибки  $O(h^c)$ , де  $c$  залежить від типу скінченного елемента і від того, наявна чи відсутня сингулярність у зоні, де розміщений елемент. Як правило,  $c$  набуває значення  $p$  для елементів, віддалених від зони сингулярності, і  $\lambda$  – у протилежному випадку.

На завершальній стадії цього обчислювального процесу необхідно здійснити локальне згущення сітки, тобто побудувати адаптивну сітку зі змінним діаметром. У цій роботі використовується розроблений авторами генератор сітки скінченних елементів чотирикутної форми [4, 9], оснований на триангуляційній схемі рухомого фронту [10]. Основна ідея цієї триангуляційної схеми полягає у тому, що елементи і вузли генеруються одночасно, причому напрямок генерації вузлів та розмір елемента можуть змінюватися згідно з наперед визначеними специфікаціями. Контролювання розміру елементів у процесі генерації сітки є особливо важливим у випадку проектування оптимальної сітки у  $h$ -адаптивному аналізі. Самі чотирикутні скінченні елементи формуються об'єднанням двох суміжних трикутників. Побудовані чотирикутні елементи можуть не задовольняти вимог стосовно величин їх внутрішніх кутів, особливо у тих частинах області, де розмір елемента різко змінюється. Тому в роботі застосовується процес верифікації сітки, у ході якого вилучаються вузли, сторони і навіть цілі елементи, які погіршують якість скінченноелементної сітки. Процес верифікації сітки необхідно здійснювати доти, доки для всіх внутрішніх кутів усіх чотирикутників сітки не виконуватиметься умова:

$$45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ.$$

## 5. Результати числових досліджень

Оцінка працездатності, точності та ефективності програмної системи, яка реалізує описану вище автоматизовану числову схему, виконана на цілому ряді модельних задач. У цій роботі обмежимося наведенням результатів розв'язання крайової задачі (1)–(4) для L-подібної області (рис. 1) з шарнірно-закріпленими торцями. Усі описані нижче результати були отримані за таких значень наведених параметрів: модуль Юнга  $E = 2.0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . У розрахунках використовувалися лінійні ізопараметричні чотирикутні скінченні елементи з 4 вузлами. Для

ілюстрації переваг  $h$ -адаптивного підходу спочатку розглянемо “класичну” процедуру отримання наближеного розв’язку МСЕ, яка полягає у проведенні розрахунків на послідовності сіток, одержаних за допомогою рівномірного згущення сітки (рис. 3).

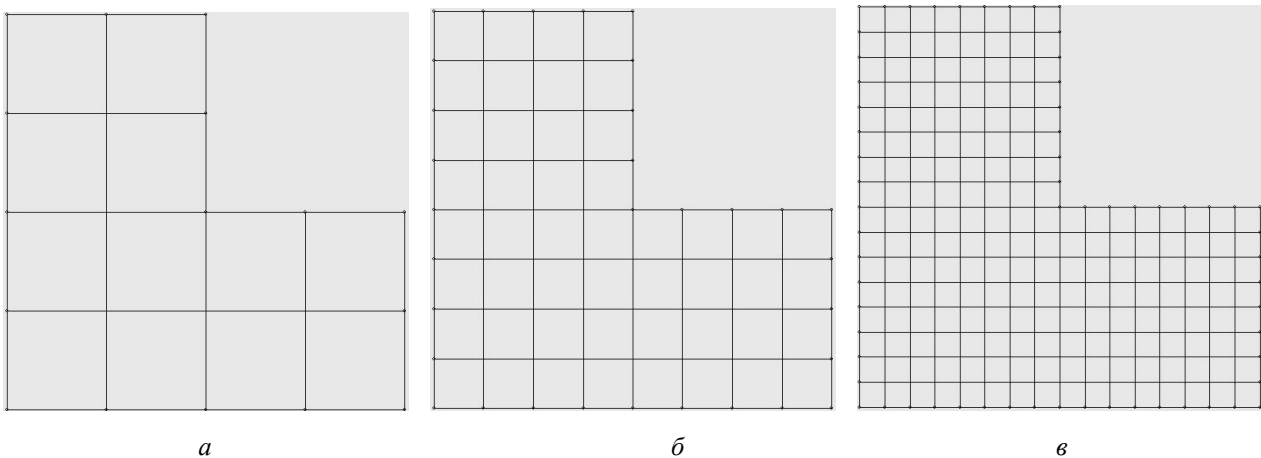


Рис. 3. Послідовність сіток, отриманих рівномірним згущенням

У табл. 1 наведено результати розрахунків. Подальше рівномірне згущення сітки, як показав аналіз результатів, не поліпшує точності скінченноелементної апроксимації, тобто глобальна відносна процентна похибка  $\eta$  нижче від рівня 9 % не опускалася. Як відомо, одним з можливих напрямів подальшого збільшення точності апроксимації МСЕ є підвищення поліноміального порядку в функціях форм МСЕ.

Таблиця 1

**Результати рівномірного згущення сітки**

Рисунок	К-ть скінченних елементів	К-ть вузлів	К-ть ступенів свободи	Енергетична норма похибки $\ \tilde{\epsilon}\ ^2$	Відносна похибка $\eta$
2а	12	21	36	0.936	37,45%
2б	48	65	120	0.418	18,72%
2в	192	225	432	0.175	9,5%

Але навіть у такому випадку отриманий наближений розв’язок високої точності (наприклад, на сітці з 48 біквадратичних ізопараметричних скінченних елементів сирендипового типу відносна процентна похибка  $\eta = 5,86\%$ ) містить значні локальні градієнти. Так, локальна відносна процентна похибка  $\eta$  на скінченних елементах поблизу прямого кута змінюється в діапазоні від 12 % до 15 %, а відносна різниця в розподілі локальної похибки за елементами досягає 75 %. Звідси можна зробити висновок, що, хоча й апроксимація МСЕ задовольняє заданий критерій точності, проте у місцях великого градієнта, а це, як правило, місця, де нас найбільше цікавить поведінка розв’язку, отримано результат незадовільної точності. Рівномірне згущення сітки навіть у випадках, коли вдається змінити якісну картину розподілу, є занадто неефективним і дорогим у сенсі обчислювальних затрат. Одним з альтернативних і ефективних способів вирішення цієї проблеми є застосування  $h$ -адаптивного підходу.

Розглянемо тепер приклад розв’язування нашої задачі за допомогою розробленої автоматизованої числової схеми підвищення точності розрахунків на основі  $h$ -адаптивної версії МСЕ. Нехай задана максимально допустима відносна похибка  $\eta_{\max} = 5\%$ . Як початкову сітку задамо сітку, зображену на рис. 2, а, тобто сітку, на якій одержимо апроксимацію з точністю  $\eta = 37,45\%$ . Розв’язок вихідної задачі, який задовольняє наперед заданий критерій точності, отримано за дві ітерації розробленого  $h$ -адаптивного обчислювального процесу. Скінченноелементні сітки, які були автоматично побудовані на цих ітераціях, зображені на рис. 4.

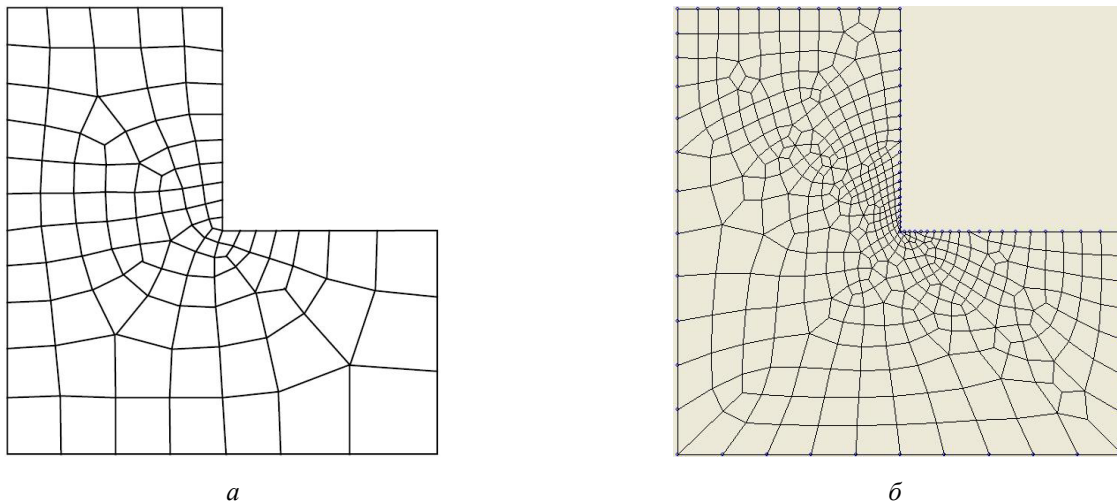


Рис. 4. Послідовність сіток, отриманих у результаті  $h$ -адаптивного моделювання

Аналогічно до попереднього випадку, результати розрахунків під час  $h$ -адаптивного моделювання наведено у табл. 2. Як видно з цієї таблиці, уже після першої ітерації точність наближеного розв'язку за МСЕ підвищилася майже у чотири рази. Остаточний результат отримано на сітці з 463 білінійних елементів, яка зображена на рис. 3, б. Для порівняння зауважимо, що на сітці з рівномірним розбиттям, яка містить 768 аналогічних скінченних елементів, похибка становила 9 % і подальше згущення не покращувало результату. Більше того, для сітки з рис. 3, б локальна похибка на елементах у зоні прямого кута не перевищує 6,7 %, а відносна різниця між мінімальним та максимальним значеннями локальної похибки на елементах такої сітки становить 31 %.

Таблиця 2

#### Результати $h$ -адаптивного моделювання

Рисунок	К-ть скінченних елементів	К-ть вузлів	К-ть ступенів свободи	Енергетична норма похибки $\ \tilde{e}\ ^2$	Відносна похибка $\eta$
2а	12	21	36	0.936	37,45 %
3а	101	134	258	0.181	9,63 %
3б	463	514	1008	0.043	5,11 %

#### 6. Висновки

Отже, у цій роботі розв'язано актуальну науково-практичну задачу розроблення та реалізації числових схем методу скінченних елементів, метою яких є автоматизація отримання розв'язку заданої точності. Ця числова схема базується на адаптації діаметра скінченноелементної сітки  $h$  на основі результатів застосування апостеріорної  $Z^2$  оцінки похибки. Наукова новизна полягає у досягненні поставленої мети за допомогою побудови оптимальної в сенсі рівномірного розподілу локальної похибки дискретизації сітки, завдяки чому можна одержати наближений розв'язок, який не містить великих локальних градієнтів. На прикладі крайової задачі дослідження пружного стану тіла L-подібної форми продемонстровано переваги та ефективність розробленого підходу. Практична цінність результатів полягає у тому, що розроблене програмне забезпечення дає змогу проводити комп'ютерне моделювання процедури отримання розв'язку бажаної точності з мінімальним втручанням користувача у процес розв'язання задачі.

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Oxford, 6-th Edition, 2005. – 792 p.
2. Ainsworth M. *Review of  $p$ - and  $hp$ -finite element methods. Theory and application in solid and fluid mechanics // Math. Comput., vol. 70(2), 2001, pp.1335-1337.*
3. Макар В.М., Матвійків О.М.  *$h$ -адаптивне моделювання на основі методу скінченних елементів. Частина 1: апостеріорні оцінки похибки // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2003. –*

№ 470. – С. 149–155. 4. Макар В.М., Матвійків О.М. Н-адаптивне моделювання на основі методу скінченних елементів. Стратегія згущення і адаптивні сітки. Частина 2 // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2003. – № 471. – С. 94–100. 5. Макар В.М., Матвійків О.М. Н-адаптивне моделювання на основі методу скінченних елементів. Частина 3: Результати моделювання на прикладі задачі Ляме // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 471. – С. 94–100. 6. Лехницький С.Г. Теорія пружості анізотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 7. Григоренко А.Я., Дьяк І.І., Макар В.М. Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 5. – С. 24–31. 8. Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1987. – V. 24. – P. 337–357. 9. Коваль В., Макар В., Савула Я. Генерація адаптивних сіток з чотирикутних елементів у скінченноелементному аналізі // Вісник Львівського національного університету ім.І.Франка, серія “Прикладна математика та інформатика”, 2002. 10. Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., Hinton E., Wu J. A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1991. – V. 32. – P. 849–866.

УДК 004.051

Т. Коротєєва, Є. Яворський

Національний університет “Львівська політехніка”

## РОЗРОБЛЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО ФОРМАТУ ДЛЯ СУМІСНОГО ВИКОРИСТАННЯ З LSB-МЕТОДОМ СТЕГANOГРАФІЧНОГО КОДУВАННЯ У BMP-КОНТЕЙНЕРИ

© Коротєєва Т., Яворський Є., 2011

**Розглянуто практичний аспект створення наповнених стегоконтейнерів з використанням розробленого формату даних, які вони містять. Проаналізовано витрати часу на генерування даних у найменш впливових бітах зображення.**

**Ключові слова:** стеганографія, зображення, біт, кодування.

**The practical side of creating filled stego-containers using the developed format of crypted data was reviewed. Time spent on generating data in least significant bits of image was analyzed.**

**Key words:** steganography, picture, bit, coding.

### 1. Аналіз наявних засобів прикладної стеганографії.

Потреба в прихованому обміні інформацією постає практично у всіх галузях життя, де використовується комп'ютерна обробка даних, особливо у комп'ютерних мережах та там, де дуже важлива та потрібна захищеність. Стеганографія – це метод приховування інформації, коли сам факт наявності інформації стає невидимим. Методом стеганографії можна зашифрувати будь-яку інформацію у мультимедійному форматі. Використання стеганографічного кодування дає змогу широко застосувати можливості комп'ютерних систем для такого збереження даних, коли про сам факт наявності прихованої інформації не буде відомо.

Сьогодні більшістю програмних засобів для стеганографічного кодування даних керують служби безпеки, що ускладнює доступ до них. З наявних вільних застосувань та програмних пакетів під керуванням ОС “Windows” можна виокремити два засоби: SteganoG та Проект «Зоря». Дослідження обох проектів показали, що необхідно розвивати цю проблематику, щоб вдосконалити можливості існуючих засобів. Розглянемо по черзі переваги та недоліки вказаних продуктів.