УДК 512.12: 538.56

Я. Драґан
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ СТОХАСТИЧНОЇ СИСТЕМИ: ІНДИКАТИВНІСТЬ ЇЇ СИҐНАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ТА КОНДИЦІЙНІСТЬ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ

Підкреслено скінченність уточнення понять і термінів “математична модель стохастичної коливної системи” та характеристику її станів. Запроваджено нове поняття “статистична індикативність математичної моделі” як така її структурна властивість, що визначає спосіб збору даних і водночас забезпечує кондиційність їх в разі, коли доступні тільки сиґнали від стохастичної коливної системи, трактованої як чорна скринька в стилі кібернетики. Обґрунтовано процедуру статистичного оцінювання цих характеристик методами статистики періодично корельованих випадкових процесів.

Ключові слова: математична модель, стохастична коливна система, статистичне оцінювання, статистична індикативність, кондиційність даних, стан стохастичної системи.

There is underlined the necessity of the notions and terms specification for the mathematical model of a stochastic vibration system and its states characteristic. The new notion of mathematical model statistical indicativity as such its structural property which determines the way of data gathering and in the same time ensures the conditionality of them in the case, when the signals from stochastic vibration system treated as black box in cybernenics manner are exclusively only accessible, is introduced. The procedure of statistical estimation of these characteristics by the periodically correlated random process statistics methods is substantiated.

Key words: mathematical model, statistical vibration system, statistical estimation, statistical indicativity, data conditionality, state of stochastic vibration system.

Формулювання проблеми

Наукові дослідження (оскільки наука, за словами нашого відомого біолога М. Холодного, є системою знань, здатною до саморозвитку) завжди ґрунтуються на певних (може не завжди вповні усвідомлених та явно сформульованих) уявленнях про досліджуваний об’єкт. Такі уявлення у процесі дослідження формуються, «кристалізуються» у певну конкретну (за змогою сформалізовану) систему, що її прийнято називати моделлю. Форму її визначає «взаємодія» проблемної області дослідження із задачами, що їх має намір розв’язати дослідник.

У наш час практично завжди дослідники намагаються зробити модель математичною, тобто такою, що вона стає об’єктом певного розділу математики, бо це відкриває шлях для використання здобутків цієї галузі математики для вивчення моделі, зокрема формулювання розв’язуваних задач дослідження у формі задач цього розділу математики.

Оскільки більшість сучасних наукових досліджень стосується багатофакторних об’єктів, то дослідники намагаються будувати моделі цих об’єктів, а особливо породжуваних ними сиґналів, які переносять відомості про досліджувані об’єкти як певні (адекватні до ситуації) об’єкти теорії ймовірностей і випадкових процесів, що автоматично ґарантуватиме застосовність до опрацювання сиґналів (для «видобування» з них переношуваних відомостей) відповідних методів статистики. Успіх дослідження залежить від того, наскільки вдало сформульовано вимоги до моделі – так, щоб вони або вже безпосередньо визначили модель як об'єкт певного розділу математики, або полегшували розроблення потрібного нового. Модель прецінь має бути коректно обґрунтованим (за правилами математики) математичним об'єктом і, крім того, очевидно поданим формально. Тому найприроднішим у наш час є формульне подання моделі. Та, як твердить відомий афоризм, фізика – не формули, а тлумачення формул. Тому без належного тлумачення формульне подання стає безпредметним, бо й самі формули слугують для зовсім різних (відмінних одна від одної) цілей [1].

Скінченність арґументації (обґрунтування) конкретного математичного об'єкта (чи формули) як «претендента» на роль моделі для заданої задачі у конкретній предметній області є через це неодмінною. Бо підвищення ефективності наукових досліджень і використання їх у практиці зумовлює втілення підвищених вимог у всіх ланках тріяди «модель – алгоритм – програмна реалізація» (МАПР) опрацювання сигналів та функціонування інформаційних систем [2]. Вибір (а, власне, структура) моделі є вирішальним фактором [1, 3]: (модель) структура моделі має втілювати істотні з погляду розв'язуваних задач властивості досліджуваних об'єктів, заступати (представляти) їх під час досліджень – як теоретичних, так і в організації експериментальних, тобто бути в цьому сенсі ізоморфною їм (мати таку саму форму незалежно від природи об'єктів) і бути підставою для опрацювання та тлумачення результатів його, тобто визначати ланку «алгоритм» МАПР–тріяди.

Обґрунтованість застосовності до математичної моделі правил і дій того розділу математики, об'єктом якого вона є, автоматизує умововоди (формальним дотриманням правил) і ґарантує істинність отримуваних результатів – як теоретичних, так і експериментальних, сенс яких можна тлумачити винятково у термінах властивостей моделі.

Центральність ролі моделі визначає ще й той факт, що алгоритм, який за означенням є послідовністю узгоджених між собою (математичних) дій (операцій) з певного зумовленого задачею набору їх – таких, що виконання їх має привести за скінченну кількість кроків до розв'язку задачі дослідження, має складатись з дій такого набору, що є виконаними над моделлю яко математичним об'єктом. Ця обставина розкриває сенс математичного забезпечення комп'ютерних систем, бо належно обґрунтований адекватний моделі алгоритм стає підставою для розроблення програмної реалізації його, тобто програмного забезпечення комп'ютерної системи – складової апаратно-програмного комплексу в сенсі В. Глушкова.

Модель як заступник об'єкта у дослідженні має вже яко математична втілювати у своїй структурі суттєві для розв'язання задач дослідження ознаки – властивості, закономірності, пов'язання їх, визначальні для досліджуваного об'єкта і задач. Звідси випливає рідко коли наголошувана роль задач (чи, краще б сказати, типу задач) як стимулятора і визначника якості в обґрунтуванні структури моделі. Це часто вимагає запровадження відповідних ситуації понять, розроблення методів, розвою потрібних математичних засобів і навіть ініціювання нових напрямів у самій математиці, як твердить відома теза: більшість розділів математики виникли з потреби розібратись (тобто зарадити собі) у конкретних клопітних ситуаціях (див. [4]).

Коли мова про стохастичні коливні системи (СКС), то це ставить вимоги, що всі засоби щодо означення та визначення їх стану модель сиґналу як носія відомостей про СКС має містити у своїй структурі. Вони вимагають конкретизації як поняття стану СКС і відображення його в характеристиках моделі, так і визначника її якості в сенсі праксеології Є. Слуцького [1], що забезпечує у цьому разі ефективність, бо, за словами вихованця Львівської математичної школи Г. Штайнгауза: «своєрідність математики прихована в запроваджуваних нею означеннях. Вибір означення визначає напрямок, у якому збираємось розвивати математику».

Системний аналіз структури моделі ритміки та якості оцінення її станів

Під ритмікою прийнято розуміти стохастичні коливання, що є вислідом поєднання дії двох принципово різних типів закономірностей: повторності та стохастичності (з грецької stochasis здогад, тут випадковий, але підпорядкований імовірнісним законам). Ритміка (з грецької rhythmicos розмірений; тут упорядковане чергування елементів чогось) є характерним проявом коливності складних «непрозорих» систем, коли доступні тільки отримувані від них спонтанно висилані чи стимульовані сиґнали, що несуть відомості про цю коливніть. Такі системи тому трактують у термінах кібернетики як чорні скриньки, на відміну від «прозорих», що їх описують засобами виявленого механізму (навіть коли доводиться використовувати для отримання відомостей про нього сиґнали), а його описують засобами рівнянь математичної фізики (зазвичай такий опис є детермінованим) або ж ідейно близькими до нього засобами статистичної фізики (механіки, термодинаміки, кінетики).

Показано, що адекватною моделлю стохастичних коливань (з охопленням як узагальненням використовуваних часткових моделей їх: адитивної, мультиплікативної, об'єднання обох їх, різного роду імпульсних з модульованими еквідистантними імпульсами, поліімпульсної пуассонової) є періодично корельований випадковий процес (ПКВП), що обґрунтовано і досліджено в багатьох публікаціях, автора та його колег (див. [3–6]). Основним, потрібним у цьому разі фактом є запроваджене в 1969 р. і повністю обґрунтоване у 1975 р. подання через модуляційні стаціонарні компоненти такого процесу та його коваріяції [5]

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \eta_k(t)\, e^{ik\Lambda t},\ t \in R,\quad r_\xi(t,s) = \sum_{k,j \in Z} D_{kj}^{\eta}(t-s)\, e^{i\Lambda(ktz - js)}),\ t,s \in R$$

де $\{\eta_k(t),\ k \in Z\}$ – векторний зчисленновимірний стаціонарний випадковий процес, Z – множина цілих чисел, R – дійсна числова вісь $D^{\eta}(u) = [D^{\eta}{}_{kj}(u)]_{k,ij \in Z}$ – зчисленновимірна кореляційна матриця згадних стаціонарних компонент ПКВП.

$\xi(t)$, $t \in R$, $\Lambda = 2\pi / T$ – базова частота, T – період корельованості. Підкреслімо: означення ПКВП вимагає тільки, щоб він (період) існував, але не обов'язково був відомий.

Фізичний сенс цього подання в тому, що воно, як сума адитивно-мультиплікативних моделей вигляду $\xi(t) = \eta(t) f_1(t) + f_2(t)$, де $\eta(t)$ – стаціонарний випадковий процес, а $f_1(t)$ і $f_2(t)$ – періодичні функції періоду T, є узагальненням такої моделі та найзагальнішим виглядом її. Це випливає з того, що кожен множник у вигляді стаціонарного випадкового процесу задає ступінь вільності у просторі випадкових величин. Зрозуміло, що максимальною кількість ступенів вільності буде, коли ці множники модулюватимуть найпростіші періодичні функції, якими є гармоніки частот, кратних основній (базовій). І тоді процес стаціонарних компонент буде максимального ранґу, запровадженого під назвою "локальний" у праці автора [7].

Якщо локальний ранґ цього процесу m, тобто лінійно незалежними будуть тільки m компонент, то матимемо інший вираз: стаціонарних компонент буде тільки m, і базис в $L^2\,(R/T)$ – просторі періодичних періоду T, інтеґровних з квадратом функцій, творитимуть лінійно незалежні функції

$$p_k(t) = \sum_{q \in z} c_{qk}\, e^{iq\Lambda t},\ t \in R,$$

де $\overline{c} = [c_{qk}]_{q \in Z,\ k = 1,m}$ – матриця повного ранґу, а ПКВП та його коваріяція виразяться через них як

$$\xi(t) = \sum_{k=1,m} \eta_k(t) p_k(t);\quad r(t,s) = \sum_{k,j=1,m} R_{kj}(t-s)\, p_k(t) p_j(s),$$

де $R(u) = [R_{kj}(u)]$ – матриця-функція максимального ранґу і $D(u) = cR(u)\tilde{c}$. Збіжність (тип її) цих виразів визначено в енергетичній теорії [5].

Звідси висновок: ранґ процесу стаціонарних компонент ПКВП визначає своєрідну міру стаціонарної випадковості у його структурі та вигляд його подання.

А загалом цю структуру можна охарактеризувати так: тут маємо своєрідне «розділення змінних», коли трактувати ПКВП як функцію двох змінних: випадкової події $\omega \in \Omega$, де Ω – просторів елементарних подій, та часу $t \in R$, з урахуванням кількості «джерел випадковості».

Формально цю ситуацію зручно описати так: позначімо через K^{ξ} колмогоровський гільбертів простір випадкових величин, породжених значеннями процесу $\xi(t)$, $t \in R$, через K_k^{η} – подібний простір, породжений значеннями кожної компоненти $\eta_\kappa \in (t)$, $t \in R$ при $k \in Z$, а через K^{η} – аналогічний простір значень стаціонарного зчисленновимірного процесу $\{\eta_k(t),\ k \in Z\}$, $t \in R$, тобто декартів добуток просторів значень окремих компонент: $K^{\eta} = \times_{k \in Z} K_k^{\eta}$, тоді формально матимемо, що:

$K^{\eta} \circ L^2\,(R/T)$, де $\circ$ – символ адамарового добутку асоційованих просторів K^{η} та $L^2\,(R/T)$, який означується як простір з базисом, елементами якого є покоординатні добутки базисів цих просторів.

Отже, наведений адамарів добуток є абстрактним виразом узагальнення принципу розділення змінних, а потребу узагальнення зумовило накладання на цей принцип ще й своєрідного «зведення до стаціонарності», коли дослідження нестаціонарного випадкового процесу перетвореннями його (правда, це здійснюють часто перетворенням часової області його задання) зводять до дослідження стаціонарного. А останній тип процесів з часу запровадження його Є. Слуцьким і формального означення О. Хінчином настільки добре й різнобічно вивчений – розвинена і систематизована його теорія і статистика [8], що можна трактувати його як еталонний, а зведення до стаціонарності – як розв'язання задачі, подібно, як у разі інтеґрування, зведенням то табличного вигляду.

Покажімо, що таке абстрактне подання справді можна трактувати як узагальнення, хоч і специфічне, відомого розділення змінних у методі Фур'є під час розв'язування задач матфізики. Скористаймось для цього докладно описаним у посібнику [4] поняттям D-ізоморфізму, який запроваджується на підставі рівності двох виразів коваріяції: раз як означення її та подання його у вигляді скалярного добутку в просторі K

$$R(t-s) = \mathrm{E}\,\xi(t)\,\overline{\xi(s)} = (\xi_t\, \xi_s)_K,$$

де Е – символ математичного сподівання, а другий – з виразу її, справедливого винятково в разі стаціонарного процесу, як додатно означеної функції за теоремою Хінчина (що по суті є теоремою Матіяса–Бохнера з теорії функцій) і теж подання його як скалярного добутку в просторі $L^2\,(R/S)$ інтеґровних з квадратом за мірою S функцій

$$R(t-s) = \int_{\mathrm{R}} e^{i(t-s)\lambda} S(d\lambda) = (e^{it}, e^{is})_{L2\,(R/S)}$$

З цього видно, що цей ізоморфізм є ізометричним і задається відповідністю $K \ni \xi(t) \leftrightarrow e^{it\cdot} \in L^2$ (R/S), або коротко $\xi(t) = \mathrm{D}\, e^{it\cdot}$**.** Далі з факту, що δ-функція є густиною індикатора як міри, тобто що $\chi_{d\lambda}(\mu)/d\lambda = \delta(\lambda-\mu)$, для фазоракомплексних гармонік одержимо вираз $e^{it\cdot} = \int_{\mathrm{R}} e^{it\lambda}\, \chi d\lambda(\cdot)$, звідки, зважаючи на декомпозиційний ізоморфізм D, випливає подання Колмогорова –Крамера самого процесу $\xi(t) = \int_{\mathrm{R}} e^{it\lambda}\, \mathrm{Z}(d\lambda)$, де випадкова міра $Z(\Delta) = \mathrm{D}\chi_\Delta(\cdot) \in K$, $\Delta \in \mathrm{R}$.

Хоч це подання значень процесу як випадкових величин через випадкову міру подібне на інтеграл Фур'є–Лебеґа, але ним не є, як показує наведена тут його онтологія. Сенс цього виразу пояснює та обставина, що множина індикаторів творить базис простору $L^2\,(R/S)$ – такий, що

$$(\chi_{\Delta}, \chi_{\Delta`})_K = \int_{\mathrm{R}} \chi_\Delta(\lambda)\, \chi_{\Delta`}(\lambda)\, S(d\lambda) = \int_{\mathrm{R}} \chi_{\Delta \cap \Delta`}(\lambda)\, S(d\lambda) = S(\Delta \cap \Delta`).$$

Але на підставі D- ізоморфізму маємо, що

$$(\chi_{\Delta}, \chi_{\Delta`})_K = (\mathrm{Z}(\Delta), \mathrm{Z}(\Delta`))_K = \mathrm{E}\,\overline{\mathrm{Z}}(\Delta)\,\mathrm{Z}(\Delta`).$$

Отже, з цього випливає, що подання Колмогорова–Крамера стаціонарного ВП можна трактувати як вираз його значень через випадкову міру $\mathrm{Z}(\Delta)$, $\Delta \in \mathrm{R}$ з некорельованими (ортогональними) значеннями на безперетинних інтервалах частот (λ – частота, бо розмірність її обернена до розмірності часу, тобто в цьому разі $[\lambda] = [t]^{-1}$), і тому

$$\mathrm{E}\,\mathrm{Z}(\Delta)\,\overline{\mathrm{Z}(\Delta`)} = S(\Delta \cap \Delta`),$$

що й виражає цю некорельованість.

Оскільки при зміні $t \in R$ значення фазорів можна трактувати як значення гармоніки, то цей вираз умовно можна розглядати як розклад на гармонічні складові: їхні випадкові амплітуди визначаються тим, що квадрати їхніх модулів задає спектральна міра процесу $S(\Delta) = \mathrm{E}\,|\,\mathrm{Z}(\Delta)\,|^2 = \|\,\mathrm{Z}(\Delta)\|_K^2$, а фази випадають із цього розгляду. І це істотний факт (підкреслімо це!)

Саме цей факт певною мірою підтверджує тільки часткову справедливість тези Колмогорова, що «наявність спектра потужності процесу – автоматичний наслідок його статистичної стаціонарності і не обов'язково вказує на виникнення процесу із накладання гармонічних компонент». У чому ж частковість підтвердження? А в тому, що Колмогоров підкреслив тільки достатність стаціонарності для існування спектра потужності, а про конечну умову промовчав. Так само промовчав про стосунок спектра до корельованості та стаціонарності до коливань, а стаття його має назву «Статистична теорія коливань з неперервним спектром». Він не помітив, що стаціонарність не тільки визначає наявність гармонік, а навіть більше – некорельованість їх. Далі побачимо, що стаціонарність випадкового процесу та некорельованість його гармонічних складових рівносильні. І не так просто пов’язані з коливаннями.

Конечну умову існування спектра і те, що коливність не означає стаціонарність, а надто рівносильність їх, можна установити, використовуючи поняття гармонізовності випадкового процесу, яке запровадив М. Лоєв (зрозуміло, що вже нестаціонарного) як розкладності його на гармоніки (очевидно – корельовані). Коливність природно трактувати засобами статистичної теорії як періодичність імовірнісних характеристик, а систему, що породжує такі сиґнали, – як одноперіодний пульсатор, період якого стає періодом корельованості відповідного ПКВП, оскільки спектральна міра $S(\Delta)$, $\Delta\in$ R стаціонарного процесу дорівнює сумі інтенсивностей гармонік (з частотами у смузі Δ), то природною є потреба узагальнити справедливу за надто обмежливої умови гармонізовність Лоєва, замінивши її на іншу – як розклад на гармоніки зі скінченною сумарною інтенсивністю, що дорівнює дисперсії спектральної міри $S\,(\Delta) = \mathrm{E}\mid \mathrm{Z}\,(\Delta)\mid^2$, тобто сумі дисперсій гармонік. Тому її назвали *D*-гармонізовністю.

Оскільки гармонізовним Лоєв назвав процес, який (та його коваріація) мають подання

$$\xi\,(t) = \int_{\mathrm{R}} e^{it\lambda}\,\mathrm{Z}\,(d\lambda),\ r(\,t,s) = \int\int_{\mathrm{R}^2} e^{i(t\lambda - s\mu)} F(d\lambda,\,d\mu),$$

за фізично неінтерпретовної умови, що біміра $F\,(\Delta,\,\Delta`) = \mathrm{E}\,\mathrm{Z}\,(\Delta)\,\overline{\mathrm{Z}\,(\Delta`)}$, має скінченну абсолютну варіацію: $= \int\int_{\mathrm{R}^2} \mid F(d\lambda,\,d\mu)\mid\ < \infty$, то для запровадження загальнішої гармонізовності врахуймо, що тепер звідси $B\,(t\text{-}s) = \mathrm{M}_v\,\{\ r(\,t+v, s+v)\ \} = \int_{\mathrm{R}} e^{i(\,t-s)\lambda} S(d\lambda)$, $B\,(0) = \mathrm{M}_v\,\{\ r(\,v,v)\ \} = S\,(R)$, де $\mathrm{M}_v\,\{\ \cdot\ \}$ – оператор усереднення про всій осі, $S\,(\Delta) = F\,(\Delta,\Delta)$ – діагональна міра біміри $F\,(\Delta,\Delta`)$, а $S\,(R)$ – її варіяція на діагоналі, то природно зрозуміла *D*-гармонізовність просто означатиме, що сума інтенсивностей гармонік дорівнює середній потужності випадкового процесу, а її скінченність $P_\xi = \mathrm{M}_v\,\{\ r(\,v,v)\ \} < \infty$ визначить клас π ВП скінченної потужності, який якраз збігається з класом *D*- гармонізовних процесів. Оператор M_v тут виражає усереднення рівнорозподілених фаз гармонік, що рівносильне декореляції їх і веде їх до стаціонаризації процесу.

(Пригадаймо тепер закцентовану вже некорельованість гармонік стаціонарного ВП). Із цього висновок: обов’язкова умова існування спектра випадкового процесу – належність його до класу π. А. Колмогоров (і далеко не тільки він) за перипетіями зі спектрами потужності недобачив, що розкладність стаціонарного ВП на гармоніки через непов’язаність їхніх фаз ніякої регулярної коливності не передбачає. Хоч ще віддавна люди рахують час за частотою появи фаз небесних світил, та справді годі збагнути, як ірраціональниі числа *е* та π у виразах колово-коливних рухів і ймовірностей гарантують раціо гармонії світу.

Що ж до ПКВП, то оскільки середне по всій числовій осі в разі періодичної функції дорівнює її середньому по відрізку завдовжки в період, то середня потужність ПКВП дорівнює сумі потужностей його стаціонарних компонент, і він, очевидно, є підкласом класу π, а стаціонарні процеси творять підклас класу π^T: стаціонарні ВП , π^T π.

Це показує, що множина інтенсивностей складових гармонік ПКВП поділяється на множини інтенсивностей його стаціонарних компонент і визначає розбиття «випадковості», що її містить у своїй структурі ПКВП, на сукупність «випадковостей» цих компонент, а усереднення тільки усуває їхню корельованість, яку описують позадіагональні елементи матриці $D(u)$, які, як комплекс-нозначні, характеризують фазові співвідношення гармонік компонент. Ця обставина, як ще один «слід стаціонарності» у структурі ПКВП, обґрунтовує застосовність стаціонарної статистики для визначення гармонічного складу процесу і розкриває справжній сенс уживаного (навіть у публікаціях) вульґаризму: розгляд «у межах стаціонарної моделі», ніби ці «межі» можна вибрати як заманеться (як у пригодах Аліси Л. Керолла). Фактично ж це означає, що ПКВП, як і клас π, належить до типу стаціонаризовних (у сенсі Г. Герда): ПКВП усередненням за період, а процес класу π – усередненням по всій числовій осі. Аналогічно – щодо процесів скінченної енергії стаціонаризація, а отже, декореляція гармонік досягається інтегруванням по всій осі його параметричної коваріяції. Тому гармонізовний ВП завжди автоматично є стаціонаризовним.

Отже, з погляду теорії класу π стаціонарний процес через відсутність фазових пов’язань його складових гармонік не містить у своїй структурі ніякої повторності як періодичності чи хоча б майже періодичності, а його гармоніки є тільки віртуальними (з латин. virtualis – сильний, здібний; той, що може або має проявитись), бо їх можна виділити частотними фільтрами, як підкреслювали свого часу ще Слуцький та Колмогоров. І в термінах енергетичної теорії, оскільки клас ПКВП, скінченної за період T потужності, позначений π^T, то клас стаціонарних процесів скінченної дисперсії – сталої і рівної інтенсивності його значень $d_\xi = E\,|\xi(\,t\,)|^2 = R\,(0)$ для всіх $t \in$ R, має бути позначений хіба що як π^0, а клас π – відповідно як π^∞.

Скінченність і відмінність від нуля періоду корельованості є індикатором вкладених у ПКВП стаціонарних елементів: послідовностей відліків його значень через період, кореляційних компонент і спектральних смуг ширини, що дорівнює базовій частоті, що обґрунтовує застосовність до таких процесів належно змодифікованих засобів статистики стаціонарних. І коли тепер запровадити як термін скорочену назву оцінки якості статистичного матеріалу – його кондиційність, що охоплює собою вимоги:

1) точності замірів;
2) статистичної однорідності;
3) достатнього обсягу для забезпечення потрібної точності визначення на його підставі оцінок імовірнісних характеристик, а наявність у структурі математичної моделі засобу, який вказує спосіб відбору (реєстрації) такого матеріалу, як індикативність моделі, то коротко можемо сказати, що ПКВП-модель внаслідок наявності в означенні її періоду корельованості є індикативною. А подання такого процесу через стаціонарні компоненти є водночас втіленням у його структурі розділення змінних – випадковості і періодичності. Тоді стан стохастичної коливної системи мають визначати такі дві узагальнені складові – період корельованості та характеристики випадковості, що їх дає статистика ПКВП. У цьому проявляється активна, може й навіть імперативна системотворність ПКВП-моделі: вона викликала до життя не тільки полі-ПКВП як модель кількаперіодної ритміки, але й усю концепцію енергетичної теорії (див. [5]).

Висновки

Стимульоване МАПР-тріядою уточнення понять аналізу стохастичної коливної системи і, передовсім, поняття її стану відкрило, своєю чергою, важливість як індикативності засобами структури математичної моделі цієї системи статистичної однорідності значень нестаціонарного процесу, який є математичною моделлю сигналу – носія відомостей про характер коливань системи, так і нового типу звідності нестаціонарного випадкового процесу до стаціонарного, оскільки стаціонарність отримуваного процесу є підтвердженням того, що система стабільно функціонує, і обґрунтуванням застосовності усіх здобутків стаціонарної теорії і статистики для виведення вірогідних висновків про досліджувану систему.

ПКВП-модель як формальний опис одноперіодного стохастичного коливання через пов'язаність її з теорією стаціонарних процесів, що є проявом (своєї у кожному разі) стабільності ймовірнісного режиму породження сиґналу, є індикативною внаслідок наявності періоду корельованості – характеристичної ознаки типу нестаціонарності і водночас зміни в часі інтенсивності сиґналу, що є результатом когерентності його гармонічних складових, тобто сфазованості їх, і забезпечує скінченність середньої потужності сиґналу, тобто застосовність енергетичної теорії для його вивчення.

Наявність періоду в структурі ПКВП внаслідок доведених властивостей цього класу процесів індикує синфазні вкладені стаціонарні випадкові послідовності або ж послідовності інформаційно еквівалентних їм величин (компонент розкладів, фільтрових вирізок). Це обґрунтовує кондиційність отримуваних даних і застосовність для їхнього опрацювання належно змодифікованих методів стаціонарної статистики. Обчислені статистичні оцінки характеристик ПКВП будуть визначниками стану досліджуваної стохастичної системи. Визначальний параметр стану – період корельованості оцінюється засобами статистики ПКВП методом пробного періоду або ж у разі різкого прояву певної фази коливань процесу – за статистикою часових відстаней між такими проявами. Зміна стану системи оцінюється на підставі концепції Слуцького [9] : режим усталеності коливань замінюється іншим – зі своїми параметрами, але такого самого типу.

Цим забезпечується в такому випадку інформаційна повнота МАПР-тріяди і підтверджується якісність ПКВП- моделі.

1. Драґан Я.П., Медиковський М.О., Овсяк В.К., Сікора Л.С., Яворський Б.І. Системний аналіз концепції та принципів побудови математичної моделі досліджуваного об'єкта в фізико-технічних науках та оцінювання її якості // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: "Комп'ютерні науки та інформаційні технології", 2010, № 686. – С.170–179. 2. Dragan Y.P. Energetic concept in the theory of nonstationary stochastic signals : representations, transformations, statistical estimations // Latvian signal processing international conference: Proc. V.1– Riga: Zinatne, 1990. –P.32–36. 3. Драґан Я.П. Математичне й алгоритмічно-програмне забезпечення комп'ютерних засобів статистичного опрацювання стохастичних коливань (ритмічних процесів) // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: "Інформаційні системи та мережі", 2008, № 621. – С.124–130. 4. Драґан Я.П, Сікора Л.С., Яворський Б.І. Основи сучасної теорії стохастичних сигналів: енергетична концепція, математичний апарат, фізичне тлумачення. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1999. – 133 с. 5. Драґан Я. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сиґналів. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1997. – 361 с. 6. Информационные связи био-гелио-геофизических явлений и элементы их прогноза / Войчишин К.С., Драган Я.П., Куксенко В.И, Михайловский В.Н. – К.: Наукова думка, 1983. – 366 с. 7. Драган Я.П. Ранг векторного стационарного случайного процесса и его структура // Отбор и передача информации. – 1986, № 74. – С.3–6. 8.Справочник по теории вероятностей и математической статистике / ред. Королюк В.С. – К.: Наукова думка, 1978. – 582 с. 9. Слуцкий Е.Сложение случайных причин как источник циклических процессов // Є. Слуцький. Визнання. Творча спадщина з погляду сучасності. – К.: Знання, 2007. – 919 с. – С.703–755.

УДК 621.39

Я. Соколовський, В. Шиманський
Національний лісотехнічний університет України

ФРАКТАЛЬНА МОДЕЛЬ ТЕПЛО- ТА МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ У КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ

Розглянуто фрактальну модель тепло- та масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах, що описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком. Різницевим методом отримано числовий розв'язок задачі для різних значень дробової похідної.

Ключові слова: похідна дробового порядку, фрактальна, масоперенесення, капілярно-пористий, числовий метод.

There was considered fractal model of heat and mass transfer in capillary-porous materials which is described by the system of differential equations in partial derivatives with fractional order. The difference method receives the numerical decision of a problem at various orders of a fractional derivative.

Ключові слова: fractional order derivative, fractal, mass transfer, capillary-porous, numerical method.

Вступ

Безліч питань, пов'язаних з природою релаксації сильнонерівноважних процесів до стану рівноваги, викликають значний практичний інтерес. До нерівноважних процесів належать процеси тепло- та масоперенесення в процесі сушіння деревини. Особливістю нерівноважних процесів у середовищах з фрактальною структурою є повільна релаксація кореляційних зв'язків, коли багаточастинні функції розподілу не розпадаються на добуток одночасткових функцій розподілу. Зокрема, можуть існувати нерівноважні стаціонарні стани, коли система в розглянутій задачі в принципі не досягає рівноважного стану. Все це призводить до того, що традиційні методи