

1. Nigmatullin R.R. // *Phys. stat. Solidi (b)*. 1986. V. 133. P.425. 2. Nigmatullin R.R. // *Ibid.* 1986. V. 133. P.713. 3. Бабенко Ю.И. Тепломасообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков. – Л.: Химия, 1986. – 144 с. 4. Нигматулин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // *ТМФ*. – 1992. – Т. 90. – № 3. – С.354–368. 5. Суханов А.Д., Тимашев С.Ф. // *Журн. физ. химии*. – 1998. – Т. 72. – № 11. – 2073 с. 6. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесн. пром-ть, 1990. – 336 с. 7. Соколовський Я.І., Бакалець А. Моделювання нелінійних тепломасообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”*. – Львів. – 2005, Вип. 543. – С. 129–134. 8. Дендюк В.М., Поберейко В.П., Соколовський Я.І. Застосування методу кінцевих елементів для розрахунку нестационарних полів вологоперенесення у висушуваній деревині // *Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість*, 2003, Вип. 28. – С.100–106. 9. Самко С.Г., Килбас А.А., Марищев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с. 10. Povstenko Y.Z. / *International Journal of Engineering Science*, 43 (2005): 977–991. 11. Povstenko Y.Z. / *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007): 2324–2348. 12. Povstenko Y.Z. / *Journal of Thermal Stresses*, 28: 83-102, 2005. 13. Бейбалаев В.Д. Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой : автореф. дис. канд. физ.-матем. наук. – Махачкала, 2009. – 18 с. 14. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // *Вестник ДГУ*. – 2008. – Вып. 6. – С. 46–54.

УДК 519.853

М. Лобур, І. Фармага, У. Марікуца, О. Матвійків
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

АНАЛІЗ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО ПРОЕКТУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

© Лобур М., Фармага І., Марікуца У., Матвійків О., 2011

Розроблено єдиний підхід як до розв’язання обернених задач теплопровідності, так і до забезпечення функціональних та конструктивно-технологічних параметрів технічних об’єктів, основою якого є причинно-наслідкова постановка задачі синтезу.

Ключові слова: теплове проектування, обернені задачі теплопровідності, параметрична оптимізація.

A unified approach to solving inverse problems of heat conduction as well as providing functional and design and technological parameters of technical objects, based on a causal synthesis problem statement.

Keywords: thermal design, inverse heat conduction problems, parametric optimization.

Вступ

Нині добре розвинуто методи аналізу температурних полів та розрахунку процесів теплообміну в різних сферах застосування. Розроблено цілий ряд програмних систем, призначених для наукових та інженерних розрахунків. Постійно актуальними, з одного боку, і складними у формалізації, з другого, є задачі синтезу, а саме знаходження оптимальних проектних рішень з урахуванням температурних характеристик технічних об’єктів.

У роботі розроблено єдиний підхід як до розв’язання обернених задач теплопровідності, так і до забезпечення функціональних та конструктивно-технологічних параметрів технічних об’єктів. Основою цього підходу є причинно-наслідкова постановка задачі синтезу. Розглянуто загальну постановку векторної оптимізації, оператори та функціонали як неекстремальних, так і екстремальних.

мальних задач. Наведено опис розв'язання окремих задач теплового проектування на прикладі мікроелектронних пристроїв.

Аналіз і постановка задач

Задачі теплового проектування технічних об'єктів поділяються на дві групи:

- 1) задачі прийняття схемотехнічних, конструкторських, технологічних рішень з урахуванням теплових обмежень;
- 2) зворотні задачі теплопровідності, які виникають під час проектування технічних об'єктів [1, 2].

Такий поділ здійснено на основі виду й умов формування критеріальної функції.

Для першої групи характерне формування критеріальних функцій при розробленні математичного забезпечення схемотехнічних, конструкторських, технологічних САПР. Результати аналізу теплових режимів виступають в ролі обмежень на критеріальну функцію і використовуються для формування області пошуку оптимального рішення. В загальному випадку задача формалізується у вигляді задачі векторної оптимізації [3]:

$$\text{визначити: } \bar{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

$$\text{що забезпечує: } \min \bar{Q}(\bar{x}) \\ x \in Ropt$$

$$\text{за умови } \bar{G}(\bar{x}) = g(\bar{x}) > 0,$$

де \bar{x}^* – вектор оптимальних значень варійованих схемотехнічних і конструкторсько-технологічних параметрів на відповідних етапах проектування; $\bar{Q}(\bar{x})$ – вектор критеріїв оптимальності, які відповідають різним цілям за етапами проектування; $\bar{G}(\bar{x})$ – вектор функції обмежень $g(\bar{x})$ на параметри, які варіюються, і критеріальну функцію, які враховують тепловий режим технічного об'єкта і його параметри.

Для розв'язання задач цієї групи формуються макромоделі температурного поля або використовуються спрощені моделі процесу теплопередачі, в яких змінними є параметри, що варіюються, а решта характеристик теплового режиму приймаються постійними для конкретної задачі й визначаються за допомогою аналізу загальної теплової моделі.

Зупинимось детальніше на формулюванні задач другої групи. Розв'язання цих задач спрямоване на прийняття технічних рішень згідно з вибраною концепцією системи забезпечення теплового режиму, здійснюється вибір її проектних параметрів, уточнюються характеристики, які є результатом схемотехнічного і конструкторсько-технологічного етапів проектування.

Основою оптимального теплового проектування є математична тепла модель (моделі) пристрою, який розробляється, і цільова функція, яка екстремізується. Модель зв'язує шукані проектні (причинні – з погляду постановки оберненої задачі) характеристики з параметрами, які описують тепловий стан об'єкта (наслідкові характеристики) і навантажувальними діями, наприклад, зовнішніми і внутрішніми тепловими потоками. Можливим варіантам проектно-конструкторських рішень відповідають визначені теплообмінні та геометричні характеристики конструкції технічних об'єктів.

Отже, якщо дотримуватись концепції причинних і наслідкових характеристик, то сама задача оптимального теплового проектування може розглядатися як обернена задача теплообміну: за відомими умовами, які визначають допустимий тепловий стан об'єкта (тобто заданої області зміни наслідкової характеристики), знайти потрібні причинні характеристики, які задовольняють цей стан і критерій оптимальності теплового проектування.

За ознакою шуканої причини характеристики в загальному випадку вводяться чотири види оберненої задачі – граничні, коефіцієнтні, ретроспективні та геометричні. Граничні задачі полягають в знаходженні функцій і параметрів, які є складовими граничних умов; коефіцієнтні – функцій і параметрів, які є складовими коефіцієнтів рівнянь; ретроспективні, тобто обернені назад за часом – у визначенні початкових умов; геометричні – в реконструкції геометричних характеристик області чи якихось характерних компонентів у середині.

Розглянемо математичну формалізацію описаних задач. Математична теплова модель температурного поля, розроблена в [4, 5], являє собою:

$$T(x, y, z, t) = W(x, y, z, t, R), \quad (1)$$

де W – розв'язання математичної задачі теплопровідності в просторі координат x, y, z, t в обмеженій області; R – вектор характеристик, який містить граничні, початкові, геометричні, теплофізичні коефіцієнти.

Для дослідження обернених задач зручним записом математичної моделі є операторне рівняння першого роду, наведене в [6, 7], яке використовується в [8]

$$A u = f, \quad (2)$$

в якому u та f позначають, відповідно, шукані та вхідні (за якими спостерігають) характеристики, що належать деяким метричним просторам U та F . Оператор A , який діє з U в F , формалізує сукупність операцій, які визначаються математичною моделлю температурного поля (5.1), встановлює причинно-наслідкові зв'язки між шуканими величинами і вхідними (за якими спостерігають) величинами. Величина U може бути вектором $U \subseteq R$ або вектор-функцією. Роль f виконує вектор або функція стану $f(w)$ (в певних випадках $f = w$).

Визначальне значення для розв'язання обернених задач мають їхні обчислювальні постановки. В загальному всі постановки задач, які розглядаються, можна розділити на екстремальні (варіаційні) і неекстремальні [6].

В екстремальній постановці обернена задача розглядається як оптимізаційна, яка передбачає побудову цільового функціонала з подальшим пошуком його екстремуму. Для операторного рівняння (2) це зводиться до мінімізації функціонала нев'язки

$$E(u) = \| Au - f \|_F. \quad (3)$$

Розв'язком оберненої задачі в цьому випадку буде таке значення u , за якого $E(u)$ досягає максимального або близького до нього наперед обумовленого рівня.

Для розв'язання таких задач використовують числові методи теорії оптимізації [9, 10]. Тут можливі два випадки:

- 1) задачу розв'язують у функціональному просторі;
- 2) рішення шукається в просторі параметрів.

У першому випадку визначають функції, які екстремізують функціонал від цих функцій – це функціональна оптимізація. В другому – екстремізується функція скінченної кількості параметрів – параметрична оптимізація.

Як приклад, використовуємо функціонали [11]:

$$J_1 = \int_0^{t_p} \int_{\Omega} |w(r, R, t) - f(r, t)|^p dr dt, \quad (4)$$

$$J_2 = \max_{[0, t]} \int_{\Omega} |w(r, R, t) - f(r, t)|^p dr dt, \quad (5)$$

$$J_3 = \max_{[0, t] \times [\Omega]} |w(r, R, t) - f(r, t)|^p dr dt, \quad (5a)$$

де $r \in \Omega$ – координати (наприклад x, y, z) в обмеженій області Ω ; t_p – час роботи пристрою; p – деяке додатне число.

Квадратичний функціонал ($p=2$) (4) використовувався для постановки і розв'язання задач в [12]. Якщо замість неперервної функції $R(r, t)$ розглядати її скінченний аналог у вигляді вектора $\bar{R} = [R_1, R_2, \dots, R_m]$, компоненти якого отримані дискретизацією на вибраній координатно-часовій сітці, тоді вихідну екстремальну постановку можна переформулювати в задачу параметричної оптимізації

$$J = \Delta r \Delta t \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N |w(r_n, \bar{R}, t_n) - f(r_n, t_n)|^p, \quad (6)$$

де $\Delta r, \Delta t$ – приріст r, t ; r_n, t_n – дискретні значення r, t .

В умовах застосування цифрової обчислювальної техніки, а також інтеграції з іншими САПР параметрична постановка оптимізаційної задачі прийнятніша.

На відміну від екстремальної, неекстремальна постановка передбачає можливість розв'язання безпосередньо рівняння (2) через обернення математичної моделі або алгоритму розв'язання прямої задачі теплопровідності. В цих випадках операторне рівняння (2) трансформується в рівняння $u = A^{-1}f$. Такий підхід у процесі теплового проектування можна використати лише для розв'язання простих задач (наприклад, визначення значення теплового потоку в заданий момент часу при заданій температурі в одновимірній моделі тощо). У випадку ускладнення передбачається для розв'язання таких задач вихідну постановку приводити до екстремальної, щоб можна було використати відомі числові методи оптимізації.

Розглянуто дві групи задач – різні за цілями, які формулюються при розробленні оптимізаційної моделі. Вони спрямовані на розв'язання проектних задач у процесі розроблення технічних об'єктів, результат виконання яких – покращення функціональних характеристик пристрою з урахуванням теплового режиму конструкції. З огляду на структуру процесу проектування, а також із метою підвищення ефективності методики прийняття рішення за рахунок участі людини, необхідно здійснити декомпозицію загальної задачі оптимізації відповідно до етапів і стадій проектування. Розв'язок тих чи інших оптимізаційних та обернених задач приводиться до вигляду, придатного для подальшого використання алгоритмів прийняття рішення, наведених в [13].

Окремі результати

Запропонований підхід, який базується на частковій формалізації і алгоритмізації процесу теплового проектування, застосовано для розв'язання цілої низки задач забезпечення характеристик мікроелектронних пристроїв.

Наведемо окремі задачі.

Сформовану задачу трансформуємо у послідовність оптимізаційних задач, формування яких потрібно здійснювати на основі часткових цільових функцій:

- а) забезпечення рівномірного розподілу температурного поля в конструкції;
- б) мінімізація максимальних локальних значень температурного поля;
- в) забезпечення потрібного температурного поля в заданих координатах чи вказаних елементів (яке не перевищує заданої величини);
- г) забезпечення стабільності вихідної функціональної характеристики.

Розв'язують вказані задачі, забезпечуючи оптимальні значення:

- а) топологічних параметрів елементів;
- б) функціональних параметрів елементів (параметр, температурний коефіцієнт, потужність тепловиділення);
- в) характеристик компонентів конструкції (геометричні розміри розміщення; теплофізичні – теплопровідність, теплоємність; об'єднані – тепловий опір, теплова стала)

Результатом розв'язання цих задач є знаходження параметрів додаткового шару з номером j (наприклад нанесення на підкладку з внутрішньої сторони) більш теплопровідного, ніж попередній і наступний шар (наприклад, клей). При цьому вводяться технологічні обмеження на коефіцієнт теплопровідності шару α , товщину h_j , а також на температурний дрейф вихідної функціональної характеристики F_i .

За допомогою цілеспрямованого перерозміщення теплових елементів на підкладці здійснювалась мінімізація температурних допусків на вихідні характеристики гібридних інтегральних схем. Мінімізація базується на автокомпенсації температурного дрейфу параметрів елементів схеми за рахунок зміни температури взаємовпливу (збільшення чи зменшення теплового взаємозв'язку). При цьому враховувались функціональна особливість схеми, виражена у вигляді різнознакових коефіцієнтів параметричної чутливості.

Прикладом використання розв'язків оберненої задачі нестационарної теплопровідності є забезпечення зовнішніх умов теплообміну корпусу мікроелектронного пристрою у жорстких умовах експлуатації на заданому часовому відрізку.

Висновки

У роботі на основі аналізу проблем розв'язання обернених задач теплопровідності, функціональної і параметричної оптимізації розроблено підхід, оснований на причинно-наслідкових зв'язках.

Наведено загальні постановки задачі теплового проектування технічних об'єктів.

Наведено окремі приклади розв'язання задач теплового проектування мікроелектронних пристроїв.

1. Темкин А.Г. *Обратные методы теплопроводности*. – М.: Энергия, 1973. – 464 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. – М.: Наука, 1979. – 299 с.
3. Батищев Д.И. *Задачи и методы векторной оптимизации*. – Горький: Горьковский университет, 1979. – 92 с.
3. Vladimir A. Koval, Igor W. Farmaga, Andrzej J. Strojwas, Stephen W. Director “MONSTR”: A complete thermal simulation of electronics systems // *Proceedings of the 31st Design Automation Conference, San Diego, CA, June 6-10, 1994*, pp. 570–575.
4. Farmaha I. The solving of heat transfer problem of composite materials by finite element method / I. Farmaha, U. Marikutsa, P. Shmigelskyi // *CAD in Mashinery Design. Implementation and Education Problems (CADMD'2010) : Proc. of the XIX Ukrainian-Polish Conference*. – Lviv, 2010. – P. 124–125.
5. Алифанов О.М. *Обратные задачи теплообмена*. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
6. Мацевитый Ю.П., Мултановский А.В. *Идентификация в задачах теплопроводности*. – К.: Наук. думка, 1982. – 240 с.
7. Мацевитый Ю.П., Лушиненко С.Ф. *Идентификация теплофизических свойств твердых тел*. – К.: Наук. думка, 1990. – 216 с.
8. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
9. Химмельблау Д. *Прикладное нелинейное программирование*. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
10. Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
11. Фармага И.В., Тарновский В.Ф., Близнюк М.Б. *Оптимизация температурных режимов микроэлектронных устройств (МЕУ) в процессе сквозного теплового проектирования* // В сб. *Теория и проектирование полупроводниковых и микроэлектронных устройств*. Вестник Львов. политехнического ин-та. № 236. – Львов, 1989. – С. 111–113.
12. Батищев Д.И. *Методы оптимального проектирования*. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с.