

Т. Ванкевич

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електронних засобів інформаційно-комп’ютерних технологій

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗРАХУНКУ ІНФОРМАТИВНИХ ПАРАМЕТРІВ БІМЕТАЛЕВИХ КОНТАКТНИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

© Ванкевич Т., 2012

Викладено підхід до розрахунку деформацій та напружень у біметалевій пластині, викликаних зміною температури. Отримані розрахункові залежності є основою при математичному моделюванні біметалевих давачів температури різноманітних конфігурацій та типорозмірів.

Ключові слова: біметалева пластина, температурні напруження, деформація, контактна термометрія, термочутливість.

The approach to calculation of deformation and stresses in bimetallic plate caused by temperature changes is made. The given calculation of dependence is the basis at mathematical modelling of temperature bimetallic indication of various configuration and typemeasures.

Key words: bimetallic plate, temperature stresses, deformation, contact thermomeasuring, thermosensitivity.

Постановка проблеми

Математичне моделювання процедури проектування і розроблення контактних термоперетворювачів застосовують переважно для визначення нормативних метрологічних характеристик, які описуються співвідношенням між реальною і вимірною температурами. Перебіг сучасних технологічних процесів висуває високі вимоги до точності вимірювання температури об’єктів, тому постійно шукають шляхи покращення метрологічних характеристик термоперетворювачів. Беручи за основу при застосуванні контактної термометрії біметалеві давачі температури, в яких величина деформації пластинчастого елемента є найважливішою величиною, на основі якої здійснюється індексація температури, стикаються з основною проблемою: для забезпечення необхідного рівня метрологічних та експлуатаційних характеристик біметалевих термоперетворювачів слід використовувати надійні та адекватні методи розрахунку напружень і деформацій пластинчастої біметалевої системи.

Аналіз досліджень і публікацій, в яких започатковано проблему контактної термометрії з використанням біметалевих давачів

Механічні контактні термометри є найпоширенішим на практиці варіантом термометра [1–7], який застосовують у багатьох галузях промисловості. Процес термометрії контактним способом (дилатометри, біметалеві давачі) має високу продуктивність, добре регулюється. Але недоліками є порушення міцності зчеплення між різномісними металами, появу залишкових напружень, а також необхідність враховувати явища повзучості та релаксації напружень, які неминуче супроводжують довготривалі теплові навантаження (циклічної чи ациклічної природи).

Постановка завдання

Задача визначення температурних напружень і пов’язаних з ними деформацій має вирішальне значення для адекватного функціонування біметалевого термометра в контактній термометрії. Внаслідок різних температурних коефіцієнтів лінійного розширення складових двошарової пластини пакет під час нагрівання деформується (найчастіше згинається). Цю властивість беруть за основу при

використанні біметалевої пластини як чутливих елементів терморегуляторів. Незважаючи на широке практичне використання біметалевих датчиків температури, відсутня адекватна математична модель, яка гарантує розв'язання задачі про знаходження напружень і деформацій і дає змогу кількісно і якісно оцінити рівень залишкових напружень, а також охоплює явища повзучості і релаксації напружень, які безпосередньо впливають на точність показів термометрів.

Виклад основного матеріалу досліджень

Розглянемо згин біметалевої пластини за дії згинного моменту M_x (в умовах відсутності нагріву). Розрахункову схему подано на рис. 1 (вісь x – вздовж осі балки, вісь z – напрямлена за нормаллю). Вважаємо, що напружений стан системи одноосний, що обумовлене малими поперечними розмірами пластини та застосуванням гіпотези плоских нормалей.

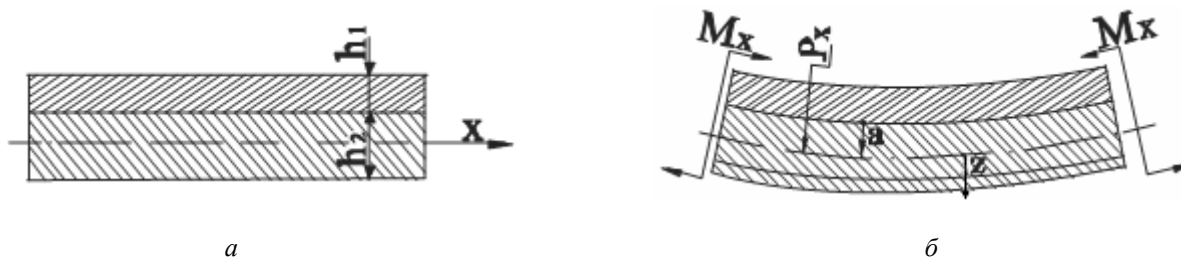


Рис. 1. Біметалевий стержень: а – до та б – після температурного впливу

Позначимо: h_1 і h_2 – товщини спряжених шарів; E_1 і E_2 – модулі пружності; ρ_x – радіус кривизни нейтрального шару (внаслідок дії силового навантаження);

На основі гіпотези незмінності нормалей (гіпотеза плоских перерізів) матимемо:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x}, \quad (1)$$

де координата z бере свій початок від нейтрального шару з додатним напрямом донизу.

Відповідно до залежностей між деформаціями і напруженнями [8] матимемо:

$$\sigma_{x1} = \varepsilon E_1 = \frac{z E_1}{\rho_x}, \quad \sigma_{x2} = \varepsilon E_2 = \frac{z E_2}{\rho_x}. \quad (2)$$

Положення нейтрального шару знаходять з умови рівності нулю осьової сили N_x , яка визначається на основі залежності [9]:

$$N_x = \int_{-(h_1+a)}^{-a} \sigma_{x1} dz + \int_{-a}^{h_2-a} \sigma_{x2} dz = -\frac{h_1 E_1}{\rho_x} \left(\frac{h_1}{2} + a \right) + \frac{h_2 E_2}{\rho_x} \left(\frac{h_2}{2} - a \right), \quad (3)$$

звідки віддаль a від межі спаю шарів до нейтральної лінії дається виразом:

$$a = \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}. \quad (4)$$

Згинний момент визначається згідно з [9] за формулою:

$$M_x = \int_{-(h_1+a)}^{-a} \sigma_{x1} z dz + \int_{-a}^{h_2-a} \sigma_{x2} z dz, \quad (5)$$

або, беручи до уваги рівність (2), матимемо:

$$M_x = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{\rho_x}. \quad (6)$$

У виразі (6) величини $I_1 = \frac{(h_1 + a)^3 - a^3}{3}$ і $I_2 = \frac{(h_2 + a)^3 + a^3}{3}$ – моменти інерції переізів верхнього і нижнього шарів відносно нейтральної лінії (розраховані на одиницю ширини).

З виразу (6) визначаємо кривизну нейтрального шару внаслідок дії силового згинного навантаження:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{E_1 I_1 + E_2 I_2}. \quad (7)$$

Вирази для напружень, обумовлених дією згинного моменту M_x , з урахуванням залежностей (2) після підстановки в них виразу (7), набудуть вигляду:

$$\sigma_{x1}^{(M)} = \frac{M_x E_1 z}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \quad \sigma_{x2}^{(M)} = \frac{M_x E_2 z}{E_1 I_1 + E_2 I_2}. \quad (8)$$

Зауважимо, що отримані залежності (2)–(8) будуть справедливими також у випадку поперечного згину, коли згинний момент змінюється вздовж осі x .

Маючи вираз для кривизни ρ_x можна записати рівняння пружної лінії балки:

$$w'' = -\frac{1}{\rho_x} = -\frac{M_x}{E_1 I_1 + E_2 I_2}. \quad (9)$$

з якого інтегруванням визначається прогин w .

Розглянемо температурну деформацію пакета, припускаючи додатково до одночасної дії моменту M_x також нагрівання на $t^{\circ}\text{C}$; величину моменту вибираємо таким чином, щоб кривизна пластини дорівнювала нулю. Тоді за відсутності викривлення відносно видовження у всіх точках однаково, тобто для спряжених шарів матимемо:

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\sigma}_{x1}}{E_1} + \alpha_1^{(t)} t, \quad \varepsilon_0 = \frac{\bar{\sigma}_{x2}}{E_2} + \alpha_2^{(t)} t, \quad (10)$$

причому в наведених виразах $\bar{\sigma}_{x1}$ та $\bar{\sigma}_{x2}$ – напруження в спряжених шарах системи, сталі за товщиною.

Прирівнюючи праві частини цих залежностей, отримуємо:

$$E_2 \bar{\sigma}_{x1} + E_1 E_2 \alpha_1^{(t)} t = E_1 \bar{\sigma}_{x2} + E_1 E_2 \alpha_2^{(t)} t. \quad (11)$$

У залежностях (11) $\alpha_i^{(t)}$ ($i=1,2$) – температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалів спряжених шарів (1/К).

Друге з рівнянь на визначення невідомих значень $\bar{\sigma}_{x1}$ та $\bar{\sigma}_{x2}$ складемо за умови рівності нулю нормальної N перерізуючої сили

$$N = \bar{\sigma}_{x1} h_1 + \bar{\sigma}_{x2} h_2 = 0. \quad (12)$$

Розв'язок системи двох рівнянь (11), (12) дає:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{x1} = \frac{(\alpha_2^{(t)} - \alpha_1^{(t)}) t}{h_1 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}, \\ \bar{\sigma}_{x2} = \frac{(\alpha_2^{(t)} - \alpha_1^{(t)}) t}{h_2 \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Дію напружень $\bar{\sigma}_{x1}$ та $\bar{\sigma}_{x2}$ за товщиною пластини можна замінити рівнодійним моментом \bar{M}_x (парою сил з плечем $\frac{h_1 + h_2}{2}$), вираз для якого на основі (13) матиме вигляд:

$$\bar{M}_x = \frac{(\alpha_2^{(t)} - \alpha_1^{(t)})t(h_1 + h_2)}{2\left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2}\right)}. \quad (14)$$

Відповідні температурні напруження визначимо з таких міркувань [10]: до пластини, нагрітої і одночасно навантаженої моментом L , прикладається момент зворотного напрямку дії; у результаті моменти $+\bar{M}_x$ і $-\bar{M}_x$ взаємно знищуються, і залишаються в результаті тільки ті напруження і деформації, які відповідатимуть нагріванню; їх значення знайдемо як різницю напружень, визначених відповідно до залежностей (8) та (13), тобто:

$$\sigma_{x1}^{(t)} = \sigma_{x1}^{(M)} - \bar{\sigma}_{x1} = \frac{(\alpha_2^{(t)} - \alpha_1^{(t)})t}{\left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2}\right)} \left[\frac{1}{h_1} + \frac{(h_1 + h_2)E_1 z}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right], \quad (15)$$

$$\sigma_{x2}^{(t)} = \sigma_{x2}^{(M)} - \bar{\sigma}_{x2} = \frac{(\alpha_2^{(t)} - \alpha_1^{(t)})t}{\left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2}\right)} \left[\frac{1}{h_2} + \frac{(h_1 + h_2)E_2 z}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right].$$

Положення нейтрального шару від силової дії визначене відповідно до виразу (4); за аналогією кривизна пакета при нагріванні на $t^0\text{C}$ на основі залежності (7) становитиме:

$$\frac{1}{\rho_x^{(t)}} = \frac{\bar{M}_x}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = \frac{(\alpha_2^{(t)} - \alpha_1^{(t)})t(h_1 + h_2)}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2) \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2}\right)}. \quad (16)$$

Аналізуючи отриманий вираз (16), неважко помітити, що термочутливість біметалевої системи буде найвищою тоді, якщо виконується залежність $E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$. Такого роду біметал, який має назву нормальний, характеризується тим, що нейтральна лінія при навантаженні моментом збігатиметься з межею між шарами ($a = 0$). Ефективна жорсткість на згин для такого біметалу буде:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = \frac{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3}{3} = \frac{E_1 h h_1^2}{3}, \quad (17)$$

причому $h = h_1 + h_2$.

У випадку, коли ширина біметалевої пластини доволі значна, в ній може виникнути двовимірний напружений стан, що потребує залучення складнішого математичного апарату теорій пружності і температурних напружень. Тому міркуватимемо так: якщо краї пластини вільні, то під час нагрівання вона викривлюється в двох напрямках, і її плоска поверхня переходить у сферичну з однаковим радіусом кривизни, який обчислюється за формулою (16). Температурні напруження, також однакові в серединній площині, тобто в напрямках x і y , будуть згідно з [10, 11] у $\frac{1}{1-\nu}$ (ν – коефіцієнт Пуассона) разів більші за обчислені за формулами (15). А якщо пластина має накладки, які не дають змоги викривлятися в поперечному напрямку, то в ній виникає циліндричний згин. Кривизна вздовж осі x в цьому випадку буде в $\frac{1}{1-\nu}$ разів менша за ті, які

обчислюються згідно з (15), а напруження $\sigma_y^{(t)}$ відрізнятимуться від напружень $\sigma_x^{(t)}$ тим, що у другому доданку міститиметься ще множник ν .

Висновки

На основі аналізу теплофізичних явищ викладено підхід до розрахунку деформації та напружень у двошаровій пластині, яка моделює роботу давача біметалевого термометра в термометрії контактним методом. Отримані розрахункові залежності є основою моделювання біметалевих термометрів різних конструктивних форм та типорозмірів. З метою конструктивного покращення термометричної системи в біметалевих пластинах надалі пропонується виконувати поздовжні розрізи та виточки, за наявності яких напружений стан наблизиться до одноосового. Проведені теоретичні дослідження та отримані в результаті на їх основі аналітичні залежності дають змогу розробити ряд конструктивних схем давачів температури, основними елементами яких є біметалеві пластини.

1. Куритный И. П., Стадник Б.И. Термоизмерения / И. П. Куритный, Б. И. Стадник. – М. : Знание, 1979. – 64 с. 2. Автоматизоване проектування контактних термоперетворювачів / Б. І. Стадник, М. М. Семерак, І. П. Дмитраш. – К. : Наук. думка, 1991. – 152 с. 3. Анатычук Л. Н. Термоэлементы и термоэлектрические устройства / Л. Н. Анатычук. – К. : Наук. думка, 1979. – 256 с. 4. Измерения в промышленности. Справ. изд. в 3-х кн.. Кн. 2. Способы измерения и аппарата: Пер. с нем. / Под ред. П. Профоса. – М. : Металлургия, 1990. – 384 с. 5. Температурные измерения: Справочник / О. А. Геращенко, А. Н. Гордов, А. Н. Еремина [и др.]. Отв. ред. О. А. Геращенко. – К. : Наук. думка, 1989. – 704 с. 6. Амануни А. Н. Методы и приборы для определения температурных коэффициентов линейного расширения материалов / А. Н. Амануни. – М. : Энергия, 1978. – 314 с. 7. Новикова С. И. Тепловое расширение твердых тел / С. И. Новикова. – М. : Энергия, 1972. – 214 с. 8. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уейнер. – М. : Мир, 1964. – 322 с. 9. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; Отв. ред. Г. С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1988. – 736 с. 10. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 636 с. 11. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.