

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДІАГНОСТУВАННЯ НА СИСТЕМНОМУ РІВНІ

© Крамаренко М., 2012

Доповнено, уточнено та систематизовано результати досліджень паралельного, послідовного, локального та адаптивного t -діагностування для детермінованих моделей діагностування на системному рівні, що завжди генерують симетричний синдром. Запропоновано діагностичні структури для паралельного, послідовного та локального t -діагностування. Запропоновано алгоритми дешифрації синдрому мінімальної складності.

Ключові слова: t -діагностування, локальне самодіагностування, адаптивне діагностування, моделі діагностики відмов на системному рівні, детермінований симетричний синдром.

Parallel, sequential, adaptive and local t -diagnosis for a certain system-level diagnosis models which always generate deterministic symmetrical syndrome has been researched. Previous researches results were generalized and systematized. Minimal complexity algorithms and related diagnosis structures have been suggested.

Key words: t -diagnosis, local self-diagnosis, adaptive diagnosis, system-level fault diagnostic models, deterministic symmetrical syndrome.

Постановка проблеми у загальному вигляді

Моделі діагностики відмов на системному рівні (system-level fault diagnosis [1]) походять з класичної праці [2] і засновані на поданні багатопроцесорної обчислювальної системи у вигляді певної множини модулів $U = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$, елементи якої визначаються глибиною діагностичних процедур. Вважається, що модулі системи виконують елементарні перевірки (ЕП) один одного. Під час певної ЕП модуль системи може або перевіряти, або перевірятися, однак не може одночасно і перевіряти, і перевірятися. Під час різних ЕП один і той самий модуль може водночас і перевіряти, і перевірятися.

Модуль, що перевіряє, подає на вхід модуля, що перевіряється, тестову дію і знімає з виходу цього модуля результати тестування, на основі яких робить висновок про технічний стан модуля, що перевіряється. Висновок модуля, що перевіряє, представлений булевою змінною a_{ij} , яка дорівнює 0, якщо модуль u_i , що перевіряє, підтвердив працездатність перевіреного модуля u_j , або дорівнює 1, якщо модуль u_i визнав модуль u_j непрацездатним.

Впорядкована множина висновків, зроблених усіма модулями, що перевіряють, становить синдром. Синдром дешифрується особливим безвідмовним приладом (глобальним арбітром), який не належить до модулів об'єкта діагностування, а використовується лише для виявлення непрацездатних модулів. Щоб визначити умови дешифрування синдрому, вказується параметр t – максимальна кількість непрацездатних модулів об'єкта діагностування [1,2].

Розрізняють точне (t -diagnosable), наближене (t/s -diagnosable) та імовірнісне (p - t -diagnosable) діагностування.

Мета точного діагностування – однозначне виявлення всіх непрацездатних модулів за умови, що їхня кількість не перевищує значення $t \leq n$, де $n = |U|$.

Наближене діагностування передбачає визначення певної підмножини U_s з s підозрюваних модулів, серед яких лише t справді відмовили ($n > s > t$) [3].

Імовірнісне діагностування ґрунтується на апіорних ймовірностях відмови модулів [4].

При заданому t виділяють паралельну (one-step), послідовну (diagnosis with repair) [1, 5] та адаптивну (adaptive) стратегії діагностування [6, 7].

Стратегія послідовного t -діагностування ґрунтується на багаторазовому повторенні діагностичних процедур, на кожному кроці якої виявляється хоча б один непрацездатний модуль. Виявлені непрацездатні модулі замінюються на працездатні, і процес діагностування повторюється. Тому послідовне t -діагностування називають також t -діагностуванням із заміною.

Мета стратегії паралельного діагностування – виявлення усіх непрацездатних модулів за один крок.

Метою адаптивного t -діагностування є знаходження хоча б одного працездатного модуля і отримання результатів діагностування системи загалом на основі висновків знайденого модуля про технічний стан решти модулів.

Слід зауважити, що принциповою різницею між адаптивною та паралельною та послідовною стратегіями є відсутність наперед синтезованої структури ЕП, оскільки основна ідея адаптивної стратегії полягає в динамічному покроковому синтезі структури ЕП за результатами попередньо виконаних ЕП [6,7]. Саме тому така стратегія і отримала назву адаптивної.

Висновок модуля, що перевіряє, залежить від його технічного стану.

У РМС-моделі [2] вважається, що цей висновок збігається зі справжнім технічним станом перевіреного модуля за умови, що модуль, який перевіряє, є працездатним. Якщо модуль, що перевіряє, відмовив, то його висновок може виявитися довільним і може спотворювати дійсний стан модуля, що перевіряється.

BGM-модель [5] бере за основу припущення, що непрацездатний модуль, що перевіряє, не може визначити перевірений непрацездатний модуль як працездатний.

Отже, модель діагностування може описуватися четвіркою, яка визначає правила прийняття можливих висновків модулів, що перевіряють [8, 9]:

a_{gg} – висновок працездатного модуля, що перевіряє, про технічний стан працездатного модуля, що перевіряється;

a_{gb} – висновок працездатного модуля, що перевіряє, про технічний стан непрацездатного модуля, що перевіряється;

a_{bg} – висновок непрацездатного модуля, що перевіряє, про технічний стан працездатного модуля, що перевіряється;

a_{bb} – висновок непрацездатного модуля, що перевіряє, про технічний стан непрацездатного модуля, що перевіряється.

Очевидно, що $a_{gg}=0$; $a_{gb}=1$. Вважається, що $a_{bg}, a_{bb} \in \{0,1,-\}$, де символ “-” означає непередбачуваний (0 або 1) результат виконання ЕП.

Наприклад, РМС-модель [2] визначається четвіркою 01--, а BGM-модель [5], відповідно, четвіркою 01-1.

Аналізуючи можливі значення a_{bg} , a_{bb} можливих висновків непрацездатного модуля, що перевіряє, про технічний стан модуля, що перевіряється, варто зауважити, що всі моделі можна поділити на два класи:

- детерміновані (тобто такі, у котрих $a_{bg}, a_{bb} \in \{0,1\}$)
- випадкові (тобто такі, у котрих $a_{bg}, a_{bb} \in \{0,1,-\}$).

Практичний інтерес мають моделі **0111** та **0110**. Як було показано в [8,9], модель **0111** може описувати ЕП, які ґрунтуються на перевірці збігу результатів виконання однієї і тієї самої операції кількома модулями системи. При цьому за основу береться припущення про неспроможність отримати однакові результати виконання однієї і тієї самої операції парою ідентичних модулів за умови однакових вихідних даних у випадку відмови хоча б одного з цих модулів.

Модель **0110** також може описувати ЕП, які ґрунтуються на перевірці збігу результатів виконання однієї і тієї самої операції кількома модулями системи за умови можливості отримання однакових результатів на однакових вихідних даних у випадку працездатності або відмови обох модулів [9].

Запропонована праця подає результати дослідження детермінованих моделей **0111** та **0110**, які доповнюють, уточнюють і систематизують результати, отримані в працях [8–14] для випадку точного діагностування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Основною метою дослідження моделей діагностування відмов на системному рівні є мінімізація кількості ЕП для знаходження модулів системи, що відмовили.

Для розв'язання цієї задачі множина ЕП подається як зважений орієнтований граф $G(U,E)$ без петель, множина вершин якого збігається з множиною модулів системи, а кожна дуга $e_{ij} \in E$ існує тоді і лише тоді, коли вершини u_i, u_j беруть участь у виконанні однієї і тієї самої ЕП. Напрямок дуги e_{ij} від вершини u_i до вершини u_j означає, що вершина u_i перевіряє вершину u_j , а вага цієї дуги (булева змінна a_{ij}) позначає висновок вершини, що перевіряє, про технічний стан вершини, що перевіряється. Можливі значення ваг дуг визначаються четвіркою, що однозначно визначає прийняту модель діагностування на системному рівні. Матриця ваг дуг графу є синдромом $\delta = \{a_{ij}; (i,j) \in E\}$. Множина $F \subseteq U$ непрацездатних вершин графу становить образ несправностей.

Можна назвати такі основні напрямки дослідження моделей діагностування відмов на системному рівні (див., наприклад [1]):

- Задача характеризації графу.
- Синтез графів $G(U,E)$, що t -діагностуються.
- Розроблення алгоритму t -діагностування.
- Аналіз графів $G(U,E)$, що t -діагностуються.

Метою розв'язання задачі характеризації $G(U,E)$ є пошук необхідних та достатніх умов для виконання t -діагностування, тобто вивчення властивостей графу $G(U,E)$ і значення t , при яких зберігається можливість знаходження множини F за умови, що $|F| \leq t$.

Задача синтезу графів $G(U,E)$, що t -діагностуються, полягає в мінімізації кількості дуг для знаходження множини F за умови, що $|F| \leq t$. При цьому для паралельної та послідовної стратегій діагностування метою задачі синтезу є побудова сталої структури ЕП, тобто синтез такого графу $G(U,E)$ з мінімальною кількістю дуг, що задовольняє необхідні та достатні умови для виконання t -діагностування. Для знайденого графу $G(U,E)$ розробляється ефективний алгоритм t -діагностування, тобто алгоритм дешифрації синдрому глобальним арбітром.

Для адаптивної стратегії діагностування метою задачі синтезу є побудова алгоритму виконання ЕП на кожному кроці за результатами виконання ЕП на попередніх кроках так, щоб мінімізувати загальну кількість ЕП, що є необхідною для знаходження хоча б одного працездатного модуля системи i , як наслідок, для знаходження множини F за умови, що $|F| \leq t$. Отже, дуги графу $G(U,E)$ будуються динамічно (або адаптивно, покроково), залежно від аналізу глобальним арбітром результатів, що отримані на попередніх кроках. Іншими словами, для адаптивної стратегії діагностування задача синтезу та задача розроблення алгоритму t -діагностування зливаються в одну задачу пошуку ефективного алгоритму, що мінімізує кількість дуг графу, що синтезується.

Метою розв'язання задачі аналізу є перевірка факту, чи задовольняє заданий граф $G(U,E)$ умови t -діагностування. Тобто задача аналізу є ніби зворотною до задачі синтезу.

Розв'язання задач характеризації, синтезу, аналізу та розроблення алгоритму t -діагностування безпосередньо залежать від правил прийняття можливих висновків модулів, що перевіряють, про технічний стан модулів, що перевіряються, тобто від четвірки, що визначає прийняту діагностичну модель.

Неважко зрозуміти, що модель **0111** є гіршим, але детермінованим випадком ВГМ-моделі.

Аналогічно модель **0110** є гіршим, але детермінованим випадком РМС-моделі.

Модель **0111** вивчалася у працях [8-14] для випадку точного діагностування. У них розглянуто лише випадок стійких відмов вершин. У працях [8,9] знайдено необхідні умови t -діагностування, що визначаються як $t \leq n-2$, де $n=|U|$. У праці [12] розв'язано задачу характеризації для паралельної стратегії діагностування у випадку орієнтованих графів.

У працях [11, 13] розв'язано задачу характеризації для паралельної стратегії діагностування у випадку неорієнтованих графів. При цьому отримані результати значно відрізняються.

Крім того, у праці [13] показано, що необхідні і достатні умови паралельного t -діагностування, що знайдені у праці [12], такими не є.

Задача характеризації для послідовної стратегії діагностування для випадку орієнтованих графів досліджувалася у праці [14].

Адаптивну стратегію діагностування досліджено у праці [11]. Запропоновано алгоритм адаптивного діагностування, що є модифікацією алгоритму адаптивного діагностування для моделі **01-1** [7]. Показано, що в гіршому випадку граф $G(U,E)$, що синтезується, матиме $(2*n-2-m*q-m)*(q/2)+n-1-\min(m,q)$ ребер, де $m=n-t-1$ і $q=\lfloor(n-1)/m\rfloor$.

Модель **0110** вивчалася у працях [9,12,14] для випадку точного діагностування. У них розглянуто лише випадок стійких відмов вершин. У праці [9] знайдено необхідні умови t -діагностування, що визначаються як $t \leq \lfloor(n-1)/2\rfloor$. У праці [12] розв'язано задачу характеризації для паралельної стратегії діагностування для випадку орієнтованих графів. Задача характеризації для послідовної стратегії діагностування для випадку орієнтованих графів досліджувалася у праці [14].

У праці [10] для моделей діагностики відмов на системному рівні висвітлено можливість дешифрації синдрому певною вершиною графу на основі ваг на основі ваг дуг (або ребер), що належать до простих шляхів, що проходять через певну вершину. Таку стратегію дешифрації синдрому нижче названо локальним діагностуванням. Слід зазначити, що практичний інтерес викликає випадок, коли ці прості шляхи мають довжину 1. Фізичний сенс цього випадку – це можливість дешифрації частини синдрому певною вершиною графу $G(U,E)$ тільки на підставі ваг інцидентних дуг (або ребер).

Подамо локальний арбітр (local arbiter) як вершину $u_n \in U$, що здатна визначити хоча б один елемент множини $f_k \in F$ на основі ваг інцидентних дуг (або ребер).

Тоді строгий локальний арбітр (strong local arbiter) – це вершина $u_n \in U$, що здатна визначити всі елементи множини F на основі ваг інцидентних дуг (або ребер).

Цілі статті

Метою цієї статті для моделі **0111** є встановлення відповідності між результатами [11] та [13] для задачі характеризації для паралельної стратегії діагностування, розв'язання задачі синтезу і побудова ефективного алгоритму діагностування для синтезованого графу. Також викликає інтерес розв'язання задачі синтезу та побудова ефективного алгоритму діагностування для послідовної стратегії t -діагностування для моделі **0111** для випадку неорієнтованих графів, і встановлення відповідності між результатами паралельного, послідовного і локального діагностування.

Для моделі **0110** для випадку неорієнтованих графів виникає необхідність розв'язання задачі синтезу та побудови ефективних алгоритмів діагностування для паралельної, послідовної та адаптивної стратегій діагностування, і встановлення відповідності між результатами паралельного, послідовного, адаптивного та локального діагностування.

Дослідження моделей **0111** та **0110**

Умови симетрії синдрому відповідно до головної діагоналі встановлює теорема, яка безпосередньо впливає із визначення четвірки $a_{gg} a_{gb} a_{bg} a_{bb}$.

Теорема 1. Якщо $a_{gb}=a_{bg}$; a_{bg} , $a_{bb} \notin \{-\}$, то синдром є симетричним відносно головної діагоналі.

Доведення є очевидним, оскільки незалежно від напрямку дуги графу між будь-якою парою вершин u_i, u_j , результати ЕП збігатимуться.

Висновок. Графи для моделей **0111**, **0110** завжди неорієнтовані.

Отже, моделі **0111**, **0110** слід вважати симетричними детермінованими моделями діагностування на системному рівні.

1. Модель **0111**

Дослідимо тільки неорієнтовані графи $G(U,E)$ без петель з правилом породження ваг ребер **0111** для випадку точного діагностування та стійких відмов вершин.

З визначення моделі 0111 впливають

Лема 1.1. Будь-яке ребро з нульовою вагою існує тоді і тільки тоді, коли обидві вершини, інцидентні йому, є працездатними.

Лема 1.2. Будь-який простий шлях з вагою 01 входить до вершини, що відмовила.

Лема 1.3. Будь-який простий шлях з вагою 10 виходить з вершини, що відмовила.

Необхідні умови для паралельного t -діагностування встановлює

Теорема 1.2 [8]. Щоби граф $G(U,E)$ t -діагностувався паралельно, має виконуватися умова $t \leq n-2$. Якщо $t \leq n-2$, тоді існує паралельно t -діагностований граф $G(U,E)$.

Ідея доведення впливає з визначення умови існування бодай одного ребра з нульовою вагою і безпосередньо впливає з леми 1.1.

Подамо $\Gamma(u)$ як множину $v \in U$ вершин, таких що $(u,v) \in E$. Визначимо $\deg(u)$ як $|\Gamma(u)|$. Також подамо $K_{p,q}$ як двочастковий граф, частки якого відповідно складаються з p та q вершин. Тоді подамо $K_{v,v}$ як повний двочастковий граф, кожна частка якого складається з v вершин. Як довідник з елементарної термінології з теорії графів можна використати підручник [15].

Негадаємо також, що внутрішньо стійка множина вершин є такою, що жодні її вершини не є суміжними. Внутрішньо стійку множину вершин також прийнято називати незалежною.

Розглянемо циркулянт $C(N, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$, де N – кількість або порядок, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq (N/2)$ – впорядкована множина цілих, а вершина j з'єднується ребром з вершинами $j \pm s_k \pmod{N}$, $k \in (1, n)$. Степінь вершин у такому графі дорівнює $2n$ для $s_n < (N/2)$. Якщо N парне і $s_n = (N/2)$, тоді степінь вершин дорівнює $2n-1$. Треба зауважити, що циркулянт $C(N, \{1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor\})$ є повним графом, а $C(N, \{1\})$ – простим циклом.

Нагадаємо, що кістяковим (або каркасним) деревом зв'язного графу $G(U,E)$ називається дерево $T_K(U, E_T)$ таке, що $E_T \subseteq E$.

Визначимо Σ_1 як синдром типу $a_{ij}=1$: для всіх $(i,j) \in E$.

Для певної вершини $u \in U$ визначимо δ_{1u} як синдром типу $a_{uv}=1$ для всіх v , таких, що $v \in \Gamma(u)$.

З теореми 1.2 випливає

Лема 1.4. Для певної вершини $u \in U$, такої, що $\deg(u) > t$, синдром δ_{1u} утворюється тоді і лише тоді, коли вершина u відмовила.

Із визначення моделі також впливає лема 1.5, аналогічна до [5].

Лема 1.5. Синдром Σ_1 утворюється тоді і тільки тоді, коли всі працездатні вершини графу $G(U,E)$ належать до внутрішньо стійкої множини.

1.1. Паралельна стратегія діагностування

У праці [13] доведено таку теорему:

Теорема 1.1.1 [13]. Граф $G(U,E)$, $|U| > t+2$ паралельно t -діагностується тоді і тільки тоді, коли

1. $\deg(u_i) \geq t$, де $u_i \in U$
2. Граф не містить симетричних повних двочасткових графів $K_{v,v} = G_2^Z = \{U_2^Z, D_2^Z\}$, де $1 \leq v \leq t$, для яких виконуються умови:
 - 2.1. $\deg(u_i) = t$, $u_i \in U_2^Z$
 - 2.2. $\Gamma(U_2^Z) = W$, $W \subseteq U - U_2^Z$, $|W| = t-v$
 - 2.3. $D(U_2^Z, U-W) = \emptyset$де операція $D(X,Y) = \{(u_i, u_j) \in E : u_i \in X, u_j \in Y, X \subset U, Y \subset U\}$

Проте можна показати, що умови теореми 1.1.1 не є достатніми. І справді, розглянемо граф, що зображений на рис. 1. Для такого графу необхідно, щоб $t \leq 4$. Нехай $t=3$, вершини a, b працездатні, а вершини x, y відмовили, тобто $x \in F, y \in F$. Нехай також синдром відповідає розмітці, як зображено на рис. 1.

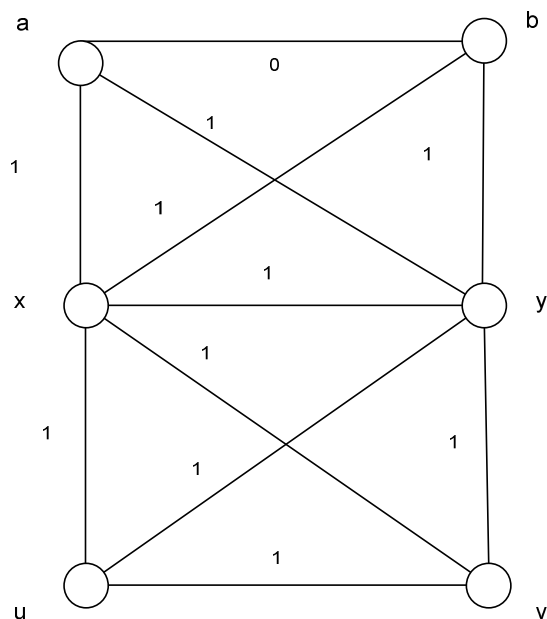


Рис. 1. Приклад графу, що задовольняє умови теореми 1.1.1, але не діагностується

Неважко зрозуміти, що цей граф задовольняє умови теореми 1.1.1, оскільки:

- Не містить повних симетричних двочасткових графів
- Степені всіх вершин дорівнюють або перевищують задане t
- $t < n-2$.

Однак наведений граф не t -діагностується паралельно, оскільки неможливо визначити, яка з вершин u, v відмовила.

У праці [11] доведено таку теорему:

Теорема 1.1.2 [11]. Граф $G(U, E)$ паралельно t -діагностується тоді і тільки тоді, коли

1. $t \leq n-2$
2. $\deg(u_i) \geq t$ для всіх $u_i \in U$
3. Для певного ребра $(u, v) \in E$, такого, що $|\Gamma(u)| = |\Gamma(v)| = t$, завжди існує ребро $(x, y) \in E$, для якого справджується одна з умов:
 - 3.1. $\{x, y\} \subseteq \Gamma(u) - \Gamma(v)$
 - 3.2. $\{x, y\} \subseteq \Gamma(v) - \Gamma(u)$
 - 3.3. $x \in [\Gamma(u) - \Gamma(v)] \cup [\Gamma(v) - \Gamma(u)]$ і $y \in U - [\Gamma(u) \cup \Gamma(v)]$.

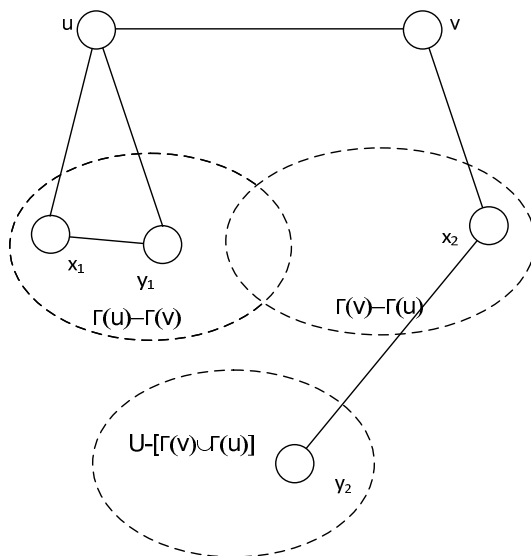


Рис. 2. Ілюстрація до теореми 1.1.2

І справді, умова 1 теореми 1.1.2 безпосередньо випливає з теореми 1.2.

Щоб довести необхідність умови 2, припустимо існування хоча б однієї вершини $u \in U$, такої, що $|\Gamma(u)| < t$. Розглянемо тоді дві множини непрацездатних вершин $\Gamma(u)$ та $u \cup \Gamma(u)$. Потужність таких множин не перевищує t , але цим множинам відповідатиме той самий синдром типу δ_{1u} з вагами ребер, що дорівнюють 1 для всіх ребер, що інцидентні вершині u . Отже, відмову тільки вершини u , відмови всіх вершин в $\Gamma(u)$ та відмови вершин в $u \cup \Gamma(u)$ неможливо розрізнити.

Щоб довести необхідність умови 3, розглянемо такий граф $G(U, E)$, де хоча б для одного ребра $(u, v) \in E$, такого, що $\deg(u) = \deg(v) = t$, умови 3 не справджуються. З цього випливає, що $\Gamma(u) = \Gamma(v)$, і немає такого ребра $(x, y) \in E$, що $x \in [\Gamma(u) - \Gamma(v)] \cup [\Gamma(v) - \Gamma(u)]$ і $y \in U - [\Gamma(u) \cup \Gamma(v)]$ (див. рис. 3). Відповідно, у випадку відмови вершин, що належать до $\Gamma(u) = \Gamma(v)$, відмова тільки вершини u , відмова тільки вершини v і відмова обох вершин u, v спричинять однакові синдроми з вагами ребер, що дорівнюють 1.

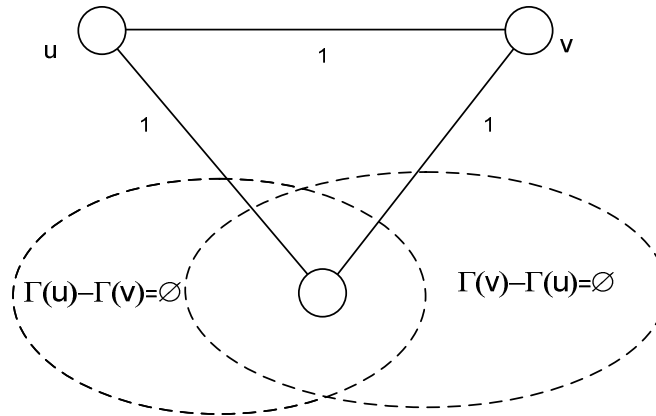


Рис. 3. Ілюстрація для доведення необхідності умов теореми 1.1.2

Ідея доведення достатності умов 1–3 теореми 1.1.2 полягає в тому, що, припускаючи дійсність цих умов для певного зв'язного графу $G(U, E)$ і виходячи з гіпотези про неспроможність його діагностувати, можна вказати на порушення припущення про зв'язність графу $G(U, E)$.

І справді, без втрати загальності можна припустити, що граф $G(U, E)$ є зв'язним, умови 1–3 справджуються, але граф $G(U, E)$ не можна паралельно t -діагностувати. Отже, тоді існує дві різні множини вершин F_1 і F_2 , що відмовили і можуть викликати однаковий синдром, при цьому $|F_1| \leq t$ і $|F_2| \leq t$. Тоді подамо $F_{12} = F_1 \cap F_2$, $Z_1 = F_1 - F_{12}$, $Z_2 = F_2 - F_{12}$, $X = U - (F_1 \cup F_2)$.

Зауважимо, що для всіх $\{u, v\} \in Z_1$ і для всіх $\{u, v\} \in Z_2$ справджується $(u, v) \notin E$. І справді, якщо, наприклад, $u \in Z_1$, $v \in Z_1$ і $(u, v) \in E$, тоді дві різні множини F_1 і F_2 в будь-якому випадку викликать різні синдроми. Відтак, $|\Gamma(Z_1)| \geq t$, $|\Gamma(Z_2)| \geq t$. Зауважимо також, що не існуватиме жодне ребро, яке би зв'язувало множини X і $\Gamma(Z_1 \cup Z_2)$, оскільки існування такого ребра безумовно засвідчило би здатність діагностувати граф $G(U, E)$.

Отже, оскільки $X \cap \Gamma(Z_1 \cup Z_2) = \emptyset$, ми отримаємо $\Gamma(Z_1) \subseteq F_2$ і $\Gamma(Z_2) \subseteq F_1$. Тобто, $\Gamma(Z_1) = F_2$, $\Gamma(Z_2) = F_1$, при цьому $|\Gamma(Z_1)| = |F_2| = t$, $|\Gamma(Z_2)| = |F_1| = t$. Відтак, також для всіх $u \in Z_1$ $\Gamma(u) = F_2$ і для всіх $v \in Z_2$ $\Gamma(v) = F_1$. Отже, для всіх $u \in Z_1$ і $v \in Z_2$ $\Gamma(v) - \Gamma(u) = Z_1$ і $\Gamma(u) - \Gamma(v) = Z_2$. Крім того, для всіх w у Z_1 $\Gamma(w) = \Gamma(u)$ і, аналогічно, для всіх w у Z_2 $\Gamma(w) = \Gamma(v)$ (див. рис. 4).

Першу частину умови (3) виконано, а саме: якщо певне ребро $(u, v) \in E$, таке, що $|\Gamma(u)| = |\Gamma(v)| = t$, і для всіх w в $\Gamma(u) - \Gamma(v)$ існує таке w , що $\Gamma(w) = \Gamma(v)$, і для всіх w в $\Gamma(v) - \Gamma(u)$ існує таке w , що $\Gamma(w) = \Gamma(u)$, тоді $\Gamma(U - [\Gamma(u) \cup \Gamma(v)]) \not\subseteq \Gamma(u) \cap \Gamma(v)$, а це означає, що $\Gamma(X) \not\subseteq F_{12}$. З останнього виразу, враховуючи, що $X \cap \Gamma(Z_1 \cup Z_2) = \emptyset$, випливає, що $\Gamma(X) = \emptyset$. Отже, граф не є зв'язним. Отримана суперечність доводить достатність умов 3 теореми 1.1.2.

У праці [11] вказано, що складність задачі аналізу, тобто перевірки достатності умов паралельного t -діагностування для заданого графу можна оцінити як $O(|E|t^2)$.

З теореми 1.1.2 безпосередньо випливає

Наслідок 1.1.1. Граф $G(U,E)$ завжди паралельно t -діагностується, якщо:

1. $t \leq n-2$
2. $\deg(u_i) > t$ для всіх $u_i \in U$.

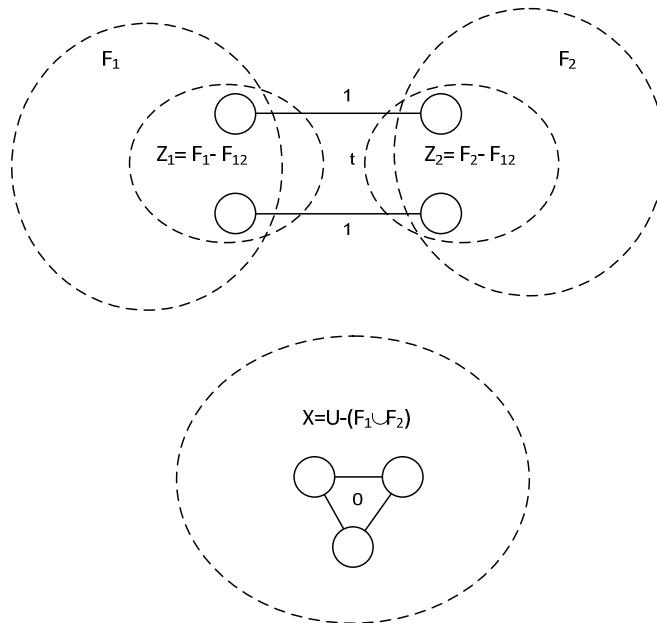


Рис. 4. Розбиття множини вершин графу $G(U,E)$

Покажемо, що для $|U| > t+2$ з виконання умов 2.1, 2.2, 2.3 теореми 1.1.1 завжди випливає порушення умов 3.1, 3.2, 3.3 теореми 1.1.2.

І справді, розглянемо граф, що містить $K_{v,v}$, який задовольняє умови 2.1, 2.2, 2.3 теореми 1.1.1. Оскільки степінь кожної вершини підграфу $K_{v,v}$ дорівнює v , то для виконання умови 2.1 випливає необхідність існування ребер, які зв'язують кожну вершину $K_{v,v}$ з кожною вершиною, що належить $\Gamma(U_2^Z) = W$, $W \subseteq U - U_2^Z$, $|W| = t - v$. З цього випливає, що всі вершини, які належать до W , є спільними, тобто інцидентними всім вершинам підграфу $K_{v,v}$. Відтак, умови 3.1, 3.2 теореми 1.1.2 завжди будуть порушуватися через те, що $K_{v,v}$ двочастковий (ребра всередині частки немає), і через існування лише спільних (тобто інцидентних для всіх вершин двочасткового графу) вершин в W . Умова 3.3 теореми 1.1.2 завжди буде порушуватися через умову 2.3 теореми 1.1.1.

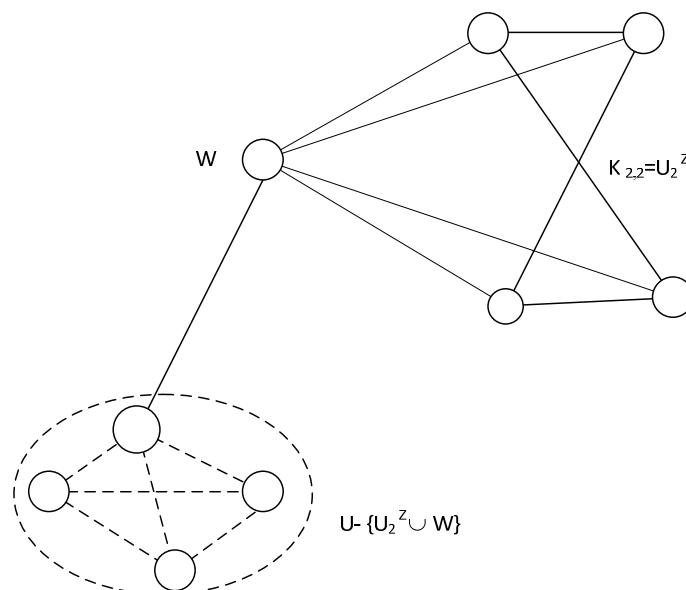


Рис. 5. Ілюстрація до теореми 1.1.3 для $v=2, t=3$

З цього випливає

Теорема 1.1.3. Виконання умов 2.1, 2.2, 2.3 теореми 1.1.1 завжди викликає порушення умов 3.1, 3.2, 3.3 теореми 1.1.2.

Теорема 1.1.4. Якщо умови 3.1, 3.2, 3.3 теореми 1.1.2 справджуються, тоді не існує підграфів, що задовольняють умови 2.1, 2.2, 2.3 теореми 1.1.1.

І справді, для вершин $u_i \in U$, в яких $\deg(u_i)=t$, з умов 3.1, 3.2 завжди випливає існування циклу довжини 3, утвореного в таких випадках або з вершин u, x, y , або з вершин v, x, y . Звідси, згідно з критерієм двочастковості Кеніга, випливає, що на таких вершинах неможливо утворити двочастковий граф. З умови 3.3 безпосередньо випливає порушення умови 2.3 теореми 1.1.1.

У праці [13] доводиться така теорема:

Теорема 1.1.5[13]. При $t=n-2$, граф $G(U,E)$ паралельно t -діагностується, якщо справджується умова $|E_t - E| \leq 1$, де E_t – множина ребер повнозв'язного графу. Ідея доведення полягає в тому, що з повнозв'язного графу за умови $t=n-2$ можна видалити лише одне ребро, щоби однозначно дешифрувати синдром типу Σ_1 . Слід зазначити, що граф $G(U,E)$, що утворений з повнозв'язного графу шляхом видалення одного ребра, завжди задовольнятиме умови теореми 1.1.2, оскільки в такому графі $\deg(u_i) \geq t$, де $u_i \in U$ і немає жодного ребра $(u,v) \in E$, такого, що $\deg(u)=\deg(v)=t$. Отже, теорема 1.1.5 безпосередньо випливає з теореми 1.1.2 і леми 1.4.

У праці [13] також наведено такі мінімальні компоненти зв'язності графу $G(U,E)$, що паралельно t -діагностується за умови $t=1$ (див. рис. 6). Неважко зрозуміти, що наведені компоненти зв'язності також безпосередньо випливають з теореми 1.1.2. І справді, розглянемо, наприклад, певне ребро $(u,v) \in E$, таке, що $\deg(u)=\deg(v)=1$. Тоді, за теоремою 1.1.2, повинно існувати ще одне ребро, що задовольняло б умови 3 цієї теореми. З цього прямо випливає компонента зв'язності, зображена на рис. 6-а.

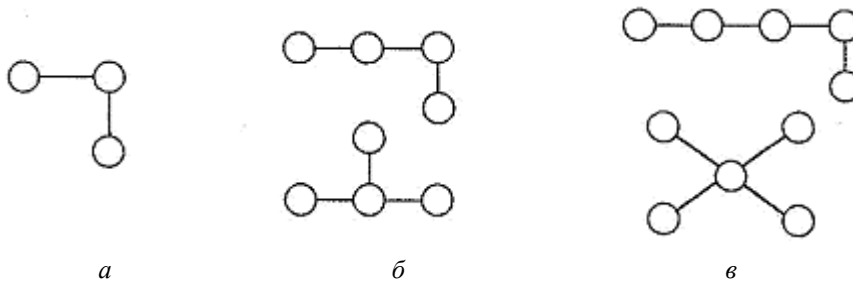


Рис. 6. Мінімальні компоненти зв'язності за умови $t=1$

Для графу $G(U,E)$, що задовольняє умови теореми 1.1.2, у праці [11] запропоновано такий алгоритм визначення технічного стану пари вершин $(u,v) \in E$ для випадку паралельного t -діагностування глобальним арбітром:

1. Якщо $|\Gamma(w)| > t$, де $w \in \{u,v\}$, то перевіряються ваги $t+1$ ребер a_{zw} для $z \in \Gamma(w)$. Якщо всі ваги $a_{zw}=1$, то вершина $w \in F$. Якщо для певного $z \in \Gamma(w)$ $a_{zw}=0$, то вершина w працездатна.
2. Якщо $|\Gamma(u)|=|\Gamma(v)|=t$, то повинно існувати ребро $(x,y) \in E$, таке, що $x \in \Gamma(u,v)$, $\{x,y\} \in U - [\Gamma(w) \cup \{w\}]$. У цьому випадку аналізуються ваги a_{zw} для всіх $z \in \Gamma(w)$. Якщо $a_{zw}=0$ для певного $z \in \Gamma(w)$, то вершина w працездатна. У протилежному випадку перевіряється вага a_{xy} . Якщо $a_{xy}=1$, то вершина $w \in F$, інакше $\{u,v\} - \{w\} \in F$.

Отже, для визначення стану пари вершин $(u,v) \in E$ необхідно проаналізувати результати не більше ніж $t+1$ ЕП.

Типовий підхід до синтезу структур, що паралельно t -діагностуються, – використання властивостей циркулянтних графів (див., наприклад, [2,5]). Тому доцільно розглянути особливості використання циркулянтних графів для паралельного t -діагностування моделі **0111**.

З властивостей циркулянта $C(n, \{1\})$ і леми 1.4 випливає

Лема 1.1.6. Циркулянт $C(n, \{1\})$ завжди паралельно 1-діагностується.

З властивостей циркулянта типу $C(n, \{1, 2, \dots, \lfloor t/2 \rfloor\})$ також випливає, що для непарних t циркулянт не буде паралельно t -діагностуватися, оскільки $\deg(u_i) < t$ для всіх $u_i \in U$. Тому доцільно розглянути найменш надлишкові циркулянтні графи. І справді, з наслідку 1.1.1 теореми 1.1.2 випливає, що граф, у якого $\deg(u_i) > t$, де $u_i \in U$, завжди паралельно t -діагностується.

З наслідку 1.1.1 теореми 1.1.2 і властивостей циркулянта випливає

Теорема 1.1.6. Циркулянт типу $C(n, \{1, 2, \dots, \lfloor t/2 \rfloor\})$ завжди паралельно t -діагностується, де $\lfloor t/2 \rfloor = \{(t+1)/2\}$ для непарних t ; $\{(t+2)/2\}$ для парних t

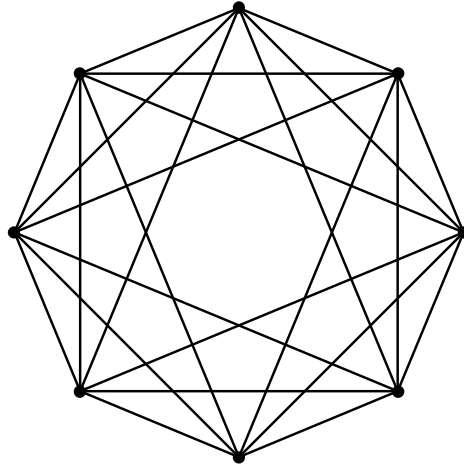


Рис. 7. Приклад циркулянта $C(8, \{1, 2, 3\})$

Для циркулянтів типу $C(n, \{1, 2, \dots, \lfloor t/2 \rfloor\})$ справедливим є такий алгоритм дешифрації синдрому глобальним арбітром:

Визначаємо дві пусті множини G працездатних вершин і F , таких вершин, що відмовили.

Для кожної вершини $u_i \in U$, що не належить до множин G і F , перевіряються ваги ребер a_{ij} для всіх $u_j \in \Gamma(u_i)$

1. Якщо всі ваги ребер $a_{ij} = 1$, тоді додати вершину u_i до F .
2. Якщо вага ребра $a_{ij} = 0$, тоді додати вершини u_i і u_j до G , а всі вершини, ваги ребер яких $a_{iw} = 1$ або $a_{jw} = 1$, де $u_w \in \Gamma(u_i) \cup \Gamma(u_j)$, додати до F .

У результаті утворюються дві множини G і F , такі, що $G \cup F = U$, $G \cap F = \emptyset$, $|F| = t$, при цьому G міститиме тільки працездатні вершини циркулянта, а F – тільки такі вершини, що відмовили.

З цього випливає, що складність алгоритму дешифрації синдрому мінімальна, а зверху її можна оцінити як $O(|U| \cdot (t+1))$.

1.2. Послідовна стратегія діагностування

З визначення послідовного діагностування випливає, що теорема 1.2 для паралельного t -діагностування визначає також необхідні умови послідовного t -діагностування.

Очевидно, що мінімальна умова послідовного t -діагностування – зв'язність графу $G(U, E)$.

Очевидно й те, що існують два підходи до послідовного діагностування:

- З використанням лем 1.1–1.3
- З використанням лем 1.4–1.5.

Розглянемо спочатку підхід, що ґрунтується на використанні лем 1.1–1.3. Тоді, за аналогією з [5], з визначення моделі **0111** випливає

Теорема 1.2.1. Граф $G(U, E)$ послідовно t -діагностується, якщо він зв'язний і якщо $\Gamma(X) \cap X \neq \emptyset$ для кожної підмножини $X \subset U$, такої, що $|X| = n - t$.

І справді, якщо в кожній підмножині вершин потужності $n - t$ щонайменше дві вершини зв'язані ребром, тоді за наявності t вершин, що відмовили, серед решти $n - t$ вершин завжди знайдеться така зв'язана ребром пара вершин $u_i \in U$, $u_j \in U$, що вага a_{ij} дорівнює нулю. Тоді на основі лем 1–3 можна виконати послідовне t -діагностування.

Треба однак зауважити, що умови, встановлені теоремою 1.2.1, є достатніми, але не є необхідними.

І справді, з леми 1.4 випливає

Лема 1.2.1. Будь-який підграф типу зірки $K_{1,t+1}$ графу $G(U,E)$ послідовно t -діагностується не більше, ніж за два кроки.

І справді, розглянемо вершину u_i , яка є центральною вершиною зірки типу $K_{1,t+1}$. Нехай центральна вершина $u_i \in K_{1,v}$ працездатна. Тоді в підграфі $K_{1,v}$ завжди існуватиме хоча б одне ребро з нульовою вагою. Тоді, на основі лем 1.1–1.3, за один крок можна однозначно діагностувати стани всіх вершин $u_j \in \Gamma(u_i)$.

Нехай тепер центральна вершина $u_i \in K_{1,v}$ відмовила. У цьому випадку можна однозначно діагностувати відмову цієї вершини завдяки лемі 1.4. Тоді така вершина u_i замінюється на працездатну, і процес діагностування повторюється.

На основі описаного вище доцільно розглянути послідовне t -діагностування з використанням лем 1.4–1.5.

Визначимо за аналогією з [5] для певної вершини u_i такий підграф G_{0i} графу $G(U,E)$, множина вершин якого становить $U-\Gamma(u_i)$. Нехай тоді M_{0i} – максимальна внутрішня стійка множина для G_{0i} . Визначимо тоді $f_{0i} = |U| - |M_{0i}|$.

Тоді аналогічно до [14] доводиться

Теорема 1.2.2. Зв'язний граф $G(U,E)$ послідовно t -діагностується, якщо і тільки якщо $t = \max(f_{0i}) - 1, u_i \in U$

І справді, аналогічно до [14], щоб довести необхідність, припустимо, що граф $G(U,E)$ послідовно t -діагностується, але $t > \max(f_{0i}) - 1, u_i \in U$. Відтак, для всіх $u_i \in U$ справедливі нерівності вигляду $f_{0i} \leq t$. Однак якщо t вершин відмовило і виникає синдром Σ_1 , тоді неможливо однозначно визначити технічний стан жодної вершини графу $G(U,E)$. Отримана суперечність доводить необхідність теореми 1.2.2.

Щоб довести достатність, припустимо, що $t = \max(f_{0i}) - 1, u_i \in U$, але граф $G(U,E)$ не t -діагностується послідовно. З цього випливає утворення синдрому, з якого неможливо однозначно визначити технічний стан жодної вершини графу $G(U,E)$. Такий синдром повинен обов'язково мати вигляд Σ_1 , оскільки в іншому випадку граф $G(U,E)$ завжди буде послідовно t -діагностуватися, бо на основі леми 1.1 завжди існуватимуть хоча б дві працездатні вершини. Рівність $t = \max(f_{0i}) - 1, u_i \in U$ означатиме, що в графі $G(U,E)$ існує хоча б одна вершина $u_i \in U$, для якої справджується $f_{0i} = t + 1$, тобто $f_{0i} > t$. Однак, завдяки лемі 1.4, така вершина завжди буде однозначно діагностуватися як непрацездатна, а це суперечить вихідному припущенню.

Треба зазначити, що для центральної вершини u_i підграфу типу зірки $K_{1,t+1}$ значення $\max(f_{0i})$ буде максимальним і дорівнюватиме $t + 1$, оскільки $f_{0i} = t + 1$ (максимальну внутрішню стійку множину утворює центральна вершина). Тому лемі 1.2.1 можна довести і на основі теореми 1.2.2.

У праці [8] доведено таку теорему:

Теорема 1.2.3[8]. Для виконання послідовного діагностування в циркулянті $C(n, \{1\})$ необхідно і достатньо виконати умови:

$$t \leq \{(n-1/2) \text{ для непарних } n; (n-2/2) \text{ для парних } n\}$$

Неважко зрозуміти, що для циркулянта $C(n, \{1\})$ для всіх $u_i \in C$ значення індекса f_{0i} дорівнює $\lfloor n-1/2 \rfloor$. З останнього співвідношення випливає, що теорема 1.2.3 є безпосереднім наслідком теореми 1.2.2.

Доцільно зауважити, що в загальному випадку задача щодо знаходження внутрішньої стійкої множини максимального розміру (максимальної незалежної множини) належить до класу NP-повних задач. Тому практичний інтерес має задача синтезу графів, що послідовно діагностуються.

Для послідовної стратегії діагностування можна запропонувати наступний алгоритм синтезу діагностичного графа з мінімальною кількістю ребер, що забезпечує послідовне діагностування не більше, ніж за два кроки:

1. Ділимо довільно вершини графу на підмножини, потужності яких $\geq t$.

2. Всередині кожної підмножини довільно вибираємо певну центральну вершину $u_i \in U$ і з'єднуємо її з рештою вершин підмножини.
3. З'єднуємо центральні вершини утворених підмножин ребром.

У результаті утвориться дерево $T_{|U|,t}$, яке складається зі з'єднаних ребром підграфів типу $K_{1,v}$, де $v > t$ (див. рис. 9).

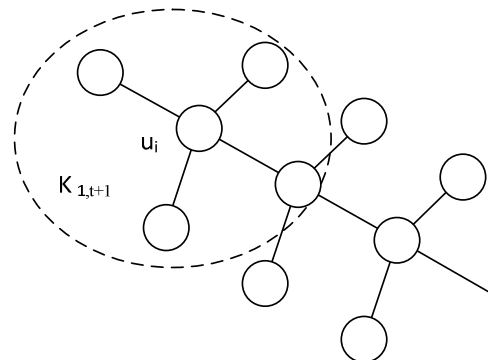


Рис. 9. Приклад графу, який можна послідовно 3-діагностувати

Очевидно, що дерево, синтезоване на основі наведеного вище алгоритму, завжди буде послідовно t -діагностуватися не більше, ніж за два кроки.

Слід також зазначити, що за умови $t=n-2$ синтезоване дерево стягнеться у зірку $K_{1,n-1}$.

Алгоритм дешифрації синдрому для дерев типу $T_{|U|,t}$ максимально простий:

Визначаємо пусту множину R вершин, що відмовили і які потрібно замінити.

Проглядаються ваги ребер, інцидентних тільки до центральних вершин $K_{1,v}$.

1. Якщо кількість ребер з одиничною вагою перевищує t , тоді центральна вершина зірки відмовила і має бути додана до множини R .
2. В інакшому випадку завжди існує хоча б одне ребро з нульовою вагою, а всі інші вершини, інцидентні до ребер з одиничною вагою, додаються до множини R .

Всі вершини множини R підлягають заміні.

Очевидно, що складність такого алгоритму можна оцінити як $O(\lfloor |U|/t \rfloor * (t+1))$.

1.3. Локальне діагностування

У праці [10] вказано на можливість локального діагностування для моделі 0111.

Для повнозв'язних графів, аналогічно до теореми 1.2, доводиться

Теорема 1.3.1[10]. Для існування строгого локального арбітра необхідне виконання умови $t \leq n-2$. Якщо $t \leq n-2$, тоді існує $n-t$ строгих локальних арбітрів.

Для повнозв'язних графів, аналогічно до леми 1.4, доводиться

Теорема 1.3.2[10]. Якщо $t \leq n-2$, тоді кожна непрацездатна вершина є локальним арбітром.

Зауважмо, що в повнозв'язному графі завжди існує $n-t$ строгих локальних арбітрів і таких t локальних арбітрів, кожний з яких завжди виявляє відмову рівно однієї вершини.

З властивостей циркулянта $C(n, \{1\})$ і леми 1.4 випливає

Лема 1.3.1. За умови $t=1$ циркулянт $C(n, \{1\})$ завжди містить $|U|$ локальних арбітрів, кожний з яких завжди виявляє відмову рівно однієї вершини.

З властивостей циркулянта $C(n, \{1, 2, \dots, \lceil (t/2) \rceil\})$ і лем 1.1–1.4, теореми 1.3.1 випливає

Теорема 1.3.3. Якщо $t \leq n-2$, то кожна вершина циркулянта типу $C(n, \{1, 2, \dots, \lceil (t/2) \rceil\})$ є локальним арбітром.

Зауважмо, що в такому циркулянті рівно t локальних арбітрів завжди виявлятимуть відмову рівно однієї вершини, а $n-t$ локальних арбітрів виявлять k_i відмов, де $1 \leq k_i \leq t$, $\sum k_i = t$, $i \in \{1, \dots, n-t\}$.

З властивостей дерева $T_{|U|,t}$ і леми 1.4 випливає

Теорема 1.3.4. У дереві $T_{|U|,t}$ завжди існує рівно $\lfloor |U|/t \rfloor$ локальних арбітрів.

2. Модель 0110

Нижче досліджено тільки неорієнтовані графи $G(U,E)$ без петель з правилом породження ваг ребер **0110** для випадку точного діагностування та стійких відмов вершин.

З визначення моделі **0110** випливають

Лема 2.1. Будь-яке ребро з нульовою вагою існує тоді і тільки тоді, коли обидві вершини, що інцидентні йому, є працездатними, або коли обидві вершини, що інцидентні йому, є непрацездатними.

Лема 2.2. Будь-яке ребро з одиничною вагою існує тоді і тільки тоді, коли воно інцидентно працездатній та непрацездатній вершинам.

Лема 2.3. Будь-яка непрацездатна вершина u_i завжди спотворює технічний стан всіх вершин, що належать до $\Gamma(u_i)$.

З визначення моделі **0110** випливає

Теорема 2.1.[9]. Щоби граф $G(U,E)$ t -діагностувався паралельно, має виконуватися умова $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Якщо $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, тоді існує паралельно t -діагностований граф $G(U,E)$.

Щоб довести необхідність теореми 2.1, розглянемо повнозв'язний граф $G(U,E)$, для якого умова $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ не справджується, тобто $n=2t$. Тоді в такому графі завжди існуватимуть два повні підграфи з множинами вершин потужності t з нульовими вагами. Перший підграф охоплюватиме працездатні вершини, а другий – вершини, що відмовили, причому вершини, що належать до різних підграфів, будуть з'єднані між собою ребрами з одиничною вагою. Тобто стани всіх вершин графу $G(U,E)$ неможливо визначити.

Щоб показати існування, розглянемо повнозв'язний граф $G(U,E)$, для якого умова $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ справджується, тобто $n=2t+1$. Тоді в такому графі завжди існуватимуть два повні підграфи з нульовими вагами. Перший підграф охоплюватиме працездатні вершини і матиме потужність множини вершин $t+1$, а другий (з множиною вершин потужності t) – вершини, що відмовили, причому вершини, що належать до різних підграфів, будуть з'єднані між собою ребрами з одиничною вагою. Тобто стани всіх вершин графу $G(U,E)$ будуть однозначно визначені.

З леми 2.1. випливає

Наслідок 2.1. Вершини, що інцидентні ребру з нульовою вагою, завжди знаходяться в тому самому технічному стані.

З леми 2.2. випливає

Наслідок 2.2. Вершини, що інцидентні ребру з одиничною вагою, завжди знаходяться в різних технічних станах.

З визначення моделі **0110**, теореми 2.1, лем 2.1 – 2.3 та наслідків 2.1, 2.2 випливає

Лема 2.4. В довільному зв'язному графі $G(U,E)$ ребра з одиничною вагою завжди розбивають множину вершин U на дві нерівнопотужні підмножини U_1 , $|U_1|=n-t$ та U_2 , $|U_2|=t$, що не перетинаються, причому вершини кожної з підмножин знаходяться в однаковому технічному стані (див. рис. 10).

Тоді з теореми 2.1 випливає, що підмножина U_1 більшої потужності є множиною працездатних вершин, а підмножина U_2 меншої потужності є множиною вершин, що відмовили.

З визначення моделі **0110** і леми 2.1 випливає також, що всі ребра, що зв'язують вершини кожної підмножини, матимуть нульову вагу.

З теореми 2.1 та лем 2.1 – 2.4 випливає теорема, аналогічна до [12].

Теорема 2.2. Довільний зв'язний граф $G(U,E)$ за умови $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ завжди паралельно t -діагностується.

З леми 2.4, теореми 2.1 та визначення паралельного t -діагностування випливає

Наслідок 2.3. Задача паралельного t -діагностування є задачею пошуку всіх елементів підмножини меншої потужності (можливо пустої) множини вершин U , розбиття якої утворено на підставі ваг ребер, що їх зв'язують.

З визначення послідовного діагностування випливає, що теорема 2.1 для паралельного t -діагностування визначає також необхідні умови послідовного t -діагностування.

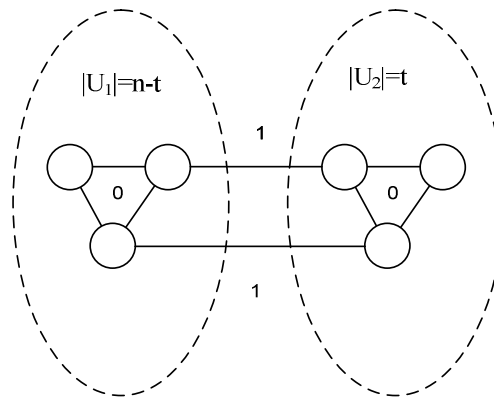


Рис. 10. Розбиття множини вершин U

З леми 2.4, теореми 2.1 та визначення послідовного t -діагностування випливає

Наслідок 2.4. Задача послідовного t -діагностування є задачею пошуку хоча б одного з елементів підмножини меншої потужності (можливо пустої) множини вершин U , розбиття якої утворено на підставі ваг ребер, що їх зв'язують.

З визначення послідовного діагностування випливає, що теорема 2.1 для паралельного t -діагностування визначає також необхідні умови адаптивного t -діагностування.

З леми 2.4, теореми 2.1 та визначення адаптивного t -діагностування випливає

Наслідок 2.5. Задача адаптивного t -діагностування є задачею пошуку хоча б одного з елементів підмножини більшої потужності з підмножин множини вершин U , розбиття якої утворено на підставі ваг ребер, що їх зв'язують.

З наслідків 2.3 – 2.5 випливає

Теорема 2.3. Задачі паралельного t -діагностування, послідовного t -діагностування та адаптивного t -діагностування для моделі **0110** є еквівалентними задачами і зводяться до задачі пошуку підмножини більшої потужності з підмножин множини вершин U , розбиття якої утворено на підставі ваг ребер, що їх зв'язують.

З теорем 2.2 та теорем 2.3 випливає теорема, аналогічна до [14].

Теорема 2.4. Довільний зв'язний граф $G(U, E)$ за умови $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ завжди послідовно t -діагностується.

З теорем 2.2 і 2.4 випливає, що для моделі **0110** задачі аналізу для паралельного t -діагностування та послідовного t -діагностування є еквівалентними до задачі перевірки зв'язності граф $G(U, E)$.

Задача перевірки зв'язності графу $G(U, E)$ може буди розв'язана на основі відомого алгоритму «пошуку в глибину». Отже, складність задачі аналізу можна оцінити як $O(|U| + |E|)$.

2.1. Паралельна стратегія діагностування

Як відомо, довільний зв'язний граф $G(U, E)$ має кістякові дерева.

З теореми 2.2 випливає

Лема 2.1.1. Довільне кістякове дерево $T_K(U, E_T)$ за умови $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ завжди паралельно t -діагностується.

Таке кістякове дерево $T_K(U, E_T)$ завжди матиме $(n-1)$ ребер. Отже, задача синтезу є еквівалентною до задачі знаходження такого дерева $T_K(U, E_T)$, для якого складність алгоритму t -діагностування була б мінімальною. Вочевидь, такій умові завжди задовольнятиме довільний простий ланцюг $L(U)$, що побудований на множині U , або зірка $K_{1, n-1}$.

Отже, алгоритм розв'язання задачі синтезу є еквівалентним до алгоритму побудови простого ланцюгу $L(U)$ або зірки $K_{1, n-1}$. Тобто складність алгоритму розв'язання задачі синтезу є $O(|U|)$.

Алгоритм t -діагностування (дешифрації синдрому глобальним арбітром) для простих ланцюгів $L(U)$ або зірок $K_{1, n-1}$ є дуже простим.

Визначаємо дві пусті множини S_1 та S_2 .

Для простих ланцюгів $L(U)$ заносимо початкову вершину ланцюгу u_i до множини S_1 . Для зірок $K_{1,n-1}$ беремо центральну вершину зірки і заносимо її до множини S_1 .

Перевіряємо ваги $(n-1)$ ребер, рухаючись вздовж простого ланцюга $L(U)$, або перевіряємо ваги ребер, що зв'язують центральну вершину зірки $K_{1,n-1}$ з вершинами другої частки.

1. Якщо вага поточного ребра $a_{ij}=1$, то (леми 2.1-2.4, наслідок 2.2):

- якщо вершина u_i належить до множини S_1 , то додати вершину u_j до множини S_2 .
- якщо вершина u_i належить до множини S_2 , то додати вершину u_j до множини S_1 .

2. Інакше (вага поточного ребра $a_{ij}=0$) додати вершину u_j до тієї самої множини, до якої належить вершина u_i (лема 2.1, наслідок 2.1).

У результаті утворяться дві нерівнопотужні множини S_1 та S_2 , такі, що $S_1 \cup S_2 = U$, $|S_1| + |S_2| = n$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. При цьому одна з цих множин може залишитися пустою, або мати потужність меншу, або рівну $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Множина більшої потужності буде гарантовано не пустою.

Отже, множина G працездатних вершин буде такою з множин S_1 , S_2 , яка має найбільшу потужність (лема 2.4). Множина F вершин, що відмовили, буде або пустою, або матиме меншу потужність. При цьому будуть справедливими вирази: $G \cup F = U$, $G \cap F = \emptyset$, $|F| = t$.

З цього випливає також, що складність алгоритму дешифрації синдрому мінімальна і оцінюється як $O(n-1)$.

Варто також зазначити, що складності алгоритмів аналізу, синтезу і дешифрації синдрому глобальним арбітром не залежать від t .

2.2. Послідовна стратегія діагностування

З теореми 2.3 випливає, що наведені алгоритми синтезу і дешифрації синдрому глобальним арбітром справедливі також для послідовної стратегії діагностування.

2.3. Адаптивна стратегія діагностування

З визначення адаптивної стратегії діагностування випливає, що граф, що синтезується на кожному кроці, повинен бути як мінімум зв'язним, щоб отримати інформацію про технічний стан усіх вершин, що діагностуються.

З цього випливає

Лема 2.3.1. Мінімальна складність алгоритму адаптивного діагностування є $O(n-1)$.

З теореми 2.3 та леми 2.1.1 випливає, що алгоритм адаптивного діагностування є еквівалентним алгоритму покрокового синтезу довільного кістякового дерева $T_K(U, E_T)$ з одночасним розбиттям вершин графу, що синтезується, на дві підмножини на підставі аналізу ваг синтезованих ребер. Вочевидь алгоритм синтезу довільного простого ланцюга $L(U)$ або зірки $K_{1,n-1}$ буде алгоритмом синтезу мінімальної складності.

Отже, алгоритмом адаптивного діагностування буде модифіковано версію алгоритму дешифрації синдрому глобальним арбітром для паралельної стратегії діагностування. Розглянемо його на прикладі синтезу довільного простого ланцюга $L(U)$:

На вході маємо множину ізольованих вершин $U = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$.

Визначаємо дві пусті множини S_1 та S_2 .

Беремо довільну (ще ізольовану вершину) $u_i \in U$, заносимо її до множини S_1 і робимо її поточною.

1. Поточна вершина виконує ЕП довільної інакшої (ще ізольованої) вершини $u_j \in U$. Синтезоване ребро додається до множини E .

Якщо вага синтезованого ребра $a_{ij}=1$, то (леми 2.1–2.4, наслідок 2.2):

якщо поточна вершина належить до множини S_1 , то додати вершину u_j до множини S_2 .

якщо поточна вершина належить до множини S_2 , то додати вершину u_j до множини S_1 .

Інакше (вага синтезованого ребра $a_{ij}=0$) додати вершину u_j до тої самої множини, до якої належить поточна вершина (лема 2.1, наслідок 2.1).

2. Викреслюємо поточну та щойно перевірену(u_j) вершини з множини U .

3. Робимо щойно перевірену(u_j) вершину поточною і переходимо на крок 1.

У результаті буде утворено дві множини S_1 та S_2 , властивості яких вже досліджено для паралельної стратегії діагностування. Алгоритм адаптивного діагностування для випадку синтезу зірок $K_{1,n-1}$ є аналогічним.

Наслідок 2.3.1. Максимальна складність алгоритму адаптивного діагностування є $O(n-1)$.

З леми 2.3.1 та наслідку 2.3.1 випливає

Теорема 2.3.1. Складність алгоритму адаптивного діагностування є $O(n-1)$.

Варто зазначити, що складність алгоритму адаптивного діагностування також не залежить від t .

2.4. Локальне діагностування

У праці [10] вказано на можливість локального діагностування для моделі **0110**.

Для повнозв'язних графів доводиться

Теорема 2.4.1[10]. Якщо $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, тоді кожна вершина є строгим локальним арбітром.

Маємо такі випадки щодо значення t .

Нехай $t=0$, тоді всі ваги ребер матимуть нульову вагу.

Нехай $1 < t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Тоді з леми 2.4 випливає, що граф буде поділено на два повні підграфи такі, що всі ребра всередині кожного підграфу матимуть нульові ваги, а всі ребра, що зв'язують ці підграфи, матимуть одиничні ваги. Вочевидь менший підграф складатиметься тільки з вершин, що відмовили, тоді як більший підграф складатиметься тільки з працездатних вершин. Тоді кожна працездатна вершина матиме таку кількість інцидентних ребер нульової ваги, що є більшою за $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Кожна вершина, що відмовила, матиме таку кількість інцидентних ребер нульової ваги, що є меншою за $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

Нехай $t=1$. Тоді менший підграф стягнеться в одну вершину, а всі ребра, що їй інциденті, матимуть одиничні ваги, тобто умова $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ не буде виконуватись. Тобто вершина, що відмовила, є в стані виявити власну відмову і визначити реальний технічний стан інших вершин графу завдяки лемі 2.3. Більший підграф складатиметься тільки з працездатних вершин, кожна вершина якого матиме таку кількість інцидентних ребер нульової ваги, що є більшою за $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

З викладеного випливає, що у всіх випадках кожна вершина може виявити усі вершини, що відмовили, тільки на підставі ваг інцидентних ребер.

Теорема 2.4.2. Якщо $t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, то центральна вершина зірки $K_{1,n-1}$ є строгим локальним арбітром.

Нехай центральна вершина зірки $K_{1,n-1}$ є працездатною і $t=0$. Тоді з визначення моделі **0110** випливає, що всі ребра, що зв'язують центральну вершину з вершиною другої частки, матимуть нульову вагу.

Нехай центральна вершина зірки $K_{1,n-1}$ є працездатною і $1 < t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Тоді ребер, що зв'язують центральну вершину з вершинами другої частки і мають нульову вагу, буде більше за $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

Нехай центральна вершина зірки $K_{1,n-1}$ відмовила і $t=1$. Тоді з визначення моделі **0110**, всі ребра, що зв'язують центральну вершину з вершиною другої частки, матимуть одиничну вагу.

Нехай центральна вершина зірки $K_{1,n-1}$ відмовила і $1 < t \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Тоді ребер, що зв'язують центральну вершину з вершиною другої частки і мають нульову вагу, буде менше за $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

З викладеного ясно, що у всіх випадках центральна вершина зірки може визначити всі вершини, що відмовили, тільки на основі ваг ребер, що зв'язують її з вершинами другої частки.

Висновок

У праці досліджено моделі **0111** та **0110** діагностування на системному рівні. Доведено, що ці моделі завжди зображуються неорієнтованими графами.

Для моделі **0111** і випадку паралельного t -діагностування доведено, що необхідні і достатні умови, визначені теоремою 1.1.2, завжди справджуються для умов, визначених теоремою 1.1.1, при цьому обернене не справджується.

Запропоновано циркулянт мінімальної надлишковості, який завжди задовольняє умови теореми 1.1.2. Для такого циркулянта запропоновано алгоритм дешифрації синдрому глобальним арбітром мінімальної складності.

Для послідовного t -діагностування встановлено відповідність до результатів, що отримані в [5, 14]. Також запропоновано конструктивний алгоритм синтезу мінімальних деревоподібних графів, що послідовно t -діагностуються не більше ніж за два кроки.

Встановлено відповідність між результатами паралельного і послідовного t -діагностування та результатами локального діагностування (тобто діагностування на основі фрагмента синдрому, доступного для певної вершини діагностичного графу). Для локального діагностування показано можливість застосування циркулянтів, що запропоновані для паралельного t -діагностування, і мінімальних деревоподібних графів, що запропоновані для послідовного t -діагностування.

Для моделі **0110** і випадку паралельного t -діагностування синтезовано діагностичні графи з мінімальною кількістю ребер. Запропоновано алгоритм дешифрації синдрому глобальним арбітром складності $O(n-1)$.

Доведено, що задачі паралельного t -діагностування, послідовного t -діагностування та адаптивного t -діагностування для моделі **0110** є еквівалентними задачами і зводяться до задачі пошуку більшості в розбитті множини U на підставі ваг ребер графу $G(U,E)$. Доведено, що складність алгоритмів паралельного t -діагностування, послідовного t -діагностування та адаптивного t -діагностування є $O(n-1)$ і не залежить від t .

Встановлено відповідність між результатами паралельного і послідовного t -діагностування та результатами локального діагностування. Для локального діагностування показано можливість застосування зірок $K_{1,n-1}$.

З викладеного також випливає, що до відомих класифікаційних ознак моделей діагностування на системному рівні варто додати такі ортогональні класифікаційні ознаки:

- За передбачуваністю можливих висновків модулів, що відмовили та які перевіряють, на два класи:
 - детерміновані (тобто такі, у котрих $a_{bg}, a_{bb} \in \{0,1\}$). До таких моделей належатимуть, наприклад, моделі **0110**, **0111**
 - випадкові (тобто такі, у котрих $a_{bg}, a_{bb} \in \{0,1,-\}$).
- За характером синдрому, що генерується:
 - Симетричні, тобто завжди породжують неорієнтовані графи. До таких моделей належатимуть тільки моделі **0111**, **0110**
 - Несиметричні, тобто завжди породжують орієнтовані графи
- За залежністю розв'язків задач характеристизації, аналізу, синтезу та алгоритмів діагностування від параметра t :
 - Цілком залежні від t . До таких моделей належатиме, наприклад, модель **0111**.
 - Цілком незалежні від t
 - Частково залежні від t . До таких моделей належатимуть, наприклад, модель **0110**, оскільки необхідні умови діагностування для неї залежать від t , а синтезовані графи і алгоритми діагностування не залежать від t .

Отримані результати можна використовувати для побудови нових алгоритмів і процедур діагностики, для технічних систем, що самодіагностуються та стійкі до відмов.

1. Somani A. *System Level Diagnosis: A Review. Technical Report, Dependable Computing Laboratory, Iowa State University.* – 1997. – p. 33. 2. Preparata F.P. *On the Connection Assignment Problem of Diagnosible Systems./Preparata F.P., Metzger G., Chien R.T.//IEEE Trans, on Electronic Computers.* – Vol. EC-16, No. 6. – 1967. – pp. 848-854. 3. Friedman A. *A new measure of digital system*

diagnosis/Friedman A.//Dig. 1975 Int Symp. of fault tolerant computing, IEEE, New York. – June 1975. – pp. 167–169. 4. Maheshwari S. On models for diagnosable systems and probabilistic fault diagnosis./Maheshwari S., Hakimi S.//EEE Trans. Computer. – 1976. – Vol. C–25, No. 3. – pp. 228–236. 5. Barsi F. A theory of diagnosability of digital systems./F. Barsi, F. Grandoni, P. Maestrini // IEEE Trans Computers. – 1976. – Vol. C–25. – pp. 585–593. 6. K. Nakajima. A new Approach to System Diagnosis / K. Nakajima // Proc. 19th Annu. Allerton Conf. Commun., Contr. and Comput., Sept. 1981. – pp. 697–706. 7. S. Hakimi. On Adaptive System Diagnosis / S. Hakimi, K. Nakajima // IEEE Transactions on Computer. – Vol. C–33, No. 3. – 1984. – pp. 234–240. 8. Крамаренко М. Б. Анализ самодиагностирования отказов вычислительной системы // Электронное моделирование. – 1987. – №6. – С. 61–64. 9. Крамаренко М.Б. Модели диагностирования отказов параллельной вычислительной системы. // Электронное моделирование. – 1989. – № 3. 60–65. 10. Крамаренко М. Б. Условия локальной самодиагностируемости моделей диагностики отказов на системном уровне / М. Б. Крамаренко, Е.В. Буров // Восточно–европейский журнал передовых технологий. Информационные технологии. – 2011. – № 1/2. – С. 25–29. 11. Kreutzer S. System–level Diagnosis: Analysis of Two New Models / S. Kreutzer, S. Hakimi // Information Sciences. – 1986, 40. – pp. 117–130. 12. Радойчевски В. Ц. Параллельная диагностируемость модульных систем при централизованной дешифрации синдрома / В. Ц. Радойчевски, А. Я. Шалаев // Электронное моделирование. – 1992. – № 1. – С. 57–63. 13. Корячко В. Характеризация диагностических графов для симметричной модели дешифрации синдрома / В. П. Корячко, С. В. Скворцов, В. И. Шувиков // Информационные технологии. – 1996. – №6. – С. 18–22. 14. Радойчевски В. Ц. О последовательной диагностируемости при централизованной дешифрации синдрома / В. Ц. Радойчевски, А. Я. Шалаев // Электронное моделирование. – 1992. – №1. – С. 57–63. 15. Теорія графів / Р.М. Трохимчук. – К.: Редакційно–видавничий центр “Київський університет”. – 1998 – 46 с.