

Л. Журавчак, А. Струк
 Карпатське відділення Інституту геофізики
 ім. С. І. Субботіна НАН України

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ГРАНИЧНИХ ТА ПРИГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІД ЧАС ЗНАХОДЖЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТИСКУ У ПРУЖНОМУ ПОРИСТОМУ ЗАМКНЕНОМУ ПЛАСТІ

© Журавчак Л., Струк А., 2012

Порівняно ефективність використання непрямих методів граничних та приграничних елементів для побудови чисельно-аналітичних розв'язків задачі про неусталений рух стисливої рідини в пружному пористому замкненому пласті з урахуванням депресії тисків. З використанням фундаментального розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності та схеми послідовності початкових умов побудовано дискретно-континуальну модель задачі з довільними початковими умовами та граничними умовами першого роду. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінювання впливу характеристик середовища та кількості свердловин на зміну пластового тиску.

Ключові слова: нестационарний процес зміни пластового тиску, непрямий метод граничних елементів, непрямий метод приграничних елементів.

The effectiveness of using the indirect boundary and near-boundary element techniques for the construction of numerical -analytical solutions of the problem of unsettled motion of compressible fluid in porous, elastic, closed reservoir, including depression of pressures, was compared. Using the fundamental solution of the non-stationary thermal conductivity equation and sequence diagram of initial conditions the discrete-continual model of the problem with arbitrary initial conditions and boundary conditions of the first kind, was constructed. Series of computational experiments were carried out to assess the influence of characteristics of environment and number of wells on reservoir pressure change.

Key words: non-stationary process of reservoir pressure change, indirect boundary element technique, indirect near-boundary element technique.

Вступ

Під час побудови математичної моделі розроблення нафтових родовищ серед природних умов складного реального процесу виділяють визначальні чинники, зокрема, сукупність нафтоносних пластів розглядають як єдину гідродинамічно зв'язану систему не лише по усій області нафтогазоносності, але й по навколишній водонапірній області. Математичне моделювання цього процесу полягає у складанні й розв'язуванні диференціального рівняння в частинних похідних, яке його описує, доповненого початковими (тими, що існували до початку розроблення) та крайовими умовами (на поверхнях, які обмежують пласт із зовнішніх сторін і на стінках свердловин всередині пластів). Зрозуміло, що для дослідження фільтраційних потоків у реальному пласті моделі повинні бути тривимірними. Беручи до уваги той факт, що товщина пласта та її зміна є доволі малими порівняно з його розмірами в горизонтальній площині вздовж осей x_1 і x_2 , маємо змогу розв'язувати двовимірні рівняння руху для дуже протяжних пластів зі змінною товщиною $h(x_1, x_2)$ [2, 3], нехтуючи вертикальною складовою швидкості руху.

Математична модель для знаходження пластового тиску

Розглянемо однорідний за параметрами пласт, змодельований опуклою областю Ω з довільною криволінійною межею Γ_z , що містить L свердловин з контурами Γ_{cl} ($l=1, \dots, L$). Для розрахунку зміни тиску в часі у кожній точці пласта розв'яжемо диференціальне рівняння, що

описує неусталений (нестационарний) рух пружної (стисливої) рідини в пружному пористому середовищі [2, 3]:

$$\mathbf{P}_{0\tau}(p(\mathbf{x}, \tau)) = \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Omega \times \mathbf{T}, \quad (1)$$

у допущенні, що треба визначити зміну пластового тиску у замкненому покладі за таких граничних і початкових умов:

$$p(\mathbf{x}, \tau) = p_z(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z \times \mathbf{T}, \quad (2)$$

$$p(\mathbf{x}, \tau) = p_l(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl} \times \mathbf{T}, \quad l = 1, \dots, L, \quad (3)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Тут $p(\mathbf{x}, \tau)$ – тиск; $\kappa = k / (\mu\beta^*)$ – коефіцієнт п'єзопровідності; k – коефіцієнт проникності пласта; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини; β^* – коефіцієнт пружної ємності насиченого пласта; $\mathbf{T} = \{\tau: 0 < \tau < \infty\}$; $p_0(\mathbf{x})$ – початковий пластовий тиск у покладі; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – декартові координати; τ – час.

Побудова інтегральних зображень розв'язків початково-крайової задачі та граничних інтегральних рівнянь

Згідно з основними положеннями непрямих методів граничних (НМГЕ) [1] та приграничних (НМПГЕ) [6] елементів на межі пласта $\Gamma = \Gamma_z \cup_{l=1}^L \Gamma_{cl}$ або у зовнішній приграничній до Ω багатозв'язній області $G = G_z \cup_{l=1}^L G_l$ введемо невідомі функції $\phi^\gamma(\mathbf{x}, \tau)$, $\gamma \in \{\Gamma, G\}$, які описують розподіл невідомих фіктивних джерел тиску. Після розширення області визначення функції $p(\mathbf{x}, \tau)$ на всю площину \mathbf{R}^2 , рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{P}_{0\tau}(p^\gamma(\mathbf{x}, \tau)) = -\phi^\gamma(\mathbf{x}, \tau)\chi_\gamma - p_0(\mathbf{x})\delta(\tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}, \quad (5)$$

де χ_γ – характеристичні функції межі Γ та приграничної області G , тобто $\chi_\gamma = 1$ при $\mathbf{x} \in \gamma$, $\chi_\gamma = 0$ при $\mathbf{x} \notin \gamma$, $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака.

Оскільки для оператора $\mathbf{P}_{0\tau}(p(\mathbf{x}, \tau))$ існує й відомий фундаментальний розв'язок (ФР) $U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)$ [5], то інтегральне зображення розв'язку рівняння (5) з урахуванням початкового розподілу (4) має вигляд

$$p^\gamma(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U) + b^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}, \quad (6)$$

де $U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \frac{1}{4\pi\kappa(\tau - \xi_4)} \exp(-\frac{r^2}{4\kappa(\tau - \xi_4)})$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$, $\xi_4 \in T$, $r^2 = \sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2$,

$$\mathbf{F}^\gamma(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_0^\tau \int_\gamma U(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \phi^\gamma(\xi, \xi_4) d\gamma(\xi) d\xi_4, \quad b^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U) = \int_{\Omega_p} U(\mathbf{x}, \tau, \xi, 0) p_0(\xi) d\Omega_p(\xi), \quad (7)$$

Ω_p збігається з Ω під час розв'язування задачі непрямим методом граничних елементів, $\Omega_p = \Omega \cup \Omega_0$ у разі розв'язування задачі непрямим методом приграничних елементів, Ω_0 – багатозв'язна область продовженої початкової умови [6], в якій початковий тиск лінійно спадає від значення на межі Γ до нульового. Зауважимо, що Ω_0 та G не повинні збігатися, хоч і можуть.

Спрямувавши в (6) \mathbf{x} з середини області Ω до межі Γ для задоволення умов (2), (3), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\phi^\gamma(\xi, \xi_4)$ з відомими $p_0(\xi)$ та заданими функціями $p_z(\mathbf{x}, \tau)$, $p_l(\mathbf{x}, \tau)$:

$$\mathbf{F}^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U) = p_z(\mathbf{x}, \tau) - b^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z \times \mathbf{T}, \quad (8)$$

$$\mathbf{F}^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U) = p_l(\mathbf{x}, \tau) - b^\gamma(\mathbf{x}, \tau, U), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl} \times \mathbf{T}, \quad l = 1, \dots, L. \quad (9)$$

Просторово-часова дискретизація математичної моделі

Оскільки виконати аналітичне інтегрування у рівняннях (8), (9) для прикладних задач внаслідок довільності області Ω практично неможливо, здійснимо просторово-часову дискретизацію за допомогою таких кроків. Межу Γ або приграничну область G дискретизуємо відповідно на $V = V_z + \sum_{l=1}^L V_l$ граничних або приграничних елементів γ_v , причому $\cup_{v=1}^V \gamma_v = \gamma$; Γ_v ,

G_v – це криволінійні елементи другого порядку відповідно з 3-ма вузлами та 8-ма вузлами [4], вони між собою не перетинаються. Тоді невідомі функції, які описують розподіл фіктивних джерел тиску в межах елементів γ_v , позначимо через $\phi_v^\gamma(\mathbf{x}, \tau)$. Області Ω та Ω_0 дискретизуємо на криволінійні елементи другого порядку з 8-ма вузлами Ω_q ($q=1, \dots, Q$), Ω_{0q} ($q=1, \dots, Q_0$). Для зручності опису залежності $\phi_v^\gamma(\mathbf{x}, \tau)$ від часу часовий промінь \mathbf{T} розіб'ємо на однакові інтервали $\mathbf{T}_k =]\tau_{k-1}, \tau_k]$ ($k=1, 2, \dots, \tau_0=0$) і в межах кожного \mathbf{T}_k ($k=1, \dots, K, K>1$) ці функції апроксимуємо постійними $d_v^{\gamma k}$. Дискретно-континуальну модель побудуємо для покрокової часової схеми – схеми послідовності початкових умов (СППУ) [1, 6]. Кожний крок за часом \mathbf{T}_k розглянемо як нову задачу, тобто уведемо локальний час $\tilde{\tau} = \tau - (k-1)\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ – величина часового приросту) і обчислені в кінці $(k-1)$ -го часового інтервалу значення $p(\mathbf{x}, (k-1)\Delta\tau)$ у внутрішніх точках використано як початкові для наступного k -го кроку.

Оператори $\mathbf{F}^\gamma(\mathbf{x}, \tau, \Phi)$ та $b^\gamma(\mathbf{x}, \tau, \Phi)$ (7) після просторово-часової дискретизації для K -го кроку ($(K-1)\Delta\tau < \tau \leq K\Delta\tau, 0 < \tilde{\tau} \leq \Delta\tau$) отримаємо у вигляді

$$\mathbf{F}^{\gamma K}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, U_\tau) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, U_\tau) d_v^{\gamma K}, \quad b^{\gamma K}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, U) = \sum_{q=1}^{Q+Q_0} \int_{\Omega_{pq}} U(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, 0) p_0^{(K)}(\xi) d\Omega_{pq}(\xi), \quad (10)$$

де $p_0^{(1)}(\xi) = p_0(\xi)$, $p_0^{(k)}(\xi) = p(\xi, (k-1)\Delta\tau)$, $k > 1, \mathbf{x} \in \Omega$, а в Ω_0 лінійно спадає від значення на межі

Γ до нульового; $A_v^\gamma(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, U_\tau) = \int_{\gamma_v} U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) d\gamma_v(\xi)$, $U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \frac{1}{4\kappa\pi} E_1\left(\frac{r^2}{4\kappa\tilde{\tau}}\right)$, $E_1(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} dz$ –

інтегро-показникова функція.

Дискретно-континуальна модель для знаходження невідомих інтенсивностей джерел тиску, введених у граничних або приграничних елементах

Для задоволення граничних умов використаємо колокаційну методику. Точки колокації виберемо у кінцевий момент часу $\Delta\tau$ у середині кожного граничного елемента $\Gamma_w, w=1, \dots, V$. ГПР (8), (9) після просторово-часової дискретизації для K -го кроку запишемо у вигляді СЛАР

$$\sum_{v=1}^V A_v^\gamma(\mathbf{x}^w, \Delta\tau, U_\tau) d_v^{\gamma K} = p_z(\mathbf{x}^w, \Delta\tau) - b^{\gamma K}(\mathbf{x}^w, \Delta\tau, U), \quad \mathbf{x}^w \in \Gamma_w \subset \Gamma_z, \quad w=1, \dots, V_z, \quad (11)$$

$$\sum_{v=1}^V A_v^\gamma(\mathbf{x}^w, \Delta\tau, U_\tau) d_v^{\gamma K} = p_l(\mathbf{x}^w, \Delta\tau) - b^{\gamma K}(\mathbf{x}^w, \Delta\tau, U), \quad \mathbf{x}^w \in \Gamma_w \subset \Gamma_{cl}, \quad w=V_z+1, \dots, V. \quad (12)$$

Зрозуміло, що для постійного кроку за часом матрицю системи (11), (12) обчислено один раз і збережено у пам'яті комп'ютера. Як бачимо, перед побудовою системи (11), (12) здійснено аналітичне інтегрування за часом інтегралів, що входять після просторово-часової дискретизації у ліву частину СЛАР.

Знайшовши з (11), (12) невідомі $d_v^{\gamma K}$, використаємо формулу, аналогічну до (6), для обчислення шуканого тиску у вузлах, що описують внутрішні елементи $\Omega_q \in \Omega$, в момент часу $\Delta\tau$

$$p^{(\gamma K)}(\mathbf{x}^{qs}, \Delta\tau) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(\mathbf{x}^{qs}, \Delta\tau, U_\tau) d_v^{\gamma K} + b^{\gamma K}(\mathbf{x}^{qs}, \Delta\tau, U), \quad \mathbf{x}^{qs} \in \Omega_q, \quad s=1, \dots, 8. \quad (13)$$

Знайдені за формулою (13) значення тиску використовуємо у (10) для формування правої частини матриці СЛАР на наступних часових кроках.

Для обчислення інтегралів $A_v^Y(\mathbf{x}^w, \Delta\tau, U_\tau)$, $A_v^Y(\mathbf{x}^{qs}, \Delta\tau, U_\tau)$ використано апроксимацію функції $E_1(z)$ [7, 8].

Потім чисельно знайдемо інтеграли по граничних, приграничних та внутрішніх елементах, тобто відобразимо криволінійні граничні елементи на відрізки $[-1, +1]$, а приграничні та внутрішні елементи з криволінійними межами на квадрат зі стороною 2 [4, 6]:

$$A_v^\Gamma(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, U_\tau) = \int_{-1}^{+1} U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(\Gamma v)}) \left| J_1(\xi^{(\Gamma v)}, \zeta) \right| d\zeta, \quad (14)$$

$$A_v^G(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, U_\tau) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(Gv)}) \left| J_2(\xi^{(Gv)}, \boldsymbol{\eta}) \right| d\eta_1 d\eta_2, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega_{pq}} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, 0) p_0^{(K)}(\xi) d\Omega_{pq}(\xi) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(q)}, 0) \left| J_2(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) \right| \sum_{s=1}^8 \beta_s(\boldsymbol{\eta}) p_0^{Kqs} d\eta_1 d\eta_2. \quad (16)$$

Тут $\left| J_1(\xi^{(\Gamma v)}, \zeta) \right| = \sqrt{\left(\frac{d\xi_1^{(\Gamma v)}}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{d\xi_2^{(\Gamma v)}}{d\zeta} \right)^2}$; $\xi_i^{(\Gamma v)}(\zeta) = \sum_{s=1}^3 \phi_s(\zeta) \xi_i^{(\Gamma vs)}$, $\xi^{(\Gamma vs)} = (\xi_1^{(\Gamma vs)}, \xi_2^{(\Gamma vs)})$ –

координати s -го ($s = 1, 2, 3$) вузла v -го граничного елемента; $\phi_1(\zeta) = 0.5\zeta(\zeta - 1)$, $\phi_2(\zeta) = 0.5\zeta(1 + \zeta)$,

$$\phi_3(\zeta) = (1 - \zeta)(1 + \zeta); \quad J_2(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \xi_1^{(q)}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \xi_2^{(q)}}{\partial \eta_2} - \frac{\partial \xi_2^{(q)}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \xi_1^{(q)}}{\partial \eta_2}; \quad \xi_i^{(Gv)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^8 \beta_s(\boldsymbol{\eta}) \xi_i^{(Gvs)},$$

$\xi^{(Gvs)} = (\xi_1^{(Gvs)}, \xi_2^{(Gvs)})$ – координати s -го ($s = 1, \dots, 8$) вузла v -го приграничного елемента;

$$\xi_i^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{s=1}^8 \beta_s(\boldsymbol{\eta}) \xi_i^{(qs)}, \quad \xi^{(qs)} = (\xi_1^{(qs)}, \xi_2^{(qs)})$$
 – координати s -го ($s = 1, \dots, 8$) вузла q -го ($q = 1, \dots, Q + Q_0$)

внутрішнього елемента дискретизації; $p_0^{Kqs} = p_0^K(\xi^{(qs)})$; $\beta_1(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(-\eta_1 - \eta_2 - 1)$,

$$\beta_2(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_2 - 1), \quad \beta_3(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)(\eta_1 + \eta_2 - 1),$$

$$\beta_4(\boldsymbol{\eta}) = 0.25(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)(-\eta_1 + \eta_2 - 1), \quad \beta_5(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2), \quad \beta_6(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1 - \eta_2^2)(1 + \eta_1),$$

$$\beta_7(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1 - \eta_1^2)(1 + \eta_2), \quad \beta_8(\boldsymbol{\eta}) = 0.5(1 - \eta_2^2)(1 - \eta_1).$$

Як бачимо, використання НМПГЕ дає змогу досягнути уніфікації програмного забезпечення, оскільки під час інтегрування і по приграничних, і по внутрішніх елементах (в обох випадках – по криволінійних чотирикутниках) використовуємо однакові якобіани переходу до нових змінних та інтерполяційні функції. Водночас під час використання НМГЕ для інтегрування по граничних (криволінійних відрізках) та внутрішніх (криволінійних чотирикутниках) елементах використовуємо різні якобіани переходу та різні інтерполяційні функції.

На останньому етапі до отриманих інтегралів (14)–(16) застосуємо формули чисельного інтегрування Гаусса:

$$\int_{-1}^{+1} f_1(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^n w_i f_1(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \zeta_i), \quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f_2(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f_2(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_{1i}, \eta_{2j})$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f_3(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f_3(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_{1i}, \eta_{2j}),$$

де $f_1(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \zeta) = U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(\Gamma v)}) \left| J_1(\xi^{(\Gamma v)}, \zeta) \right|$; $f_2(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_1, \eta_2) = U_\tau(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(Gv)}) \left| J_2(\xi^{(Gv)}, \boldsymbol{\eta}) \right|$;

$f_3(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \eta_1, \eta_2) = |U(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi^{(q)}, 0) | J_2(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta}) \sum_{s=1}^8 \beta_s(\boldsymbol{\eta}) p_0^{Kqs}$; n – загальна кількість точок інтегрування;

$\zeta_i, (\eta_{1i}, \eta_{2j})$ – координати точки інтегрування; w_i, w_j – відповідні вагові множники; при $n=4$ вони мають вигляд: $\zeta_1 = \eta_{m1} = -0.86114$; $\zeta_2 = \eta_{m2} = -0.33998$; $\zeta_3 = \eta_{m3} = 0.33998$; $\zeta_4 = \eta_{m4} = 0.86114$ ($m=1,2$); $w_1 = w_4 = 0.34785$; $w_2 = w_3 = 0.65215$.

Чисельні дослідження

Чисельні дослідження проведено для області Ω , вибраної у вигляді еліпса з півосями $a=200$ м, $b=150$ м, центри свердловин радіусами $R=0.1$ м мали координати: $(x_1^{(l)}, 0)$, $l=1,2,3$, $x_1^{(1)} = 0$, $x_1^{(2)} = 150$, $x_1^{(3)} = -150$.

Зовнішню межу рівномірно розбивали на 16 граничних елементів, а контур кожної свердловини – на 2, на кожному з них будували по приграничному елементу товщиною 10 (для зовнішнього контуру) та 0.01 (для свердловин), тобто СЛАР (11), (12) складалась з 18 (у разі однієї свердловини) або 22 (у разі трьох свердловин) рівнянь. Область продовженої початкової умови Ω_0 вибирали багатозв'язною $\Omega_0 = \Omega_{z0} \cup_{l=1}^L \Omega_{l0}$ товщиною 10 на зовнішній межі та товщиною 0.01 на контурі свердловин. Кількість внутрішніх елементів, на які дискретизували області Ω та Ω_{z0}, Ω_{l0} дорівнювала відповідно 32 та 16, 2 (зрозуміло, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці, оскільки інтеграл від початкової умови входить у праву частину вказаної СЛАР).

Часовий інтервал $\mathbf{T} = \{\tau: 0 < \tau < 8460000\}$ с (10 днів) рівномірно розбивали на 10 проміжків, крок по часу вибирали постійним $\Delta\tau = 84600$ с. На зовнішньому контурі тиск був постійним $p_z(\mathbf{x}, \tau) = P_z = 20 \cdot 10^6$ Па, а на межах свердловин спадав з часом $p_l(\mathbf{x}, \tau) = P_l(\tau) = (P_{0l} - 0.1k(\Delta\tau) \cdot 10^6) / 84600$ Па, початковий розподіл тиску у пласті з урахуванням узгодженості початкової та граничних умов моделювали у вигляді функції

$$p_0(\mathbf{x}) = P_z - \frac{(P_z - P_1(\tau))(r - r_{el})}{(R - r_{el})}, \quad (17)$$

де r, r_{el} – відстані в полярних координатах до точки \mathbf{x} та до відповідної їй на зовнішній межі еліпса; $P_{01} = 16 \cdot 10^6$ Па; $P_{02} = P_{03} = 19 \cdot 10^6$ Па.

Оскільки похибки, що виникають під час застосування непрямих методів граничних та приграничних елементів, зумовлені тільки процедурами апроксимації, дискретизації та числового інтегрування, спочатку досліджували точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурах свердловин в різні моменти часу. Фізичні характеристики пласта вибирали такими [3]: $k = 1.108 \cdot 10^{-13}$ м³; $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $\beta^* = 3.67 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹. На рис. 1, 2 зображено абсолютну похибку задоволення граничних умов в момент часу $\Delta\tau = 84600$ с, внаслідок симетрії задачі результати подані на першій чверті зовнішньої межі та на половині кожної свердловини. Відзначимо, що у точках колокації похибка відсутня, найбільша спостерігається у разі наближення до кінців граничних елементів, при цьому результати, отримані за допомогою НМПГЕ, завжди мають вищу точність. У середині області похибки будуть меншими внаслідок виконання принципу максимуму. На рис. 3 подано отриманий непрямими методами граничних та приграничних елементів розподіл тиску в пласті з центральною свердловиною, а на рис. 4, 5 показано аналогічний розподіл з урахуванням впливу трьох свердловин, до того ж на рис. 4б, 5 чітко видно пониження тиску в областях розміщення свердловин.

Проведено дослідження впливу зміни коефіцієнта проникності, а також сумарного впливу зміни коефіцієнтів проникності, пружної ємності насиченого пласта та динамічного коефіцієнта в'язкості рідини на значення пластового тиску, частина з яких подана на рис. 6, 7. Фізичні характеристики пласта у першому випадку вибирали такими [3]: $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $\beta^* = 3.67 \cdot 10^{-10}$ Па для різних $k = 1.108 \cdot 10^{-13}$; $5 \cdot 10^{-13}$; $8 \cdot 10^{-14}$ м³, а в другому – такими:

$k=1.108 \cdot 10^{-13}$; $\mu=2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\beta^*=3.67 \cdot 10^{-10} \text{ Па}$; $k=5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^3$; $\mu=2.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$;
 $\beta^*=3.63 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; $k=8 \cdot 10^{-14} \text{ м}^3$; $\mu=1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\beta^*=4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$. Оскільки НМПГЕ давав вищу порівняно з НМГЕ точність, то результати на рис. 6, 7 отримано саме за цим методом.

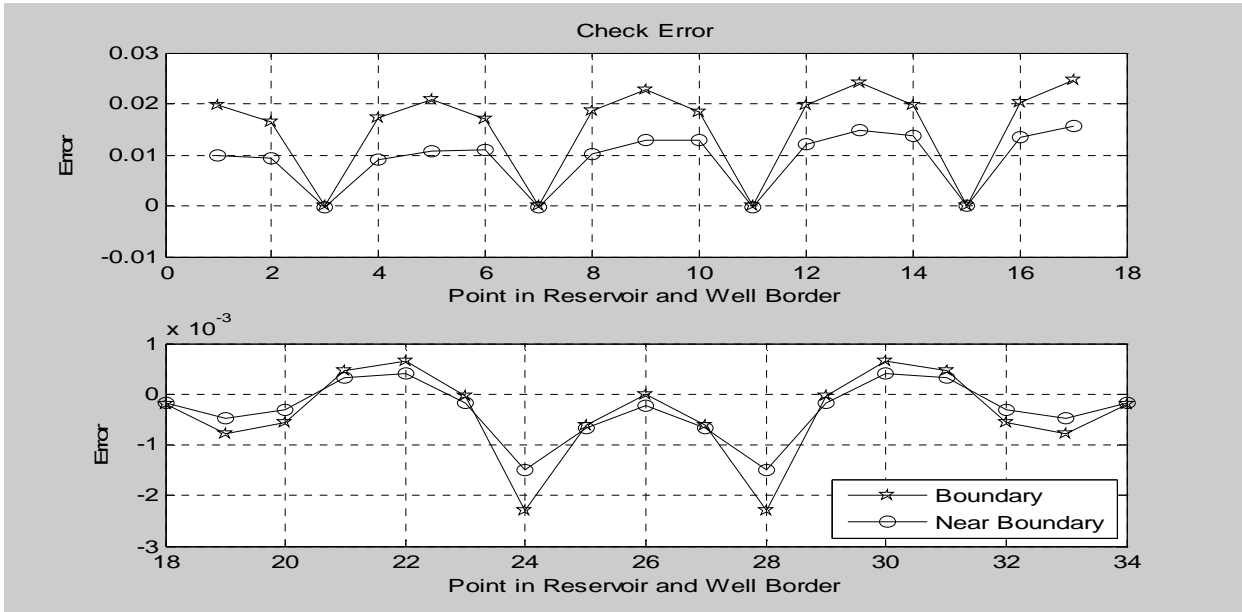


Рис. 1. Точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурі свердловини непрямыми методами граничних і приграничних елементів

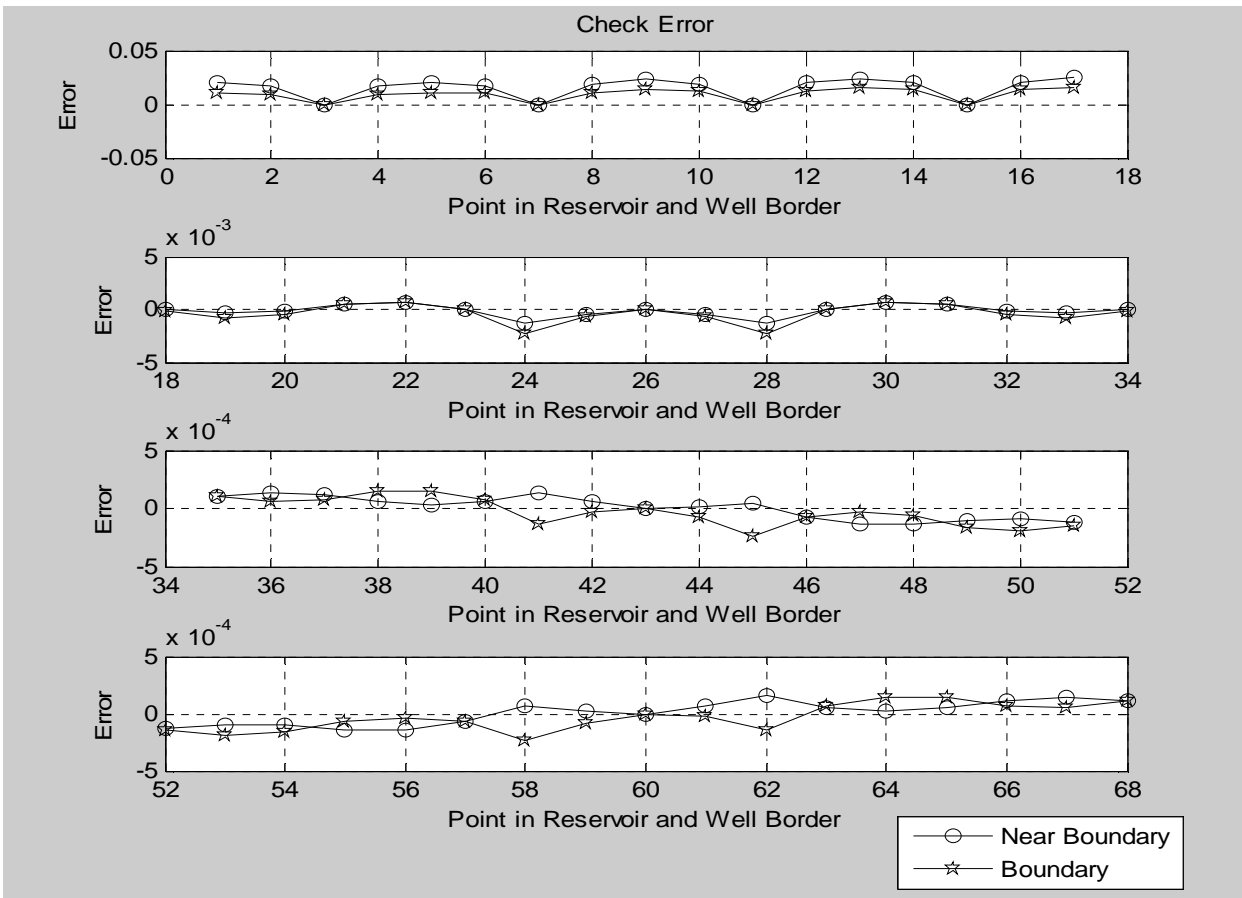
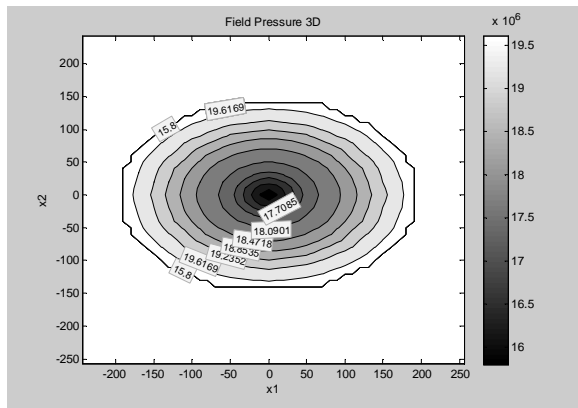
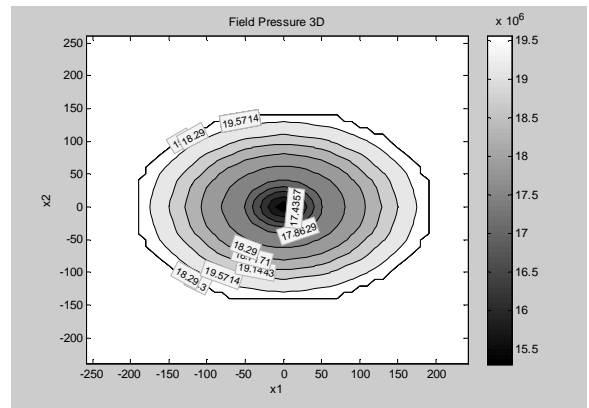


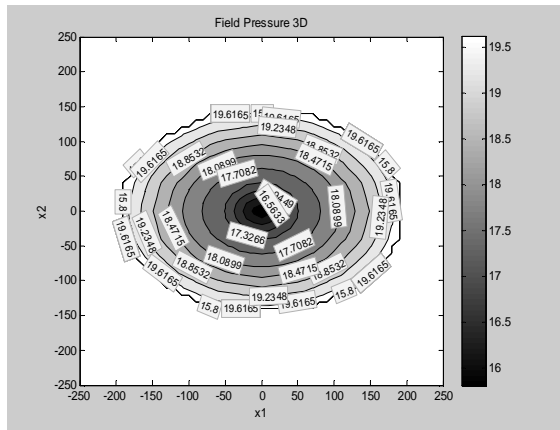
Рис. 2. Точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурі трьох свердловин непрямыми методами граничних і приграничних елементів



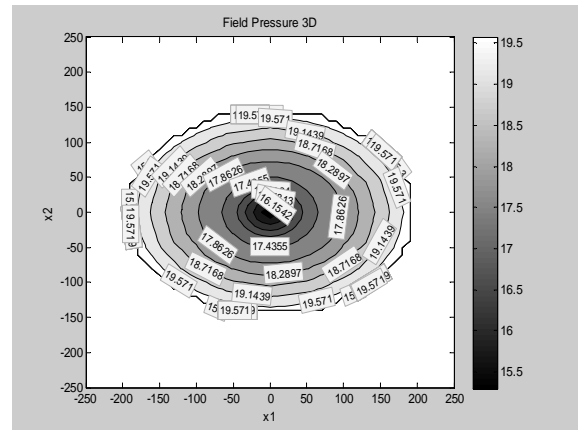
a



б

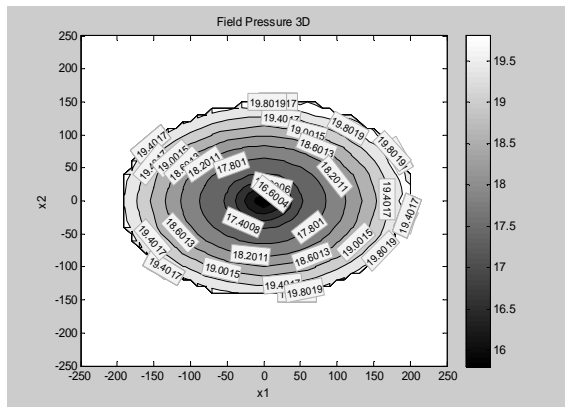


в

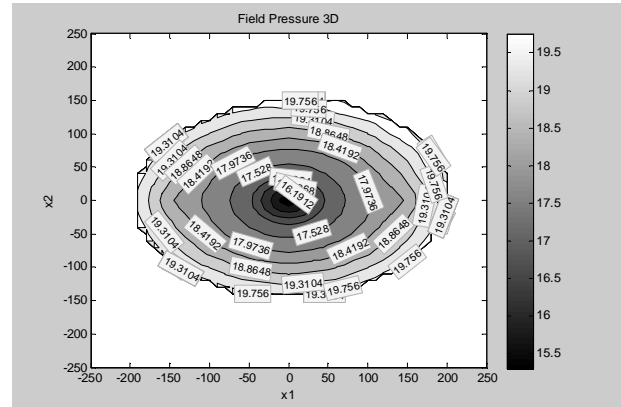


г

Рис. 3. Розподіл тиску в пласті з центральною свердловиною, отриманий непрямыми методами граничних (а, б) та приграничних елементів (в, г) у різні моменти часу: 2 дні (а, в), 7 днів (б, г)



a



б

Рис. 4. Розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами, отриманий непрямым методом приграничних елементів у різні моменти часу: 2 дні (а), 7 днів (б)

Як бачимо, зростання коефіцієнта проникності пласта спричиняє підвищення тиску у внутрішніх точках пласта. Врахування зміни коефіцієнта п'єзопровідності (другий випадок, при цьому $\kappa = 0.1509; 0.5509; 0.1599$) теж приводить до аналогічного висновку.

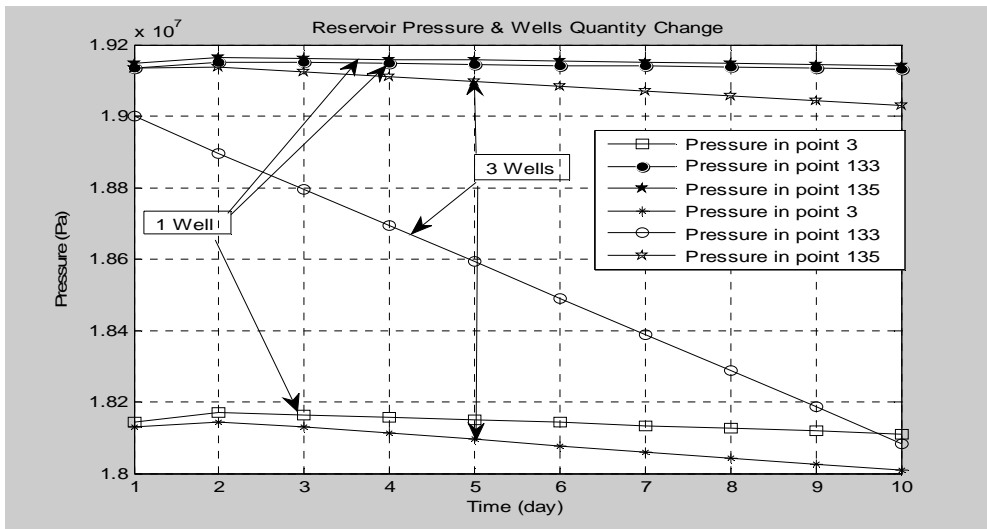


Рис.5. Залежність зміни тиску від кількості свердловин (1 і 3) у внутрішніх точках пласта ($x_1=92.43$, $x_2=28.72$ (точка 3); $x_1=138.60$, $x_2=43.06$ (точка 135); $x_1=150.025$, $x_2=0$ (точка 133)). Розподіл отриманий непрямим методом граничних елементів

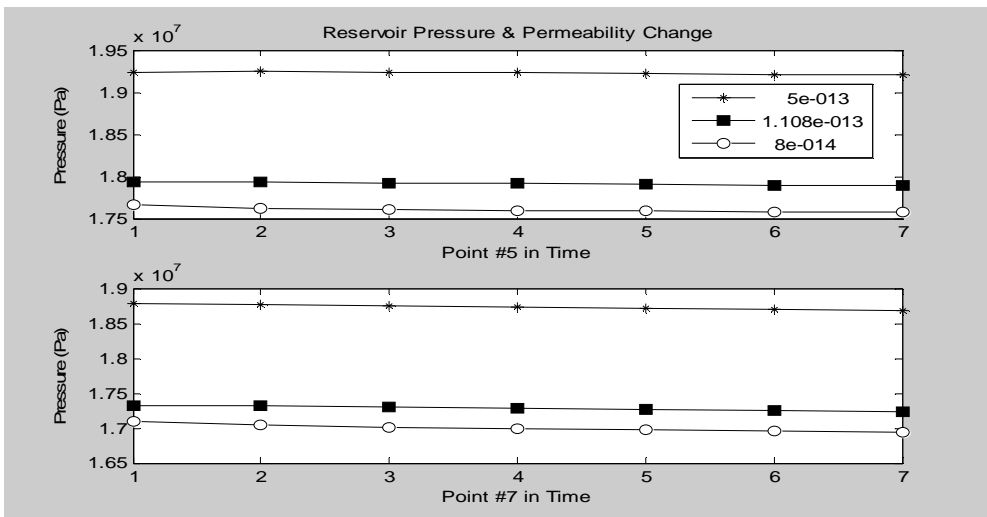


Рис. 6. Вплив зміни коефіцієнта проникності на тиск у внутрішніх точках пласта ($x_1=100.05$, $x_2=0$; $x_1=46.26$, $x_2=14.37$)

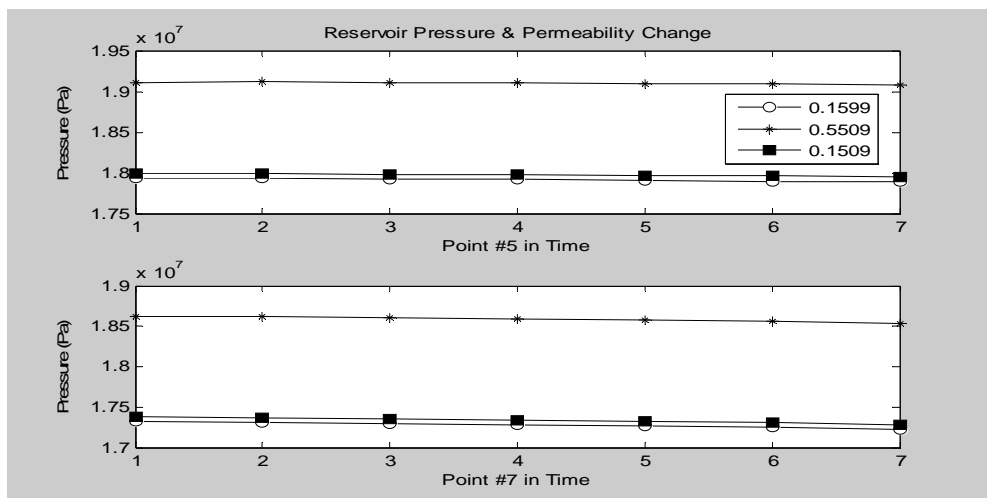


Рис. 7. Вплив коефіцієнта n' єзопровідності на тиск у внутрішніх точках пласта ($x_1=100.05$, $x_2=0$; $x_1=46.26$, $x_2=14.37$)

Висновки

Побудовано математичну модель зміни в часі тиску у двовимірному однорідному пласті з криволінійною межею з урахуванням депресії тисків, розміру та кількості свердловин. Під час знаходження розв'язку задачі порівняно непрямі методи граничних та приграничних елементів спільно з часовою схемою послідовності початкових умов, що дало змогу точно задовольнити рівняння в усій досліджуваній області та контролювати похибку задоволення граничних умов на її межах (внаслідок можливості вибору кількості граничних та приграничних елементів). Здійснено програмну реалізацію запропонованих чисельно-аналітичних підходів з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних та часових параметрів на розподіл тиску у пласті.

Чисельні експерименти показали, що непрямий метод приграничних елементів у поєднанні з покровою схемою «послідовності початкових умов» забезпечує вищу точність розрахунків розподілу пластового тиску порівняно з непрямим методом граничних елементів під час використання однакової кількості елементів та однакового ступеня апроксимації невідомих функцій «фіктивних» джерел. Це обґрунтовується тим, що пригранична область та область «продовженої початкової умови згладжують вплив введених у них джерел та функцій. Рекомендації щодо вибору товщин цих областей можуть бути такими: для модельних задач з відомими аналітичними розв'язками варто враховувати апостеріорні оцінки отриманих числових результатів, для інших – порівнювати результати обчислень шуканих функцій у певних ділянках границі із заданими на них граничними умовами.

Розроблена методика може бути легко розширена для врахування змішаних типів граничних умов, заданих на зовнішній межі та контурах свердловин, а також для розгляду середовищ із залежними від тиску фізичними параметрами, що і заплановано здійснити в подальших дослідженнях.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках.* – М.: Мир, 1984. – 494 с. 2. Бойко В.С. *Розробка та експлуатація нафтових родовищ.* – К.: Реал-Принт, 2004. – 695 с. 3. Бойко В.С., Бойко Р.В. *Підземна гідрогазомеханіка: Підручник.* – Львів: Априорі, 2007.- 452 с. 4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов.* – М.: Мир, 1987. – 524 с. 5. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971.– 512 с. 6. Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. *Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики.* – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996.– 220 с. 7. Журавчак Л.М., Струк А.Є. *Математичне моделювання зміни тиску у пласті з урахуванням дебіту свердловини та гідронепроникності зовнішньої криволінійної межі // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Сер. “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”, Львів, 2011. – № 710. – С. 143-150.* 8. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.* // Под ред. А.А. Абрамовица и И. Стиган: Пер.с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.