

# МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

УДК 517.958:622.276

Л. Журавчак, А. Струк  
Карпатське відділення Інституту геофізики  
ім. С. І. Субботіна НАН України

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТИСКУ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПЛАСТІ З УРАХУВАННЯМ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ МІЖ ЗОНАМИ

© Журавчак Л., Струк А., 2013

Обґрунтовано ефективність використання непрямого методу приграничних елементів для побудови чисельно-аналітичного розв'язку задачі про неусталений рух стисливої рідини в пружному пористому обмеженому кусково-однорідному пласті з урахуванням заданих дебіту або тиску на межі свердловин та гідронепроникності або тиску на зовнішній межі, а також ідеального контакту на межі поділу середовищ. З використанням фундаментального розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності та схеми послідовності початкових умов побудовано дискретно-континуальну модель задачі з довільними початковими умовами та різними типами граничних умов першого та другого роду. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінювання впливу параметрів моделі на зміну пластового та вибійного тисків.

**Ключові слова:** нестационарний процес зміни пластового тиску, непрямий метод приграничних елементів, кусково-однорідне середовище.

The efficiency of using the indirect boundary elements technique for the construction of the problem solution of unsettled motion of compressible fluid in porous, elastic, closed piecewise-homogeneous reservoir, including given well production or pressure on the border of the well and water isolation or pressure on its outer contour and also ideal contact at the media interface, was proved. Using the fundamental solution of the non-stationary thermal conductivity equation and sequence diagram of initial conditions the discrete-continual model of the problem with arbitrary initial conditions and boundary conditions of the first and the second kind, was constructed. Series of computational experiments were carried out to assess the influence of characteristics of environment on reservoir pressure and well pressure change.

**Key words:** non-stationary process of reservoir pressure change, indirect boundary element technique.

### Вступ

Математичне моделювання процесу розроблення нафтового родовища, змодельованого кусково-однорідним обмеженим пористим пластом, полягає у складанні й розв'язуванні системи диференціальних рівнянь у часткових похідних, яка його описує, доповненої початковими умовами (тими, що існували до початку розроблення), крайовими умовами (на поверхнях, які обмежують пласт ззовні і на стінках свердловини всередині пласта) та умовами контакту між зонами, що мають різні, але постійні фізичні характеристики. У допущенні, що товщина пласту та її зміна є доволі малими порівняно з його розмірами в горизонтальній площині вздовж осей  $x_1$  і  $x_2$ , вертикальною складовою швидкості руху можна знехтувати і розв'язувати двовимірні рівняння руху для дуже

протяжних пластів зі змінною товщиною  $h(x_1, x_2)$  [2, 3]. Основна поширена сьогодні модель однорідного за параметрами необмеженого пласта не завжди адекватно описує реальне середовище і процеси, що відбуваються в ньому під час розроблення нафтового родовища. Для оцінювання впливу зміни коефіцієнтів гідро- та п'єзопровідності різних зон необхідно розглядати модель кусково-однорідного обмеженого пласта.

### Математична модель для знаходження тиску у кусково-однорідному обмеженому пласті

Розглянемо кусково-однорідний за параметрами пласт, змодельований еліптичною областю  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{12}$  з півосями  $a, b$ , що містить центральну та дві інші свердловини, розміщені в  $\Omega_1$  поблизу зовнішнього контуру, радіусами  $R_c$ . Тут  $\Omega_1, \Omega_2$  – однорідні зони;  $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, R_c \leq x_2 \leq b\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, -b \leq x_2 \leq -R_c\}$  – межа поділу середовищ;  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – межі областей  $\Omega_1, \Omega_2$ . Ця модель реалізує гіпотезу про кускову однорідність пласта як за площею, так і за вертикальним розрізом покладу.

Для розрахунку зміни тиску в часі у кожній точці областей  $\Omega_m$  ( $m=1,2$ ) у випадку пружного режиму розв'яжемо систему диференціальних рівнянь, що описують неусталений (нестационарний) рух пружної (стисливої) рідини в пружному пористому середовищі, змодельованому двовимірним кусково-однорідним пластом  $\Omega$  з довільною криволінійною межею:

$$\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)) = \frac{\partial^2 p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\kappa_m} \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0, (\mathbf{x}, \tau) \in \Omega_m \times \mathbf{T}, m=1,2 \quad (1)$$

у допущенні, що треба визначити зміну пластового і вибійного тисків у замкненому покладі за умов ідеального контакту між зонами:

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), \quad -\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = -\varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (2)$$

таких граничних умов на зовнішньому контурі та на межах свердловин, розміщених у зонах

$$\Omega_m : p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = p_z^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{або} \quad -\varepsilon_m \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = 0, \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad m=1,2, \quad (3)$$

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = p_{cl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{або} \quad -\varepsilon_m \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = q_{zl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl}^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad l=1,2 \quad (4)$$

і початкових умов

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = p_0^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_m. \quad (5)$$

Тут  $p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  – тиск в області  $\Omega_m$ ;  $\varepsilon_m = k_m h / \mu_m$  – коефіцієнт гідропровідності породи в  $\Omega_m$ ;  $\kappa_m = k_m / (\mu_m \beta_m^*)$  – коефіцієнт п'єзопровідності;  $k_m$  – коефіцієнт проникності;  $\mu_m$  – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини;  $\beta_m^*$  – коефіцієнт пружної ємності насиченого пласта в області  $\Omega_m$ ;  $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ;  $\Gamma_{12} \cup \Gamma_z^{(m)} \cup_{l=1}^2 \Gamma_{cl}^{(m)} = \Gamma_m$ ;  $\Gamma_{cl}^{(1)} \cup \Gamma_{cl}^{(2)} = \Gamma_{cl}$  – контур центральної свердловини;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – декартові координати;  $\tau$  – час,  $\mathbf{T} = \{\tau : 0 < \tau < \infty\}$ ,  $h$  – товщина пласта;  $p_0^{(m)}(\mathbf{x})$  – початковий пластовий тиск у покладі;  $\mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x}) = (n_1^{(m)}(\mathbf{x}), n_2^{(m)}(\mathbf{x}))$  – однозначно визначена зовнішня нормаль до межі області  $\Omega_m$ ;  $q_{zl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{q_{cl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi R_c}$ ;  $q_{cl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  – дебіт  $l$ -ої свердловини.

**Побудова інтегральних зображень розв'язків початково-крайової задачі  
та граничних інтегральних рівнянь**

Згідно з основними положеннями непрямого методу приграничних елементів (НМПГЕ) [6] у зовнішніх приграничних до  $\Omega_m$  двозв'язних областях  $G_m = G_{mz} \cup G_{mcont} \cup_{l=1}^2 G_{mcl}$  введемо невідомі функції  $\varphi^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$ , які описують розподіл невідомих фіктивних джерел тиску. Тут  $G_{mz}, G_{1cont}, G_{2cont}, G_{mcl}$  – приграничні області завтовшки  $h_z, h_{12}, h_{21}, h_w$  відповідно. Після розширення області визначення функції  $p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  на всю площину  $\mathbf{R}^{2m}$ , рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)) = -\varphi^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)\chi_{G_m} - p_0^{(m)}(\mathbf{x})\delta(\tau), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{T}, \quad (6)$$

де  $\chi_{G_m}$  – характеристична функція області  $G_m$ , тобто  $\chi_{G_m} = 1$  при  $\mathbf{x} \in G_m$ ,  $\chi_{G_m} = 0$  при  $\mathbf{x} \notin G_m$ ,  $\delta(z)$  – дельта-функція Дірака.

Оскільки для оператора  $\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau))$  існує й відомий фундаментальний розв'язок  $U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)$  [5], то інтегральне зображення розв'язку рівняння (6) та його похідних за нормаллями з урахуванням початкового розподілу (5) мають вигляд

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{T}, \quad (7)$$

$$-\varepsilon_m \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_m \times \mathbf{T}, \quad (8)$$

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}) + b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (9)$$

де 
$$\mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_0^\tau \int_{G_m} \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \varphi^{(m)}(\xi, \xi_4) dG_m(\xi) d\xi_4, \quad \Phi \in \{U^{(m)}, Q^{(m)}, Q^{(1,2)}\}, \quad (10)$$

$$b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_{\Omega_{m0}} \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, 0) p_0^{(m)}(\xi) d\Omega_{m0}(\xi), \quad (11)$$

$$U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \frac{1}{4\pi\kappa_m(\tau - \xi_4)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa_m(\tau - \xi_4)}\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2, \quad \xi_4 \in T,$$

$$Q^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \varepsilon_m \sum_{i=1}^2 Q_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \mathbf{n}_i^{(m)}(\mathbf{x}), \quad r^2 = \sum_{i=1}^2 y_i^2, \quad y_i = x_i - \xi_i,$$

$$Q_i^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = -\frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)}{\partial x_i} = \frac{U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) y_i}{2\kappa_m(\tau - \xi_4)} = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa_m(\tau - \xi_4)}\right) y_i}{8\pi\kappa_m^2(\tau - \xi_4)^2},$$

$$Q^{(1,2)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \varepsilon_2 \sum_{i=1}^2 Q_i^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \mathbf{n}_i^{(1)}(\mathbf{x}),$$

$\Omega_{m0} = \Omega_m \cup \Omega_{mp}$ ,  $\Omega_{mp} = \Omega_{mpz} \cup G_{mpcont} \cup_{l=1}^2 \Omega_{mpcl}$  – двозв'язна область продовженої початкової умови [6, 7], в якій початковий тиск лінійно спадає від значення на межі  $\Gamma_m$  до нульового. Тут  $\Omega_{mpz}, \Omega_{1pcont}, \Omega_{2pcont}, \Omega_{mpcl}$  – області завтовшки  $h_{pz}, h_{p12}, h_{p21}, h_{pw}$  відповідно. Зауважимо, що  $\Omega_{mp}$  та  $G_m$  не повинні збігатися, хоч і можуть.

Спрямувавши в (7)-(9)  $x$  з середини областей  $\Omega_m$  до меж  $\Gamma_m$  для задоволення умов (2)–(4), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі  $\varphi_m(\xi, \xi_4)$  з відомими  $p_0^{(m)}(\xi)$  та заданими на контурі свердловин функціями:

$$\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)}) - \mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(2)}) = b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(2)}) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)}), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}) - \mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}) = b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}), \quad (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}) = p_z^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}) \quad \text{або} \quad \mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}) = -b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}),$$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}) = p_{cl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}) \quad \text{або} \quad \mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}) = q_{zl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}),$$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl}^{(m)} \times \mathbf{T}, \quad (15)$$

### Просторово-часова дискретизація математичної моделі

Оскільки виконати аналітичне інтегрування у рівняннях (12)–(15) для прикладних задач внаслідок довільності області  $\Omega$  практично неможливо, здійснимо просторово-часову дискретизацію за допомогою таких кроків. Межі  $\Gamma_m$  та області  $G_m$  дискретизуємо відповідно на  $V_m$  граничних  $\Gamma_{mv}$  та приграничних  $G_{mv}$  елементів, причому ділянки, що належать зовнішньому контуру, на  $V_{mz}$ , контур центральної свердловини – на  $V_c$ , двох інших – на  $V_{mc}$ , межу поділу середовищ – на  $V_{12}$ , граничні елементи між собою не перетинаються, тобто  $\bigcup_{v=1}^{V_m} \Gamma_{mv} = \Gamma_m$ ,  $\bigcup_{v=1}^{V_{mz}} \Gamma_{mv} = \Gamma_z^{(m)}$ ,  $\bigcup_{v=V_{mz}+1}^{V_{mz}+V_{12}} \Gamma_{mv} = \Gamma_{12}$ ,  $\bigcup_{v=V_{mz}+V_{12}+1}^{V_m} \Gamma_{mv} = \Gamma_{c1} \cup \Gamma_{c2}^{(m)}$ ,  $V_m = V_{mz} + V_{12} + V_c / 2 + V_{mc}$ ,  $\bigcup_{v=1}^{V_m} G_{mv} = G_m$ . Тоді невідомі функції, які описують розподіл фіктивних джерел тиску в межах приграничних елементів  $G_{mv}$ , позначимо через  $\phi_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$ . Области  $\Omega_m$  та  $\Omega_{mp}$  дискретизуємо на криволінійні елементи другого порядку з 8-ма вузлами [4]  $\Omega_{mq}$  ( $q = 1, \dots, Q_m$ ),  $\Omega_{mpq}$  ( $q = 1, \dots, Q_{mp}$ ).

Для зручності опису залежності функцій  $\phi_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  від часу часовий промінь  $\mathbf{T}$  розіб'ємо на однакові інтервали  $\mathbf{T}_t = ]\tau_{t-1}, \tau_t]$  ( $t = 1, 2, \dots, \tau_0 = 0$ ) і в межах кожного  $\mathbf{T}_t$  ці функції апроксимуємо постійними  $d_v^{mt}$ . Дискретно-континуальну модель побудуємо для покрокової часової схеми – схеми послідовності початкових умов (СППУ) [1, 6].

Кожний крок за часом  $\mathbf{T}_t$  розглянуто як нову задачу, тобто уведено локальний час  $\tilde{\tau} = \tau - (t-1)\Delta\tau$  ( $\Delta\tau$  – величина часового приросту на кожному кроці) і обчислені в кінці  $(t-1)$ -го часового інтервалу значення  $p^{(m)}(\mathbf{x}, (t-1)\Delta\tau)$  у внутрішніх точках використано як початкові для наступного  $t$ -го кроку.

Оператори  $\mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi^{(m)})$  (10) та  $b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi^{(m)})$  (11) після просторово-часової дискретизації для  $t$ -го кроку ( $(t-1)\Delta\tau < \tau \leq t\Delta\tau$ ,  $0 < \tilde{\tau} \leq \Delta\tau$ ) отримано у вигляді

$$\mathbf{F}^{mt}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau^{(m)}) = \sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau^{(m)}) d_v^{mt},$$

$$b^{mt}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi^{(m)}) = \sum_{q=1}^{Q_m+Q_{mp}} \int_{\Omega_{m0q}} \Phi^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, 0) p_0^{(mt)}(\xi) d\Omega_{m0q}(\xi), \quad (16)$$

де  $p_0^{(m1)}(\mathbf{x}) = p_0^{(m)}(\mathbf{x})$ ,  $p_0^{(mt)}(\mathbf{x}) = p^{(m)}(\mathbf{x}, (t-1)\Delta\tau)$ ,  $t > 1$ ,  $x \in \Omega_m$ , а в  $\Omega_{mp}$  лінійно спадає від значення на межі  $\Gamma_m$  до нульового;  $A_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_\tau^{(m)}) = \int_{G_{mv}} \Phi_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) dG_{mv}(\xi)$ ;

$$\Phi_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \int_0^{\tilde{\tau}} \Phi^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, \xi_4) d\xi_4; \quad U_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \frac{1}{4\kappa_m \pi} E_1(\beta_{2m}), \quad E_1(\beta) = \int_\beta^\infty \frac{\exp(-z)}{z} dz \quad \text{– інтегро-}$$

показникова функція;  $Q_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \varepsilon_m \sum_{i=1}^2 Q_{i\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) \mathbf{n}_i^{(m)}(\mathbf{x}); \quad \beta_{2m} = \frac{r^2}{4\kappa_m \tilde{\tau}} \quad ;$

$$Q_{i\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \frac{y_i}{2\kappa_m \pi r^2} \exp(-\beta_{2m}); \quad Q_\tau^{(1,2)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \varepsilon_2 \sum_{i=1}^2 Q_{i\tau}^{(2)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) \mathbf{n}_i^{(1)}(\mathbf{x}).$$

**Дискретно-континуальна модель для знаходження невідомих інтенсивностей джерел тиску, введених у приграничних елементах**

Для задоволення умов контакту (2) та граничних умов (3), (4) використано колокаційну методику. Точки колокації вибрано у кінцевий момент часу  $\Delta\tau$  у середині кожного граничного елемента  $\Gamma_{mw}$ ,  $w=1, \dots, V_m$ . З ГР (12)–(15) після просторово-часової дискретизації для  $t$ -го кроку одержимо СЛАР, що відповідають різним типам задання граничних умов.

Зокрема, у випадку **гідронепроникності зовнішнього контуру та відомого дебіту свердловин**, розміщених в зонах  $\Omega_m$ , маємо:

$$\sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, Q_\tau^{(m)})d_v^{mt} = -b^{mt}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, Q^{(m)}), \quad \mathbf{x}^{mw} \in \Gamma_{mw} \subset \Gamma_z^{(m)}, \quad w=1, \dots, V_{mz}, \quad (17)$$

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(x^{1w}, \Delta\tau, U_\tau^{(1)})d_v^{1t} - \sum_{v=1}^{V_2} A_v^{(2)}(x^{1w}, \Delta\tau, U_\tau^{(2)})d_v^{2t} = -b^{1t}(x^{1w}, \Delta\tau, U^{(1)}) + b^{2t}(x^{1w}, \Delta\tau, U^{(2)}), \quad x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}, \quad w = V_{1z} + 1, \dots, V_{1z} + V_{12}, \quad (18)$$

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(x^{1w}, \Delta\tau, Q_\tau^{(1)})d_v^{1t} - \sum_{v=1}^{V_2} A_v^{(2)}(x^{1w}, \Delta\tau, Q_\tau^{(1,2)})d_v^{2t} = -b^{1t}(x^{1w}, \Delta\tau, Q^{(1)}) + b^{2t}(x^{1w}, \Delta\tau, Q^{(1,2)}), \quad x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}, \quad w = V_{1z} + 1, \dots, V_{1z} + V_{12}, \quad (19)$$

$$\sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, Q_\tau^{(m)})d_v^{mt} = q_{l_z}^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, t\Delta\tau) - b^{mt}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, Q^{(m)}), \quad \mathbf{x}^{mw} \in \Gamma_{mw} \subset \Gamma_{cl}^{(m)}, \quad w = V_{mz} + V_{12} + 1, \dots, V_m, \quad (20)$$

Для **гідронепроникного зовнішнього контуру та відомого тиску на межах свердловин**, розміщених в зонах  $\Omega_m$ , маємо СЛАР, складену з рівнянь (17)–(19) та наступних:

$$\sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, U_\tau^{(m)})d_v^{mt} = p_{l_z}^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, t\Delta\tau) - b^{mt}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, U^{(m)}), \quad \mathbf{x}^{mw} \in \Gamma_{mw} \subset \Gamma_{cl}^{(m)}, \quad w = V_{mz} + V_{12} + 1, \dots, V_m, \quad (21)$$

У випадку задання **тиску на зовнішньому контурі та дебіту на межах свердловин**, розміщених в зонах  $\Omega_m$ , СЛАР складається з рівнянь (18)–(20) та наступних:

$$\sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, U_\tau^{(m)})d_v^{mt} = p_z^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, t\Delta\tau) - b^{mt}(\mathbf{x}^{mw}, \Delta\tau, U^{(m)}), \quad \mathbf{x}^{mw} \in \Gamma_{mw} \subset \Gamma_z^{(m)}, \quad w=1, \dots, V_{mz}. \quad (22)$$

Якщо відомі **тиски на зовнішній межі та на контурах свердловин**, то у СЛАР входять рівняння (18), (19) та (21), (22).

Зрозуміло, що для постійного кроку за часом матрицю систем (17)–(20); (17)–(19), (21); (18)–(20), (22) або (18), (19), (21), (22) обчислено один раз і збережено у пам'яті комп'ютера.

Знайшовши невідомі  $d_v^{mt}$ , використаємо формули, аналогічні (7)–(9) для обчислення шуканих тисків у вузлах, що описують внутрішні елементи  $\Omega_{mq} \in \Omega_m$ , в момент часу  $t\Delta\tau$ :

$$p^{(m)}(\mathbf{x}^{mqs}, t\Delta\tau) = \sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}^{mqs}, \Delta\tau, U_\tau^{(m)})d_v^{mt} + b^{mt}(\mathbf{x}^{mqs}, \Delta\tau, U^{(m)}), \quad \mathbf{x}^{mqs} \in \Omega_{mq}, \quad s=1, \dots, 8.$$

Ці значення використано в операторі (16) для формування правої частини СЛАР на наступному  $(t+1)$ -му часовому кроці.

### Чисельні дослідження

Чисельні дослідження проведено для області  $\Omega$ , вибраної у вигляді еліпса з півосями  $a=200\text{м}$ ,  $b=150\text{ м}$ , що містить на осі  $x_1$  три свердловини радіусами  $R_c=0.1\text{м}$  з координатами центрів:  $x_{1,2c}^{(1)} = -175, x_{1,2c}^{(2)} = 175, x_{2,2c}^{(m)} = 0$ , за допущення, що товщина пласта  $h=18\text{м}$ .

Зовнішню межу рівномірно розбивали на 16 граничних елементів (тобто на кожен  $\Gamma_z^{(m)}$  припадало по  $V_{mz}=8$  елементів), контур центральної свердловини – на  $V_c=4$ , двох інших на  $V_{mc}=2$ , межу контакту – на  $V_{12}=8$ . Товщини приграничних областей та областей продовжених початкових умов були такими:  $h_z = h_{pz} = 20$  (для зовнішнього контуру),  $h_w = h_{pw} = 0.05$  (для свердловин) та  $h_{12cont} = h_{21cont} = h_{p12cont} = h_{p21cont} = 20$  (для межі контакту), тобто СЛАР (17)-(20); (17)-(19), (21); (18)-(20), (22) або (18), (19), (21), (22) складалась з 36 (у випадку однієї свердловини) та 40 (у випадку трьох свердловин) рівнянь. Кількість внутрішніх елементів, на які дискретизували області  $\Omega_m$  та  $\Omega_{mpz}, \Omega_{mpcont}, \Omega_{mpcl}$ , дорівнювала відповідно 16, 8, 8, 2 (зрозуміло, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці, оскільки інтеграл від початкової умови входить у праву частину вказаних СЛАР).

Часовий інтервал  $\mathbf{T} = \{\tau : 0 < \tau < 864000\}$  с (10 діб) рівномірно розбивали на 40 проміжків з кроком  $\Delta\tau = 21600$  с (0.25 доби). На зовнішньому контурі тиск і на межі свердловин дебіт спадали з часом:

$$p_z^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = P_z(\tau) = P_{z0} - 0.001 \cdot \tau \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad q_{zl}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = Q^{(m)}(\tau) = \frac{Q_{cl} - 0.05\tau}{2\pi R_c \cdot 86400}; \quad P_{z0} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$Q_{c1} = 30 \text{ м}^3/\text{добу} = 0.347 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $Q_{c2} = Q_{c3} = 28 \text{ м}^3/\text{добу} = 0.324 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ . Початковий розподіл тиску у пласті вибирали постійним і рівним тиску на зовнішньому контурі:  $p_0^{(m)}(\mathbf{x}) = P_{z0}$ . Числові значення фізичних характеристик кусково-однорідного середовища подано в перших двох колонках табл. 1.

Таблиця 1

Фізичні характеристики кусково-однорідного пласта

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$ , криві з символами "o"	$\Omega_1$ , криві з символами "+"
$k_1 = 0.16 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$	$k_2 = 0.08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$	$k_1 = 0.12 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$	$k_1 = 0.04 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$
$\mu_1 = 0.707 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\mu_2 = 1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\mu_1 = 0.898 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$	$\mu_1 = 1.956 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$
$\beta_1^* = 7.07 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$	$\beta_2^* = 4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$	$\beta_1^* = 5.56 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$	$\beta_1^* = 2.55 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$
$\kappa_1 = 0.32 \text{ м}^2/\text{с}$	$\kappa_2 = 0.16 \text{ м}^2/\text{с}$	$\kappa_1 = 0.24 \text{ м}^2/\text{с}$	$\kappa_1 = 0.08 \text{ м}^2/\text{с}$

Оскільки похибки, що виникають під час застосування непрямого методу приграничних елементів, зумовлені лише процедурами апроксимації, дискретизації та числового інтегрування [8], спочатку досліджували точність задоволення граничних умов та умов ідеального контакту в різні моменти часу:

$$\delta p_{zm}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau) = \frac{p^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau) - P_z(l\Delta\tau)}{P_z(l\Delta\tau)}, \quad \mathbf{x}^{mw} \in \Gamma_{mw} \subset \Gamma_z^{(m)}, \quad (23)$$

$$\delta q_{zlm}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau) = \frac{-\varepsilon_m \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} - Q^{(m)}(l\Delta\tau)}{Q^{(m)}(l\Delta\tau)}, \quad \mathbf{x}^{mw} \in \Gamma_{mw} \subset \Gamma_{cl}^{(m)}, \quad (24)$$

$$\delta p_{12}(\mathbf{x}^{lw}, l\Delta\tau) = \frac{p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau) - p^{(2)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}, \quad \mathbf{x}^{lw} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}, \quad (25)$$

$$\delta q_{12}(\mathbf{x}^{lw}, l\Delta\tau) = \frac{\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} - \varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}}{\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}}, \quad \mathbf{x}^{lw} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}. \quad (26)$$

На рис. 1, 2 зображено відносні похибки задоволення граничних умов в момент часу  $\Delta\tau = 21600$  с на першій чверті зовнішнього контуру, на половині кожної свердловини та на межі контакту, обчислені відповідно за формулами (23)–(26).

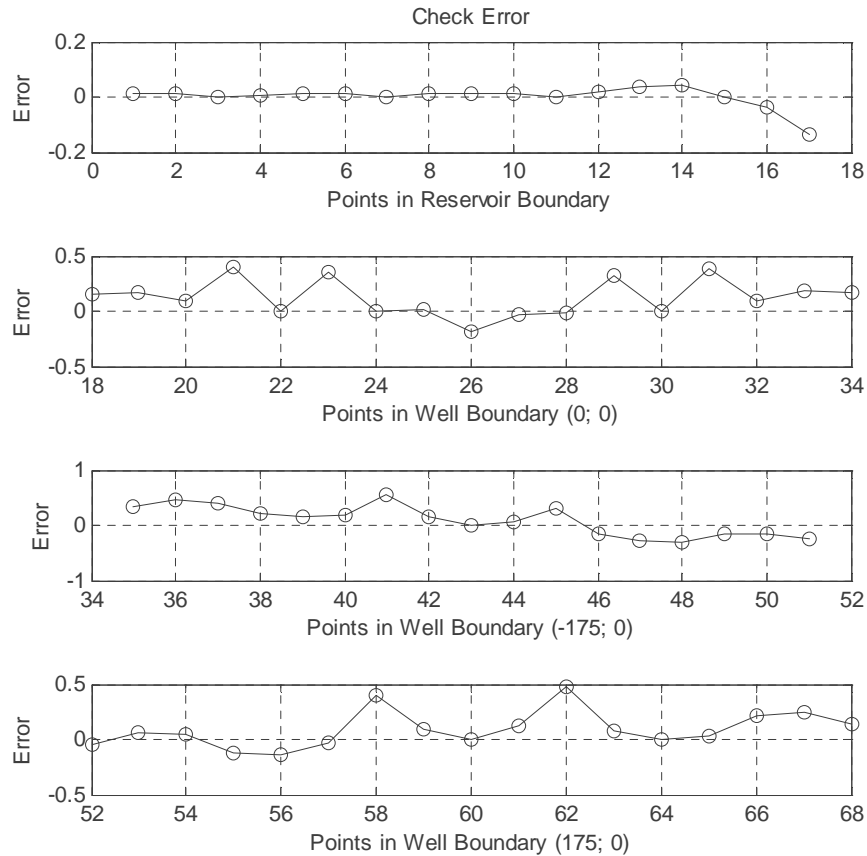


Рис. 1. Точність задоволення граничних умов на частині зовнішнього контуру та на половинях меж трьох свердловин непрямым методом приграничних елементів

Зазначимо, що у точках колокації похибка відсутня, найбільша спостерігається при наближенні до кінців граничних елементів та кінців межі контакту. У середині області похибки будуть меншими внаслідок виконання принципу максимуму. На рис. 3, 4 подано отриманий непрямым методом приграничних елементів розподіл тиску в пласті з трьома та однією свердловинами у різні моменти часу, при цьому на них чітко прослідковується межа поділу середовищ та місцезнаходження свердловин. Досліджено сумарний вплив зміни коефіцієнтів: проникності, пружної ємності насиченого пласта та динамічної в'язкості рідини середовища в  $\Omega_1$  (табл. 1) на значення пластового тиску, частину з яких подано на рис. 5, при цьому криві без символів відповідають характеристикам кусково-однорідного пласта (перші дві колонки з табл. 1). На рис. 6 для порівняння подано результати обчислень в однорідних пластах з коефіцієнтами, поданими в перших двох колонках табл. 1 (суцільні криві відповідають середовищу з характеристиками  $\Omega_1$ , штрихові –  $\Omega_2$ ).

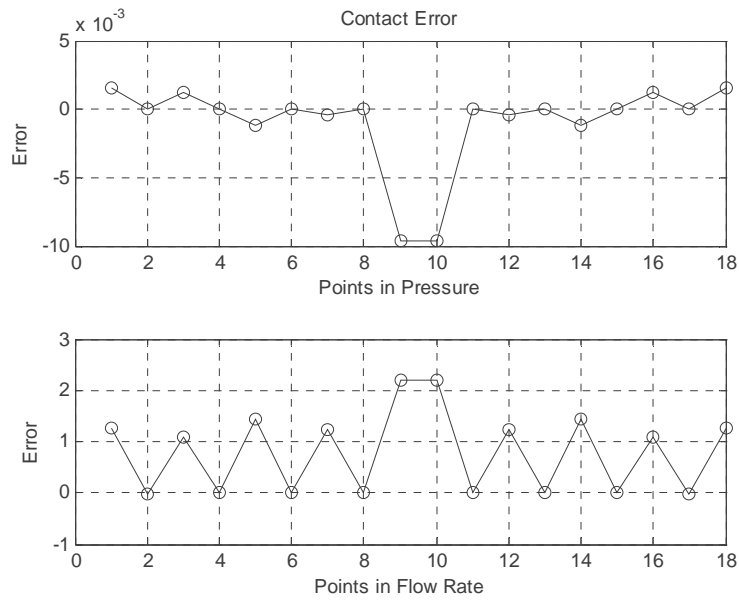


Рис. 2. Точність задоволення умов ідеального контакту на межі поділу середовищ непряним методом приграничних елементів

Як бачимо, зменшення коефіцієнта п'єзопровідності в  $\Omega_1$  веде до зменшення тиску в точках пласта, що належать  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  (рис. 5). Аналогічний висновок можна зробити і щодо однорідних середовищ (рис. 6), водночас із зменшенням коефіцієнта п'єзопровідності тиск в пласті спадає різкіше.

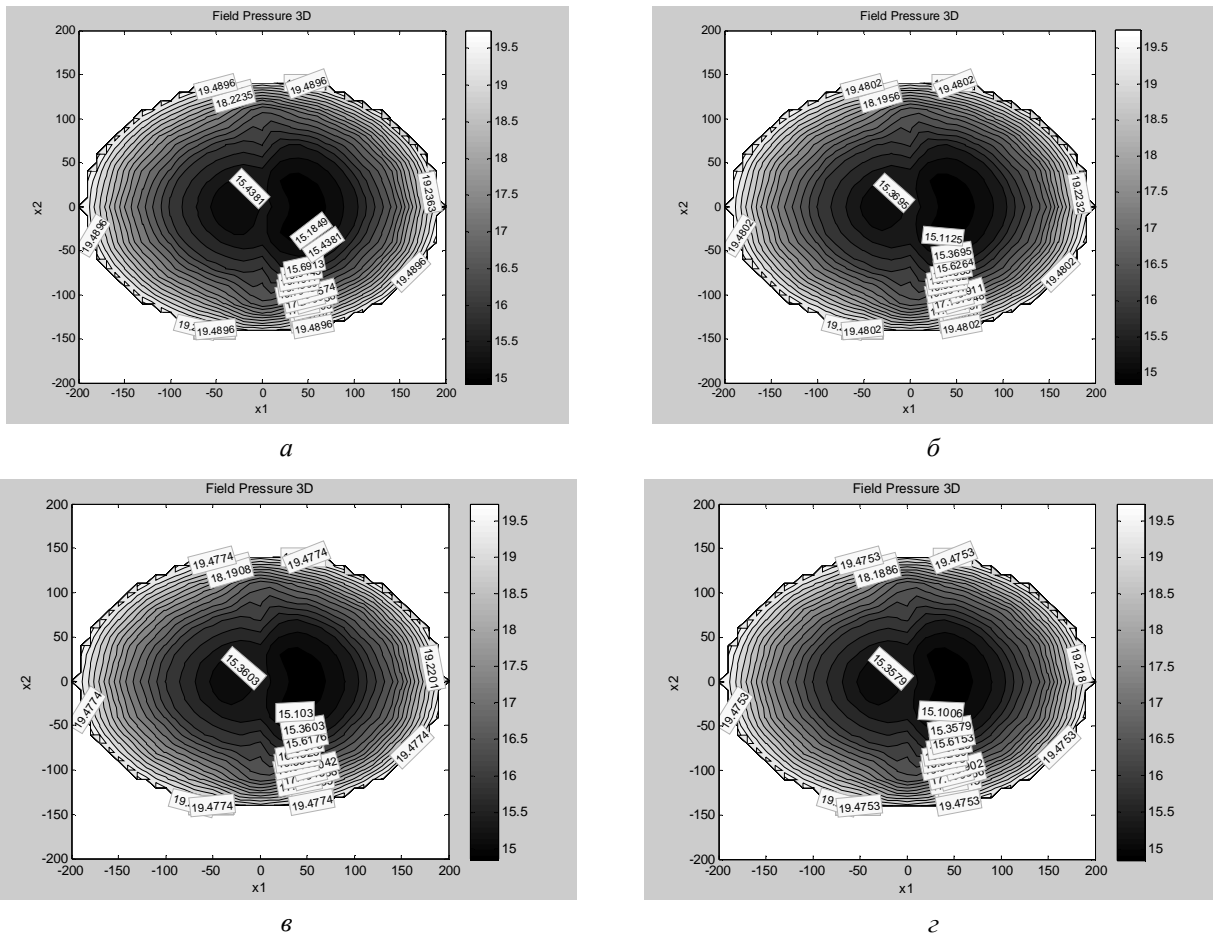
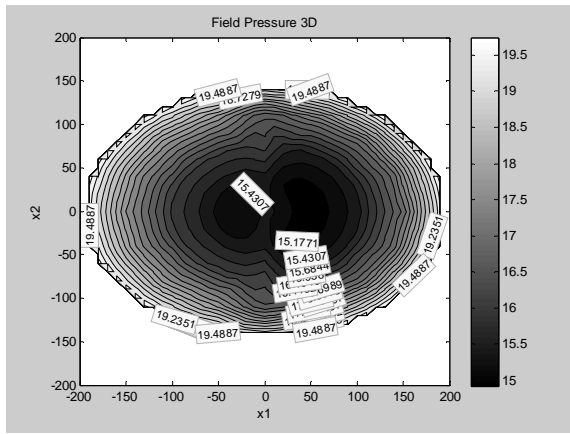
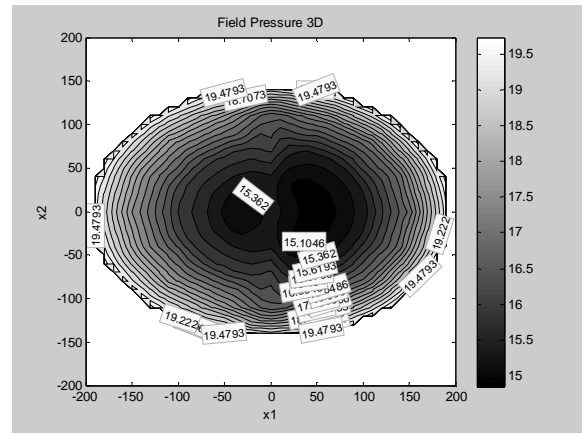


Рис. 3. Розподіл тиску в кусково-однорідному пласті з трьома свердловинами, отриманий непряним методом приграничних елементів у різні моменти часу: 1 доба (а), 1.5 доби (б), 2 доби (в), 2.5 доби (г)





а



б

Рис. 4. Розподіл тиску в кусково-однорідному пласті з центральною свердловиною, отриманий непрямим методом приграничних елементів у різні моменти часу: 1 доба (а), 1,5 доби (б)

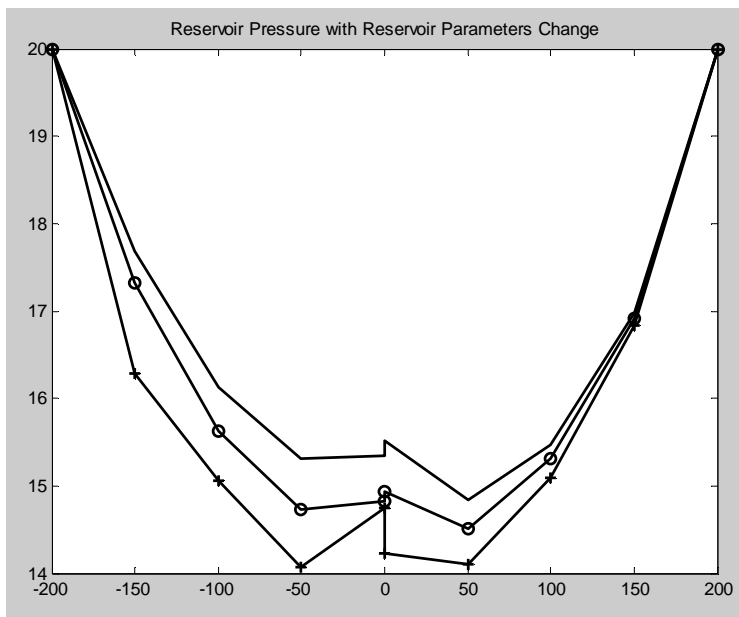


Рис. 5. Вплив коефіцієнта  $\mu'$  єзопровідності на тиск у внутрішніх точках кусково-однорідного пласта з центральною свердловиною, розміщених на лінії  $x_2=0$  у момент часу 2 доби ( $\Delta\tau = 21600$  с)

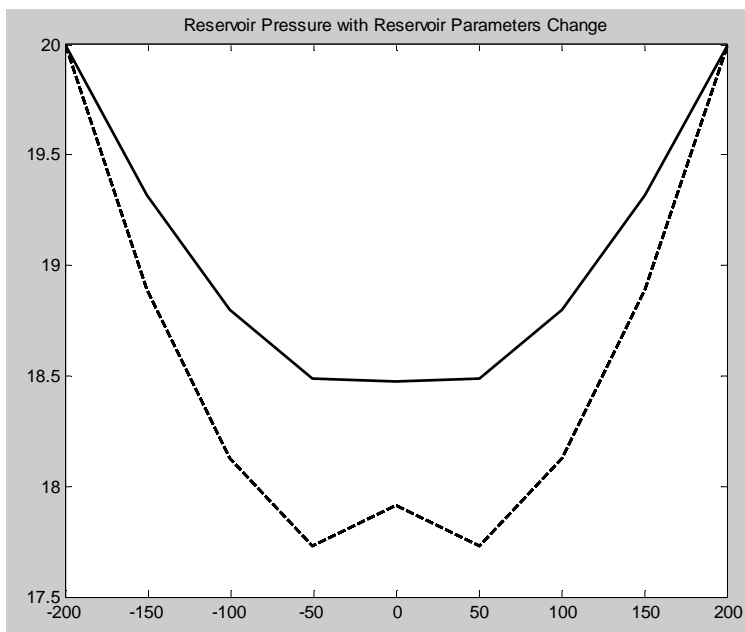


Рис. 6. Розподіл тиску у внутрішніх точках однорідного пласта, розміщених на лінії  $x_2=0$  у момент часу 2 доби ( $\Delta\tau = 86400$  с)

## Висновки

Побудовано наближену до реального середовища математичну модель зміни в часі тиску (двовимірний обмежений кусково-однорідний пласт з криволінійною межею) з урахуванням ідеального контакту на межі поділу середовищ (вертикальна площина  $x_1 = 0$ ), кількості свердловин та задання різних типів граничних умов (гідронепроникності зовнішнього контуру, депресії тисків та дебіту свердловин). Для розв'язання задачі використано непрямий метод приграничних елементів спільно з часовою схемою послідовності початкових умов, що дало змогу точно задовольнити рівняння в усій досліджуваній області та контролювати похибку задоволення граничних умов на її межах та на межі поділу середовищ (внаслідок можливості вибору кроку за часом, кількості приграничних елементів, товщин приграничних областей та областей продовжених початкових умов). Здійснено програмну реалізацію запропонованого чисельно-аналітичного підходу з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних та часових параметрів на розподіл тиску у пласті і дебіту свердловин, що дає можливість оцінити можливість інтенсифікації їх роботи.

Розроблена методика може бути розширена для врахування залежності фізичних характеристик від тиску, що ми і плануємо здійснити в наступних дослідженнях.

1. Бенерджи П., Баттерфілд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках.* – М.: Мир, 1984. – 494 с. 2. Бойко В.С. *Розробка та експлуатація нафтових родовищ.* – К.: „Реал-Принт”, 2004. – 695 с. 3. Бойко В.С., Бойко Р.В. *Підземна гідрогазомеханіка: Підручник.* – Львів: Априорі, 2007. – 452 с. 4. Бреббия К., Теллес Ж., Врорубел Л. *Методы граничных элементов.* – М.: Мир, 1987. – 524 с. 5. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 512с. 6. Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. *Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики.* – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с. 7. Журавчак Л.М., Струк А.Є. *Розв'язування задач неусталеної фільтрації пружної рідини в недеформівному пористому пласті методом приграничних елементів // Матеріали наукової конференції-семінару «Сейсмологічні та геофізичні дослідження в сейсмоактивних регіонах» (29–30 травня 2012 р.).* – Львів: «Сполом», 2012. – С. 45–49. 8. Журавчак Л.М., Струк А.Є. *Порівняння методів граничних та приграничних елементів при знаходженні неусталеного тиску у пружному пористому замкненому пласті // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”.* – 2012. – № 732. – С. 198–206.