УДК 517.95+534.1

П. Пукач
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра вищої математики

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ СЛАБКОЗВ’ЯЗАНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ З ВРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

Викладено методику якісного дослідження розв'язку математичної моделі коливань слабко зв'язаних коливальних систем на підставі загальних підходів теорії нелінійних крайових задач. Зазначена методика, що ґрунтується на застосуванні методу монотонності і методу Гальоркіна, дозволяє обґрунтувати коректність розв'язку моделі.

Ключові слова: математична модель, нелінійні коливання, нелінійна крайова задача, метод Гальоркіна, метод монотонності, необмежена область.

Methodology of quality research of the solution of mathematical model of weakly coupled oscillating systems on the basis of general approaches of nonlinear boundary value problems theory is given. The indicated methodology that is based on application of method of monotony and Galerkin method allows to substantiate correctness of model solution.

Keywords: mathematical model, nonlinear vibrations, nonlinear boundary value problem, Galerkin method, method of monotony, unbounded domain.

Актуальність проблеми та огляд основних результатів

Нелінійна проблематика у дослідженні динамічних характеристик розв’язків математичних моделей зв’язаних коливальних систем є актуальною протягом останніх 50 років. Для консервативних систем з декількома ступенями вільності достатньо повно проблему опису нелінійних коливань у резонансному та нерезонансному випадках розглянуто у роботах [1–3]. Аналогічні дослідження для неконсервативних систем висвітлено в роботі [4] (див. також наведену там бібліографію). Водночас проблеми коректності розв'язків математичних моделей зв'язаних нелінійних коливальних систем з розподіленими параметрами вивчені недостатньо повно. Ця стаття присвячена якісному вивченню математичної моделі коливань, яка описується крайовою задачею для системи нелінійних рівнянь у необмеженій області. Припускається, що нелінійність викликана силами опору в системі. Крім того, модель розглядається в необмеженій за просторовою змінною області. Подібні задачі виникають у різноманітних технічних застосуваннях, наприклад, коливаннях трубопроводів на нелінійній основі, залізничних колій, довгих мостів, туго натягнутих електричних ліній, оптичних волокон, вбудованих у нелінійно пружні тіла тощо [5–8]. Необмеженість області створює додаткові принципові проблеми при дослідженні моделі. У цій праці досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійної гіперболічної системи другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right)+B_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+C(x,t)u+G(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}=F(x,t)\,,\ p>2 \quad (1)$$

в необмеженій за просторовими змінними області. Система (1) моделює коливні процеси у конвеєрних лініях стрічкового (канатного) типу для випадку рухомої стрічки [9]. Рівняння та системи вигляду (1) вивчають у теорії пружності (див. [10–12]). Зокрема, в [10] досліджено асимптотичну поведінку розв'язку мішаної задачі для лінійної системи $u_{tt}-\mu\Delta u-(\lambda-\mu)\nabla div(u)+q(x,t)u=0$, де $x\in\mathbf{R}^3$,

$t \in \mathbf{R}$, λ, μ – коефіцієнти Ляме, а функція $q:\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ моделює наявність так званих проміжних домішок. Вивчено питання існування та розповсюдження резонансу залежно від властивостей функції q. Для випадку однієї коливальної системи якісні дослідження коректності розв'язку абстрактної математичної моделі проведено в [13, 14].

Формулювання задачі

В області $Q_T = (0,+\infty)\times(0,T)$, $0<T<\infty$ розглядаємо для системи (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u(x,0)=\varphi_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x) \tag{3}$$

та крайовою умовою

$$u(x,0)=0. \tag{4}$$

Позначатимемо далі S – бічна поверхня області Q_T. У системі (1) квадратні матриці A, B, B_1 та матриця C є дійснозначними і мають порядок $m \in \mathbf{N}$, $u = col(u_1,...,u_m)$, $G = col(G_1,...,G_m)$, $F = col(F_1,...,F_m)$, $\varphi_0 = col(\varphi_{01},...,\varphi_{0m})$, $\varphi_1 = col(\varphi_{11},...,\varphi_{1m})$.

Позначимо $Q_\tau = (0,+\infty)\times(0,\tau)$, $Q_\tau^R = (0,R)\times(0,\tau)$ для довільних $\tau \in [0,T]$, $R>1$. У цій роботі використовуємо такі функціональні простори:

$$H_0^1(0,R) = \left\{v \in H^1(0,R) : v\big|_{x=0} = 0\right\},\ H_{0,loc}^1(0,+\infty) = \left\{v : v \in H_0^1(0,R)\quad для\quad довільного\quad R>1\right\},$$

$$L_{loc}^r(0,R) = \left\{v : v \in L^r(0,R)\ для\ довільного\ R>1\right\},\quad r \in (1,+\infty).$$

Всюди надалі через V' позначено простір, спряжений до простору V, $\|D\|$ – евклідову норму матриці.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини системи (1) та початкових даних припускатимемо виконання таких умов.

(A) $\underset{x\in(0,R)}{esssup}\|A(x)\| \le a_1 R^\alpha$ для довільного $R>1$, $a_1>0$, $0 \le \alpha < 1-\dfrac{(p-2)}{2p}$, для довільного вектора $\xi_l = (\xi_1,...,\xi_m) \in \mathbf{R}^m$ та для майже всіх $x \in (0,+\infty)$ виконується умова $\left(A(x)\xi,\xi\right) \ge a_0|\xi|^2$, $a_0>0$.

(B) $\underset{x\in(0,R)}{esssup}\|B(x)\| \le b_1\ R^\alpha$ для довільного $R>1$; елементи $\dfrac{\partial b^{kl}}{\partial x}$ матриці B належать до простору $L^\infty(Q_T)$ $k,l=1,...,m$.

(B_1) Елементи b_1^{kl} матриці B_1 належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для довільних $k,l=1,...,m$.

(C) Елементи c^{kl} ($k,l=1,...,m$) матриці C належать до простору $L^\infty(Q_T)$, елементи $\dfrac{\partial c^{kl}}{\partial t}$ ($k,l=1,...,m$) матриці $\dfrac{\partial C}{\partial t}$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, причому $C(x,t) \ge c_1$, $c_1 \ge 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$.

(G) Для функцій $G_i(x,t)$ ($i=1,...,m$) та для майже всіх $(x,t) \in (0,+\infty)\times(0,T)$ виконуються умови: $G_i(x,t) \ge g_0$, $g_0 = const > 0$, $|G_i(x,t)| \le g_1$, $g_1 = const > 0$.

(F) $F_i \in L^q\big((0,T);L^q_{loc}(0,\infty)\big)$, ($i=1,...,m$), $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

(U) $\varphi_{0i} \in H^1_{0,loc}(0,+\infty)$, $\varphi_{1i} \in L^2_{loc}(0,+\infty)$, ($i=1,...,m$).

Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) називаємо функцію $u = col(u_1,...,u_m)$ таку, що $u_i \in C([0,T];H^1_{0,loc}(0,+\infty))$, $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} \in C\Big([0,T];\big(H^1_{0,loc}(0,+\infty)\cap L^p_{loc}(0,+\infty)\big)'\Big)\cap L^p((0,T);L^p_{loc}(0,+\infty))$, $i=1,...,m$, яка задовольняє умови (2), (4) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_\tau}\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dxdt+$$

$$+\int_{Q_\tau}\left[\left(B_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x},v\right)+\big(C(x,t)u,v\big)+\left(G(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t},v\right)-(F,v)\right]dxdt+$$

$$+\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau),v(x,\tau)\right)dx-\int_0^{+\infty}\big(\varphi_1(x),v(x,0)\big)dx=0 \tag{5}$$

для довільного $\tau\in(0,T]$ і для довільної функції $v = col(v_1,...,v_m)$ з компактним носієм такої, що $v_i \in L^2((0,T);H^1_{0,loc}(0,+\infty))\cap L^p((0,T);L^p_{loc}(0,+\infty))$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial t}\in L^2((0,T);L^2_{loc}(0,+\infty))$, $i=1,...,m$.

Основний результат роботи: при виконанні умов (A), (B), (B_1), (C), (G), (F), (U) існує єдиний узагальнений розв'язок $u = col(u_1,...,u_m)$ задачі (1)–(4) в області Q_T.

Схема отримання результату

Спершу необхідно дослідити класи коректності задачі (1)–(4) в обмеженій області. При цьому використовуємо метод Гальоркіна. Далі подібно до того, як це зроблено в [13], можна отримати наступний допоміжний результат. Нехай виконуються умови (A), (B), (B_1), (C), (G), (F), (U) і $u = col(u_1,...,u_m)$ та $u^{(0)} = col(u^{(0)}_1,...,u^{(0)}_m)$ – узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) з правими частинами F і F^0 відповідно. Тоді для довільних τ, R, R_0 таких, що $1<R_0<R$, $\tau\in(0,T]$, правильна оцінка:

$$\int_0^{R_0}\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial x}\right)^2dx+\int_{Q^{R_0}_\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}\right|^p dxdt\le$$

$$\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\beta}\left(C_1R^{1+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}}+C_2\int_{Q^R_\tau}\left|F-F^0\right|^q dxdt\right), \tag{6}$$

де $\beta>\dfrac{2p}{p-2}$, C_1, C_2 – додатні сталі, що залежать лише від p, β.

Далі доводимо коректність розв’язку математичної моделі у необмеженій області.

Існування. Розглянемо послідовність натуральних чисел $k=2,3,...$ та позначимо $F^{(k)}(x,t)=\begin{cases}F(x,t),\ x\le k,\\ 0,\ x>k,\end{cases}$ де $\varphi^{(k)}_0(x)=u_0(x)\zeta_k(x)$, $\zeta_k\in C^1(-\infty,+\infty)$, $0\le\zeta_k(x)\le 1$, $\zeta_k(x)=1$

при $x \le k-1$, $\zeta_k(x)=0$ при $x \ge k$, $\varphi_1^{(k)}(x)=\varphi_1(x)$ при $x \le k$, $\varphi_1^{(k)}(x)=0$ при $x > k$. Розглянемо в області $(0,k)\times(0,T)$, $k=2,3,...$ наступну задачу:

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(B(x,t)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}\right)+B_1(x,t)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}+C(x,t)u^{(k)}+$$

$$+G(x,t)\left|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}=F^{(k)}(x,t), \tag{7}$$

$$u^{(k)}(x,0)=\varphi_0^{(k)}(x), \tag{8}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}(x,0)=\varphi_1^{(k)}(x), \tag{9}$$

$$u^{(k)}(0,t)=u^{(k)}(k,t)=0. \tag{10}$$

Можна показати існування єдиного узагальненого розв'язку $u^{(k)}$ задачі (7)–(10) в $(0,k)\times(0,T)$. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (7)–(10) для $k=2$, $k=3,...$, довизначивши $u^{(k)}$ нулем на $Q_T \setminus (0,k)\times(0,T)$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q_T, яку для зручності нову позначимо $\{u^{(k)}\}$. Покажемо, що послідовність $\{u_i^{(k)}\}$ є фундаментальною у просторі $C([0,T];H^1_{0,loc}(0,+\infty))$, а послідовність $\left\{\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}\right\}$ – фундаментальна у $C\left([0,T];\left(H^1_{0,loc}(0,+\infty)\cap L^p_{loc}(0,+\infty)\right)'\right)\cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}(0,+\infty)\right), i=1,2,...,m$. В області $(0,R)\times(0,\tau)$ розглянемо різницю $u^{(l)}-u^{(m)}$, $l,m\in\mathbf{N}$, $R>R_0$ та використаємо оцінку (3), аналогічно до якої отримаємо

$$\int_0^{R_0}\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]dx+\int_{Q_\tau^{R_0}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}\right|^p dxdt\le$$

$$\le C_3\frac{R^{\beta+1+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}}}{(R-R_0)^\beta}+\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta\times$$

$$\times\left(C_4\sum_{i=1}^m\left\|F_i^{(l)}-F_i^{(m)}\right\|^{p'}_{L^{p'}(0,T);L^{p'}(0,+\infty)}+C_5\sum_{i=1}^m\left\|\varphi_{1i}^{(l)}-\varphi_{1i}^{(m)}\right\|^2_{L^2(0,+\infty)}\right)+$$

$$+C_6(R)\sum_{i=1}^m\left\|\varphi_{0i}^{(l)}-\varphi_{0i}^{(m)}\right\|^2_{H_0^1(0,+\infty)},\quad \tau\in[0,T],$$

де сталі C_3-C_6 не залежать від R. Нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Оскільки $\lim\limits_{R\to+\infty}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta=1$ і за умов теореми $\lim\limits_{R\to+\infty}R^{1+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}}=0$, то існує таке $R_1>R_0$, що $C_3\left(\frac{R_1}{R_1-R_0}\right)^\beta R_1^{1+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}}<\frac{\varepsilon}{4}$. Враховуючи збіжності послідовностей $\{f^{(k)}\}$, $\{\varphi_0^{(k)}\}$ і $\{\varphi_1^{(k)}\}$, можемо вибрати таке $k_0\in N$, $k_0>[R_1]+1$, що для всіх $l,m>k_0$ правильні оцінки

$$C_4\sum_{i=1}^{m}\left\|F_i^{(l)}-F_i^{(m)}\right\|^{p'}_{L^{p'}(0,T);L^{p'}(0,+\infty)}<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$C_5\sum_{i=1}^{m}\left\|\varphi_{1i}^{(l)}-\varphi_{1i}^{(m)}\right\|^{2}_{L^2(0,+\infty)}<\frac{\varepsilon}{4},\ \ C_6(R)\sum_{i=1}^{m}\left\|\varphi_{0i}^{(l)}-\varphi_{0i}^{(m)}\right\|^{2}_{H_0^1(0,+\infty)}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, для довільного фіксованого $R_0>1$ та довільного як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує таке $k_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, що

$$\int_0^{R_0}\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]dx+\int_{Q_\tau^{R_0}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}\right|^p dxdt<\varepsilon$$

для довільних $l,m>k_0$, $\tau\in[0,T]$. Отже, $\{u_i^{(k)}\}$ є фундаментальною у просторі $C([0,T];H^1_{0,loc}(0,+\infty))$ послідовністю, а послідовність $\left\{\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}\right\}$ – фундаментальна у просторі $C\left([0,T];\left(H^1_{0,loc}(0,+\infty)\cap L^p_{loc}(0,+\infty)\right)'\right)\cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}(0,+\infty)\right)$, $i=1,2,...,m$. Враховуючи довільність R_0, отримаємо, що послідовність $\{u_i^{(k)}\}$ збігається до u в просторі $C([0,T];H^1_{0,loc}(0,+\infty))$, а послідовність $\left\{\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}\right\}$ збігається до $\frac{\partial u}{\partial t}$ в просторі $C\left([0,T];\left(H^1_{0,loc}(0,+\infty)\cap L^p_{loc}(0,+\infty)\right)'\right)\cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}(0,+\infty)\right)$, $i=1,2,...,m$. При цьому для функції u виконуються умови (2), (4). Отже, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) .

Єдиність отриманого розв'язку випливає з (6). Розглянемо два довільні розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4). Оскільки $u^1(x,0)=u^2(x,0)$, $\frac{\partial u^1}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial u^2}{\partial t}(x,0)$, то нерівність (6) набуває вигляду:

$$\int_0^{R_0}\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]dx+\int_{Q_\tau^{R_0}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}\right|^p dxdt\leq$$

$$\leq\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\beta}C_7R^{1+(\alpha-1)\frac{2p}{p-2}}$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1<R_0<R$, $\tau\in(0,T]$, C_7 – додатна стала, що залежать лише від n, p, β. Враховуючи наведені вище умови, робимо висновок, що для довільного фіксованого $R_0>1$

$$\int_0^{R_0}\left[\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^{(0)}(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]dx+\int_{Q_\tau^{R_0}}\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}\right|^p dxdt\leq 0\,.$$

Отже, $u^1=u^2$ майже всюди в $Q_T^{R_0}$, тому розв’язок задачі (1)–(4) єдиний.

Висновки

Отримано умови коректності розв'язку в математичній моделі нелінійних слабкозв'язаних коливальних систем – достатні умови існування та єдиності розв'язку. Зазначена методика дає змогу обгрунтувати коректність розв'язку моделі також й у випадках коливань за дії комбінованих нелінійних сил пружності та опору. Отримані якісні результати обґрунтовують можливість застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна. У результаті надалі при дослідженні динамічних характеристик розв'язків розглянутих математичних моделей коливань можна застосовувати різноманітні наближені методи.

1. Yang T.L. On forced vibrations of a particle in the plane / Yang T.L., Rosenberg R.M.// Int. Journ. Nonlin. Mech. – 1968. – 3. – P. 47–63. 2. Rosenberg R.M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom/ Rosenberg R.M.// Adv. In Appl. Mech. – 1966.- P. 155 – 242. 3. Johnson T.L. On the existence and bifurcation of minimal normal modes / Johnson T.L., Rand R.H.// Int. Journ. Nonlin. Mech. – 1979. – 14. – P. 1–12. 4. Rand R.H. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled Van der Pol oscillators / Rand R.H., Holmes P.J. // Int. Journ. Nonlin. Mech. – 1980. – 15. – P. 387–399. 5. Salenger G. Discreteness effects in the forced dynamics of a string on a periodic array of non-linear supports / Salenger G., Vakakis A.F. // Int. J. Non-Lin. Mech. – 1998. – 33. – P. 659–673. 6. Ghayesh M.H. Parametric vibrations and stability of an axially accelerating string guided by a non-linear elastic foundation / Ghayesh M.H. // Int. J. Non-Lin.Mech. – 2010. – 45. – P. 382–394. 7. Demeio. L. Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate./ Demeio L., Lenci S // Nonlinear Dynamics. – 2007. – 49. – P. 203–215. 8. Demeio. L. Second-order solutions for the dynamics of a semi-infinite cable on a unilateral substrate / Demeio L., Lenci S // J. Sound Vibr.+ 2008. – 315. – P. 414–432. 9. Сокіл Б.І. Дослідження нелінійних коливань стрічок конвеєрів / Сокіл Б.І. // Оптимізація виробничих процесів і технологічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2000. – № 394. – С. 101–104. 10. Astaburuaga M., Coimbra Charao R., Fernandez C., Perla Menzala G. Scattering frequencies for a perturbed system of elastic wave equations// J. Math. Anal. And Appl. – 219. – 1998. – P. 52–75. 11. Duvaut G., Lions J.L. Les inequations en mecanique et en physique. – Paris: Dunod, 1972. 12. Gurtin M. An introduction to continuum Mechanics. – New York: Academic Press, 1981. 13. Пукач П.Я. Змішана задача в необмеженій області для слабконелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 47. – 2004, № 4. – С. 149–154. 14. Lavrenyuk S.P. Mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation in a domain unbounded with respect to space variables / Lavrenyuk S.P., Pukach P. Ya. // Ukrainian Mathematical Journal, 59, № 11. – 2007. – P. 1708–1718.