

дисперсії. Також доцільно розглянути удосконалені структури моделей Е-УАРУГ, які продемонстрували, у цьому випадку, найкращі результати стосовно якості оцінок прогнозів.

1. Nelson D.B. *Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach* // *Econometrica*. 1991. – Vol. 59. – No. 2, pp. 347 – 370. 2. Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P. *Estimating time-varying risk premia in the term structure: ARCH-M model* // *Econometrica*. – 1987. – Vol. 55. – No. 2, pp. 391 – 408. 3. Chou R.Y. *Volatility persistence and stock returns – some empirical evidence using GARCH* // *Journal of Applied Econometrics*. – 1987. – No. 3, 279 – 294. 4. Бідюк П.І., Коновалюк М.М. *Оцінювання моделей стохастичної волатильності та УАРУГ на Java* // *Миколаїв*. – 2012. 5. Taylor S. J. *Financial returns modeled by the product of two stochastic processes – a study of the daily sugar prices: 1961 – 1975* // In Anderson, O. D. (ed.), *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1. – Amsterdam: North-Holland, – 1982. – P. 203–226. 6. Bollerslev T., *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* // *Journal of Econometrics*. – 1986. – Vol. 31. – P. 307–327. 7. Bollerslev T. *A conditionally heteroskedasticity time series model for speculative prices and rates of return* // *The Review of Economics and Statistics*. – 1987. – Vol. 69. – P. 542–547. 8. Engle R.F., Bollerslev T. *Modeling the persistence of conditional variance* // *Econometric Reviews*. – Vol. 5. – 1986. – P. 1–50. 9. Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики* // Том 1, Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, – 1998. – 512 с.

УДК 621.391.3

К. Обельовська¹, О. Ліскевич²

¹ Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра автоматизованих систем управління,
² кафедра ЗЕС

ОЦІНКА ПРОПУСКНОЇ СПРОМОЖНОСТІ ТРІЙКОВОГО СИМЕТРИЧНОГО КАНАЛУ БЕЗ ПАМ'ЯТІ З ТРЬОМА ГРАДАЦІЯМИ ВІРНОСТІ

© Обельовська К., Ліскевич О., 2013

Запропоновано формулу для визначення пропускної спроможності трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності.

Ключові слова: канал зв'язку, трійковий канал, пропускна спроможність, градація вірності.

The formula to define the throughput of three symbol symmetric memoryless channel having three levels of likelihood is proposed.

Key words: model channel, ternary channel, throughput, likelihood.

Вступ

Сучасний етап розвитку телекомунікацій характеризується постійним зростанням вимог щодо якості каналів зв'язку, одним з основних параметрів яких є пропускна спроможність. Підвищення пропускної спроможності каналів досягається, зокрема, за рахунок переходу від каналів двійкових до каналів з більшою множиною вхідних символів. Так, наприклад, трійковий канал використовується в Європі для організації цифрових потоків зі швидкістю 2,048 Мбіт/с відповідно до рекомендації G.703 МККТТ (код HDB3), в мережах Fast Ethernet специфікації 100Base-T4 (схема кодування 8В/6Т – 8 Binary 6 Ternary, при якій кожних вісім символів двійкової послідовності замінюють на шість трійкових символів) [1].

Постановка задачі

Сучасні цифрові мережі призначені для надання інтегральних послуг, а отже, повинні забезпечувати одночасне передавання різних типів інформації з різною якістю передачі. Так, наприклад, передача файлів вимагає значно вищої вірогідності передачі, ніж передача мовних сигналів. Це, своєю чергою, вимагає для різних типів потоків інформації на фізичному та каналному рівнях архітектури мереж застосовувати різні технології передачі й алгоритми обміну інформацією.

У зв'язку з цим доцільно застосовувати пріоритетне обслуговування за критерієм вірогідності передачі інформації, залежно від вимог, що ставляться до передавання різних типів інформації. Ця робота орієнтована на використання трьох рівнів пріоритетів із застосуванням прийому з трьома градаціями вірності: високим, середнім та низьким. Модель каналу при цьому ускладнюється, оскільки множина вихідних символів каналу збільшується втричі, порівняно з множиною вхідних символів. Разом з тим ускладнюється оцінка пропускної спроможності такого каналу. Тому метою цієї роботи є одержати формулу для визначення пропускної спроможності трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності.

Пропускна спроможність трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності

Позначимо через X множину вхідних, а через Y – множину вихідних символів каналу, що використовує трійковий код та прийом з трьома градаціями вірності:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (1)$$

$$Y = \{y_1^B, y_1^C, y_1^H, y_2^B, y_2^C, y_2^H, y_3^B, y_3^C, y_3^H\}, \quad (2)$$

де x_1, x_2, x_3 – вхідні символи трійкового каналу; y_1^B, y_2^B, y_3^B – вихідні символи цього каналу, прийняті з високою градацією вірності; y_1^C, y_2^C, y_3^C – вихідні символи каналу, прийняті з середньою градацією вірності; y_1^H, y_2^H, y_3^H – вихідні символи каналу, прийняті з низькою градацією вірності.

Матриця умовних ймовірностей $P(Y/X)$, що описує такий канал, матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} p(y_1^B/x_1) & p(y_2^B/x_1) & p(y_3^B/x_1) & p(y_1^C/x_1) & \dots & p(y_3^C/x_1) & p(y_1^H/x_1) & \dots & p(y_3^H/x_1) \\ p(y_1^B/x_2) & p(y_2^B/x_2) & p(y_3^B/x_2) & p(y_1^C/x_2) & \dots & p(y_3^C/x_2) & p(y_1^H/x_2) & \dots & p(y_3^H/x_2) \\ p(y_1^B/x_3) & p(y_2^B/x_3) & p(y_3^B/x_3) & p(y_1^C/x_3) & \dots & p(y_3^C/x_3) & p(y_1^H/x_3) & \dots & p(y_3^H/x_3) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де $p(y_i^B/x_i)$, $p(y_i^C/x_i)$, $p(y_i^H/x_i)$ – ймовірності правильного прийому i -х символів алфавіту з присвоєнням їм, відповідно, високої, середньої та низької градацій вірності; $p(y_j^B/x_i)$, $p(y_j^C/x_i)$, $p(y_j^H/x_i)$ – ймовірності помилкового прийому i -х символів з присвоєнням їм, відповідно, високої, середньої та низької градацій вірності.

Нехай ймовірності правильного прийому всіх символів з присвоєнням їм високої градації вірності однакові і дорівнюють P_{pp}^B :

$$p(y_i^B/x_i) = P_{pp}^B, \quad i = \overline{1,3}; \quad (4)$$

ймовірності правильного прийому всіх символів з присвоєнням їм середньої градації вірності однакові й дорівнюють P_{pp}^C :

$$p(y_i^C/x_i) = P_{pp}^C, \quad i = \overline{1,3}; \quad (5)$$

ймовірності правильного прийому всіх символів з присвоєнням їм низької градації вірності однакові й дорівнюють P_{pp}^H :

$$p(y_i^H/x_i) = P_{pp}^H, \quad i = \overline{1,3}; \quad (6)$$

ймовірності помилкового прийому всіх символів з присвоєнням їм високої градації вірності однакові й дорівнюють $P_{п}^B$:

$$p(y_j^B/x_i) = P_{п}^B, \quad i \neq j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}; \quad (7)$$

ймовірності помилкового прийому всіх символів з присвоєнням їм середньої градації вірності однакові й дорівнюють P_{Π}^C :

$$p(y_j^C / x_i) = P_{\Pi}^C, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (8)$$

а ймовірності помилкового прийому всіх символів з присвоєнням їм низької градації вірності однакові й дорівнюють P_{Π}^H :

$$p(y_j^H / x_i) = P_{\Pi}^H, \quad i \neq j, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \quad (9)$$

З врахуванням умов (4)–(9) матриця умовних ймовірностей $P(Y/X)$ набуде вигляду:

$$P_1(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{\Pi\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi\Pi}^H & P_{\Pi}^H & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^B & P_{\Pi\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^C & P_{\Pi\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^H & P_{\Pi\Pi}^H & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi\Pi}^B & P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi\Pi}^C & P_{\Pi}^H & P_{\Pi}^H & P_{\Pi\Pi}^H \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Розділимо множину Y вихідних сигналів на три підмножини Y_1 , Y_2 та Y_3 , що не перетинаються: $Y_1 = \{y_1^B, y_2^B, y_3^B\}$, $Y_2 = \{y_1^C, y_2^C, y_3^C\}$, $Y_3 = \{y_1^H, y_2^H, y_3^H\}$. Цим множинам відповідають матриці перехідних ймовірностей $P_2(Y/X)$, $P_3(Y/X)$ та $P_4(Y/X)$:

$$P_2(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{\Pi\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B \\ P_{\Pi}^B & P_{\Pi\Pi}^B & P_{\Pi}^B \\ P_{\Pi}^B & P_{\Pi}^B & P_{\Pi\Pi}^B \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$P_3(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{\Pi\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^C \\ P_{\Pi}^C & P_{\Pi\Pi}^C & P_{\Pi}^C \\ P_{\Pi}^C & P_{\Pi}^C & P_{\Pi\Pi}^C \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$P_4(Y/X) = \begin{bmatrix} P_{\Pi\Pi}^H & P_{\Pi}^H & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^H & P_{\Pi\Pi}^H & P_{\Pi}^H \\ P_{\Pi}^H & P_{\Pi}^H & P_{\Pi\Pi}^H \end{bmatrix}. \quad (13)$$

У матрицях (11)–(13) кожен рядок є перестановкою елементів будь-якого іншого рядка, а кожен стовпець є перестановкою будь-якого іншого стовпця, що є ознакою симетричності каналу [2]. Пропускнуну спроможність симетричного каналу зв'язку можна подати у вигляді:

$$C = \max_{\{p(x)\}} H(Y) - H(Y/X). \quad (14)$$

де $\max_{\{p(x)\}} H(Y)$ – максимальне значення ентропії приймача, що обчислюється за всіма можливими розподілами ймовірностей на множині X вхідних символів каналу; $H(Y/X)$ – умовна ентропія.

Визначимо складові формули (14) для розглянутого каналу.

Умовна ентропія:

$$H(Y/X) = -P_{\Pi\Pi}^B \log_a P_{\Pi\Pi}^B - 2P_{\Pi}^B \log_a P_{\Pi}^B - P_{\Pi\Pi}^C \log_a P_{\Pi\Pi}^C - 2P_{\Pi}^C \log_a P_{\Pi}^C - \\ - P_{\Pi\Pi}^H \log_a P_{\Pi\Pi}^H - 2P_{\Pi}^H \log_a P_{\Pi}^H. \quad (15)$$

Ввівши позначення

$$a = P_{\Pi\Pi}^B / P_{\Pi}^B, \quad (16)$$

$$b = P_{\Pi\Pi}^C / P_{\Pi}^C, \quad (17)$$

$$c = P_{\Pi\Pi}^H / P_{\Pi}^H, \quad (18)$$

формулу (15) можна подати у вигляді:

$$H(Y/X) = -P_{\Pi}^B \log_a a^a - (a+2)P_{\Pi}^B \log_a P_{\Pi}^B - P_{\Pi}^C \log_a b^b - (b+2)P_{\Pi}^C \log_a P_{\Pi}^C - \\ - P_{\Pi}^H \log_a c^c - (c+2)P_{\Pi}^H \log_a P_{\Pi}^H. \quad (19)$$

Ентропія приймача

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^3 [p(y_j^B) \log_a p(y_j^B) + p(y_j^C) \log_a p(y_j^C) + p(y_j^H) \log_a p(y_j^H)], \quad (20)$$

де

$$p(y_j^B) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) p(y_j^B / x_i), \quad (21)$$

$$p(y_j^C) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) p(y_j^C / x_i), \quad (22)$$

$$p(y_j^H) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) p(y_j^H / x_i). \quad (23)$$

З урахуванням умов (4)–(9), (16)–(18) формули (21)–(23) можна представити у вигляді:

$$p(y_j^B) = P_{\Pi}^B \left[ap(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i) \right], \quad (24)$$

$$p(y_j^C) = P_{\Pi}^C \left[bp(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i) \right], \quad (25)$$

$$p(y_j^H) = P_{\Pi}^H \left[cp(x_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 p(x_i) \right]. \quad (26)$$

У симетричному каналі без пам'яті ентропія $H(Y)$ досягає максимального значення за рівномірного розподілу ймовірностей його вхідних символів, тому $p(x_i) = 1/m$, а в цьому випадку $p(x_i) = 1/3$. Тоді

$$p(y_j^B) = (a+2)P_{\Pi}^B / 3, \quad (27)$$

$$p(y_j^C) = (b+2)P_{\Pi}^C / 3, \quad (28)$$

$$p(y_j^H) = (c+2)P_{\Pi}^H / 3. \quad (29)$$

При цьому максимальне значення ентропії

$$H(Y)_{\max} = -(a+2)P_{\Pi}^B \cdot \log_a \left[\frac{(a+2)}{3} P_{\Pi}^B \right] - (b+2)P_{\Pi}^C \cdot \log_a \left[\frac{(b+2)}{3} P_{\Pi}^C \right] - (c+2)P_{\Pi}^H \cdot \log_a \left[\frac{(c+2)}{3} P_{\Pi}^H \right] \quad (30)$$

Підставивши (30) та (19) в (14), після математичних перетворень отримаємо вираз для знаходження пропускної спроможності трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності

$$C = P_{\Pi}^B \cdot \log_a \frac{a^a}{[(a+2)/3]^{a+2}} + P_{\Pi}^C \cdot \log_a \frac{b^b}{[(b+2)/3]^{b+2}} + P_{\Pi}^H \cdot \log_a \frac{c^c}{[(c+2)/3]^{c+2}} \quad (31)$$

Висновок

Одержана формула для оцінки пропускної спроможності трійкового симетричного каналу без пам'яті з трьома градаціями вірності, яку можна застосувати для аналізу мереж, що працюють з трійковими каналами у разі використання в них прийому з трьома градаціями вірності.

1. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учебник для вузов. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2011. – 944 с. 2. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. – М.: Советское радио, 1974. – 720 с.