



УДК 004.422:536.24

В. І. Гавриш, Р. Р. Шкраб

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ТЕПЛОАКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТАХ ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЇВ З ЛОКАЛЬНИМ ВНУТРІШНІМ НАГРІВАННЯМ ТА ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а надалі й аналізу температурних режимів в ізотропних просторових теплоактивних середовищах, які зазнають внутрішнього локального теплового навантаження. У випадку нелінійної крайової задачі застосовано перетворення Кірхгофа, із використанням якого лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови. Внаслідок цього отримано лінеаризоване диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними і розривною правою частиною та частково лінеаризовані крайові умови. Для остаточної лінеаризації частково лінеаризованих крайових умов виконано апроксимацію температури за радіальною просторовою координатою на межовій поверхні термочутливого середовища кусково-сталою функцією, у результаті чого крайова задача стала цілком лінеаризованою. Для розв'язування лінійної крайової задачі, а також отриманої лінеаризованої крайової задачі щодо перетворення Кірхгофа використано метод інтегрального перетворення Генкеля, завдяки чому одержано аналітичні розв'язки цих задач. Для термочутливого середовища, як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу структури від температури, яку часто використовують у багатьох практичних завданнях. Отримано аналітичне співвідношення для визначення розподілу температури у цьому середовищі. Виконано числовий аналіз поведінки температури як функції просторових координат для заданих значень геометричних і теплофізичних параметрів. Досліджено вплив потужності внутрішніх джерел тепла та матеріалів середовища на розподіл температури. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу теплообмінних процесів у середині цих конструкцій, зумовлених внутрішнім тепловим навантаженням, розроблено програмні засоби, із використанням яких геометрично відображено розподіл температури залежно від просторових координат. Розроблені лінійна та нелінійна математичні моделі визначення температурного поля у просторових теплоактивних середовищах із внутрішнім нагріванням свідчать про їх адекватність реальному фізичному процесу. Вони дають змогу аналізувати такі середовища щодо їх термостійкості та, як наслідок, підвищити її і захистити середовища від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих вузлів та їх елементів, а й увсяєї конструкції.

Ключові слова: температурне поле; ізотропне просторове теплоактивне середовище; теплопровідність; конвективний теплообмін; локальне внутрішнє нагрівання; термочутливість.

Вступ / Introduction

Сучасний прогрес у сфері цифрових технологій привів до значного зростання потужності та функціональності цифрових пристроїв. Процесори, мікроконтролери, графічні картки та інші електронні компоненти стають об'ємними та потужнішими, що ставить серйозні виклики щодо управління тепловими режимами. Високі рівні тепловиділення призводять до значних температурних градієнтів, що спричиняє небажане перегрівання, зниження продуктивності та скорочення терміну служби цифрових пристроїв. Температурні поля у конструкційних теплоактивних вузлах та елементах цифрових пристроїв є однією з важливих причин цього. Наприклад, велика кількість електронних компонент, розміщених на обмеженій площі плати, спричиняє істотну відмінність у тепловіддачі та потужності генерації тепла. Це створює неоднорідні теплові поля, які потребу-

ють детального аналізу та оптимізації, щоб забезпечити стабільну та надійну роботу пристроїв. Дослідження свідчать, що управління тепловими режимами є критично важливим аспектом для досягнення оптимальної продуктивності та тривалості служби цифрових пристроїв. Сучасні технології моделювання та симуляції дають змогу детально проаналізувати температурні поля, оцінити вплив різних факторів та розробити ефективні стратегії охолодження. Теплові джерела у цифрових пристроях містять електронні компоненти, які, працюючи, споживають енергію та генерують тепло. Це джерела різних типів, зокрема, процесори, графічні процесори, пам'ять, логічні вентиля тощо. Кожна з цих компонент має власну потужність, яку визначають залежно від робочої частоти, напруги та інших функціональних параметрів. Для моделювання теплових джерел у цифрових пристроях створюють теплові моделі компонент.

Ці моделі містять інформацію про теплові властивості компоненти, зокрема, потужність, тепловий опір та температурний коефіцієнт опору. Такі моделі дають змогу аналізувати теплові впливи окремих компонент та їх взаємодію у системі. Окрім моделювання теплових джерел, важливим аспектом є розміщення компонент на платі. Відстань між компонентами та їх розміщення можуть впливати на розподіл тепла в електронному пристрої. Оптимальне розміщення зменшує теплову взаємодію та забезпечує ефективнішу тепловіддачу. Деякі цифрові пристрої містять динамічні теплові джерела, вплив яких залежить від експлуатаційних умов та завдань. Наприклад, процесори можуть змінювати частоту та потужність залежно від навантаження. Під час моделювання динамічних теплових джерел потрібно урахувати ці зміни та аналізувати вплив на температурні поля. Для числового моделювання температурних полів необхідно враховувати теплові джерела у рівняннях теплопровідності. Це потребує введення термів, які відображають теплову генерацію у відповідних ділянках пристрою, із урахуванням того, сталі чи змінні теплові джерела.

Об'єкт дослідження – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в ізотропних просторових теплоактивних середовищах, які зазнають внутрішнього локального нагрівання.

Предмет дослідження – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для ізотропних просторових теплоактивних середовищ із внутрішнім локальним нагріванням.

Мета роботи – розроблення лінійної та нелінійної математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових теплоактивних середовищ, які зазнають внутрішнього локального нагрівання, внаслідок чого можна підвищити точність визначення температурних полів, що надалі вплине на ефективність методів проєктування сучасних електронних пристроїв.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямі розроблення лінійних та нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- навести об'єкт дослідження та його лінійні й нелінійні математичні моделі;
- визначити спосіб лінеаризації нелінійної моделі;
- отримати аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності;
- розробити алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних режимів у ізотропних просторових теплоактивних середовищах із внутрішнім локальним тепловим нагріванням.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників. Температура відіграє важливу роль у визначенні фізичних і хімічних характеристик матеріалів. Цей вплив стає особливо істотним і разі значних коливань температури, як це спостерігається в процесах теплопровідності. Температурні перепади призводять до певних змін властивостей матеріалу, що ускладнює ви-

значення розподілу температури та термічної напруги. Унаслідок цього визначення термопружного стану конструкції істотно ускладнюється.

У роботі [1] за допомогою узагальненого методу комплексної змінної досліджено термопружну задачу еліптичної порожнини в нескінченному середовищі. Внаслідок аналізу термопружного стану середовища враховано температурну залежність коефіцієнта теплопровідності, модуля пружності та коефіцієнта теплового розширення. Із урахуванням цих залежностей отримано аналітичні вирази для температури, теплового потоку та термопружних полів.

Наведено аналітичні розв'язки розподілу температури, переміщень і напружень у шаруватих прямокутних пластинах із простою опорою, які зазнають термомеханічних навантажень. Властивості матеріалу шарів залежать від температури [2].

Досліджено термопружні параметри функціонально градуєваних пористих пластин із різним розподілом матеріалу та виявлено, що термічні напруження чутливіші до розподілу матеріалу, ніж температура та деформації [3].

У роботі [4] дослідження спрямовані на визначення впливу температурної залежності властивостей матеріалу та показників композиційного градієнта у функціонально градуєваних прямокутних пластинах щодо температури, деформацій та напружень.

Наведено розв'язок для сталого стану реакції товстих циліндрів, на які діють тиск та зовнішній тепловий потік на внутрішній поверхні [5].

Виконано термічний аналіз циліндрів різної товщини, виготовлених із функціонально градуєваних матеріалів, які перебувають під впливом неоднорідних теплових потоків, зосереджених на внутрішніх і зовнішніх шарах [6], [7].

У робота [8] визначено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та термоеластичності для функціонально-градієнтних товстих сфер. Теплофізичні та термоеластичні параметри матеріалів, за винятком коефіцієнта Пуассона, є довільними функціями радіальної координати. Розглянуто осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності та термоеластичності для порожнистих функціонально-градієнтних областей щодо джерела тепла.

Теплове моделювання електронних пристроїв – один із найважливіших інструментів оцінювання їх надійності в різних режимах роботи. У роботі [9] наведено теплову модель електронних пристроїв, яка ґрунтується на експериментальних даних вимірювання температури, отриманих інфрачервоною камерою. Ці дані є вхідними для розробленої математичної моделі, яка ґрунтується на методі скінченних різниць і деяких відомих фізичних залежностях. Розроблена модель верифікована порівнянням даних моделювання з експериментально одержаними. Її можна використовувати для дослідження теплової поведінки пристрою за різних умов експлуатації.

У більшості портативних електронних пристроїв, окрім температури кількох джерел тепла, тобто температури з'єднання, також потрібно контролювати температуру корпусу, тобто температуру шкіри, щоб захистити роботу користувача. Отже, створення компактною теплової моделі на рівні пристрою для прогнозування

температури шкіри не тільки підвищить ефективність теплового проектування на ранній стадії, але й допоможе розробити стратегію контролю температури на основі моделі. У статті [10] вперше створено на основі методу згортки динамічні компактні теплові моделі двох портативних електронних пристроїв – смартфона і ноутбука. Згідно з припущенням про лінійні незмінні в часі системи, температуру шкіри двох тестових пристроїв можна швидко розрахувати після визначення ступінчастої реакції кожного джерела тепла.

Збільшення питомої потужності електронних пристроїв, зумовлене вищою продуктивністю та вимогами до мініатюризації, спонукало дослідників до пошуку нових та альтернативних методів керування температурою. Оскільки більшість електронних пристроїв часто зазнають високочастотних циклів живлення, системи охолодження також повинні бути здатні керувати перехідними тепловими профілями, щоб затримати температурну реакцію та зменшити градієнти температури всередині пристрою, що може призвести до термічних навантажень і, в довгостроковій перспективі, відмови електронного пристрою. Інтеграція фазоперемінних матеріалів (PCM) в радіатори для електронних пристроїв дає змогу створити цікаву технічну систему для збільшення теплової інерції системи охолодження, одночасно забезпечуючи стабільнішу робочу температуру в електронних компонентах. У статті [11] висвітлено останні тенденції досліджень у цій галузі, з особливим акцентом на електричні батареї, енергетичну електроніку та застосування портативних пристроїв.

Багато зусиль у сфері управління температурою електроніки було зосереджено на розробленні рішень для охолодження, які забезпечують роботу в стаціонарному режимі. Однак електронні пристрої все частіше використовують в додатках, робочі навантаження яких змінюються в часі. До них належать мікропроцесори (зокрема використовувані в портативних пристроях), силові електронні пристрої та масиви потужних напівпровідникових лазерних діодів. Перехідні рішення для управління температурою стають важливими для забезпечення продуктивності та надійності таких пристроїв. У роботі [12] визначено нові вимоги до управління температурою у перехідних процесах, а також вказано рішення для охолодження, описані в літературі для таких застосувань, зосереджені в часових масштабах теплової відповіді.

Вдосконалено наявні методи та розроблено нові підходи для створення математичних моделей, які дають змогу аналізувати теплообмін у кусково-однорідних середовищах. Наведено плоскі та просторові моделі теплообміну, в яких диференціальні рівняння містять коефіцієнти, залежні від теплофізичних властивостей фаз та геометричної структури. Висвітлено підходи для визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Проаналізовано процеси теплообміну, що відбуваються в однорідних та шаруватих конструкціях з включеннями канонічної форми [13], [14], [15].

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі. Розглянемо ізотропний шар, віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$, в області $\Omega_0 = \{(R, \varphi, h) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ якого зосереджено рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = const$. На межовій поверхні шару $L_+ = \{(r, \varphi, h) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем зі сталою температурою $t_c = const$ згідно із законом Ньютона, а інша поверхня шару $L_- = \{(r, \varphi, -l) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ теплоізолювана (рис. 1).

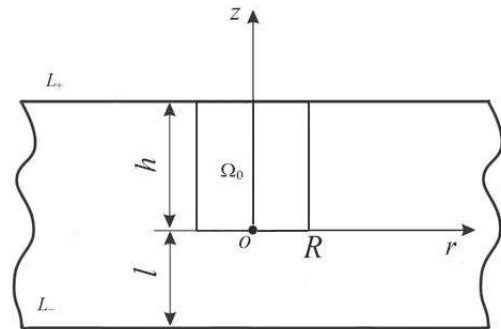


Рис. 1. Переріз ізотропного шару площиною $\varphi = 0$ / Section of an isotropic layer by a plane $\varphi = 0$

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z , який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [13, 14, 15]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r \operatorname{grad} T(r, z)] = -\frac{q_0}{\lambda} S_-(R-r) S_-(z) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda} T(r, z) \Big|_{z=h}; \quad \left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \right|_{z=-l} = 0, \quad (2)$$

де $T(r, z) = t(r, z) - t_c$; λ – коефіцієнт теплопровідності шару; α – коефіцієнт тепловіддачі з межової поверхні шару L_+ ;

$$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$$

$S_-(\zeta)$ – асиметрична одинична функція [13, 14, 15].

Застосуємо інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (1) та крайових умов (2). Унаслідок цього прийдемо до звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і розривною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \xi^2 \bar{T} = -\frac{Rq_0}{\lambda \xi} J_1(R\xi) S_-(z) \quad (3)$$

$$\text{і крайових умов} \quad \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=-l} = 0, \quad \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda} \bar{T} \Big|_{z=h}, \quad (4)$$

де $\bar{T}(\xi, z) = \int_0^\infty r J_0(r\xi) T(r, z) dr$ – трансформанта функції

$$T(r, z); \quad J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!(\nu+n)!} \quad \text{— функція Бесселя}$$

першого роду ν -го порядку; ξ – параметр інтегрально-го перетворення Генкеля.

Загальний розв'язок рівняння (3) визначимо методом варіації сталих

$$\bar{T}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} - \frac{Rq_0}{\lambda \xi^3} J_1(R\xi)(ch\xi z - 1)S_-(z).$$

Використавши крайові умови (4), отримаємо частковий розв'язок задачі (3), (4) у вигляді

$$\bar{T}(z) = -\frac{Rq_0}{\xi^3} J_1(R\xi)B(z). \quad (5)$$

Тут $B(z) = (ch\xi z - 1)S_-(z) + BE(z);$

$$B = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi h + \alpha ch\xi h}{(\lambda_1 \xi + \alpha)e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha)e^{-\xi h}};$$

$$E(z) = e^{\xi(z+2l)} - e^{-\xi z}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (5), одержимо

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi J_0(r\xi) \bar{T}(\xi, z) d\xi. \quad (6)$$

У результаті шукане температурне поле в шарі, зумовлене внутрішнім локальним нагріванням (внутрішні джерела тепла зосереджено в об'ємі циліндра Ω_0) виражено формулою (6), з якої отримуємо значення температури в довільній точці конструкції.

Розглянемо випадок, коли ізотропний шар є термочувливим. Тоді розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z у наведеній конструкції для цього випадку отримаємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [13], [14], [15]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r\lambda(t) \operatorname{grad} t(r, z)] = -q_0 S_-(R-r)S_-(z) \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$t(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0, \quad (8)$$

$$\lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\alpha(t(r, z)|_{z=h} - t_c), \quad (9)$$

де $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності термочувливого шару.

Розглянемо перетворення Кірхгофа

$$\vartheta(r, z) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{r(z)} \lambda(\xi) d\xi, \quad (10)$$

λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару.

Продиференціюємо вираз (10) за змінними r та z й отримаємо

$$\lambda^0 \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} = \lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r}, \quad \lambda^0 \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} = \lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z}. \quad (11)$$

Із урахування виразів (11) вихідне рівняння (7) набуде такого вигляду:

$$\Delta \vartheta = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(R-r)S_-(z). \quad (12)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Крайові умови (8), (9) із використанням співвідношення (10) перепишемо так:

$$\vartheta(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda^0} (t|_{z=h} - t_c). \quad (14)$$

Використання перетворення Кірхгофа (10) дало змогу звести нелінійну крайову задачу (7)–(9) до лінеаризованого диференціального рівняння із частковими похідними другого порядку з розривною правою частиною (12), лінеаризованих крайових умов (13) та частково лінеаризованої крайової умови (14).

Апроксимуємо $t(r, h)$ кусково-сталою функцією

$$t(r, h) = t_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) S_-(r - r_i), \quad (15)$$

де

$$r_i \in (0; \infty); \quad r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{l-1};$$

l – кількість поділів інтервалу $(0; R^*)$; $t_l (l = \overline{1, m})$ – невідомі апроксимаційні значення температури $t(r, h)$; R^* – значення радіальної координати, для якого значення температури $t(r, h)$ практично досягає температури навколишнього середовища t_c .

Підставимо вираз (15) у співвідношення (14) й у результаті отримаємо лінійну крайову умову

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda^0} \left[t_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) S_-(r - r_i) - t_c \right]. \quad (16)$$

Застосуємо інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (12) та крайових умов (13), (16). Внаслідок цього отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами з розривною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{Rq_0}{\lambda^0 \xi} J_1(R\xi) S_-(z) \quad (17)$$

$$\text{і крайові умови} \quad \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \Big|_{z=-l} = 0, \quad \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \Big|_{z=h} = -\frac{\alpha A}{\lambda^0 \xi}, \quad (18)$$

де $\bar{\vartheta}(\xi, z) = \int_0^{\infty} r \vartheta(\xi, z) J_0(r\xi) dr$ – трансформанта функції $\vartheta(r, z)$;

$$A = (t_m - t_c) \delta_+(\xi) - \sum_{i=1}^{m-1} r_i J_1(r_i \xi) (t_{i+1} - t_i).$$

Загальний розв'язок рівняння (17) визначимо у вигляді

$$\bar{\vartheta}(z) = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z} - \frac{Rq_0}{\lambda^0 \xi^3} J_1(R\xi)(ch\xi z - 1)S_-(z),$$

та з використанням крайових умов (18) знайдемо сталі інтегрування c_1 і c_2 . У результаті отримаємо розв'язок задачі (17), (18)

$$\bar{\vartheta}(z) = -\frac{1}{\xi} \left[R J_1(R\xi) \frac{q_0}{\lambda^0 \xi^2} A(z) + \alpha AP(z) \right], \quad (19)$$

де

$$A(z) = P(z) sh\xi h - (ch\xi z - 1)S_-(z); \quad P(z) = \frac{ch\xi(z+l)}{sh\xi(h+l)}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (19), визначимо вираз для функції Кірхгофа $\vartheta(r, z)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(r, z) = \int_0^{\infty} \xi J_0(r\xi) \bar{\vartheta}(z) d\xi. \quad (20)$$

Підставивши вираз температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару в співвідношення (10), (20), після деяких перетворень отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень t_i ($i = \overline{1, m}$) температури $t(r, h)$ на межовій поверхні шару.

Шукане температурне поле $t(r, z)$ для наведеної структури визначаємо за допомогою одержаного нелінійного алгебраїчного рівняння з використанням співвідношень (10), (20), після підстановки в них конкретного виразу залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу шару від температури.

Частковий приклад. Розглянемо залежність коефіцієнта теплопровідності від температури для матеріалу шару у вигляді співвідношення

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (21)$$

де k – температурний коефіцієнт теплопровідності.

Врахувавши співвідношення (10), із виразів (20) і (21) отримаємо формулу для визначення температури $t(r, z)$

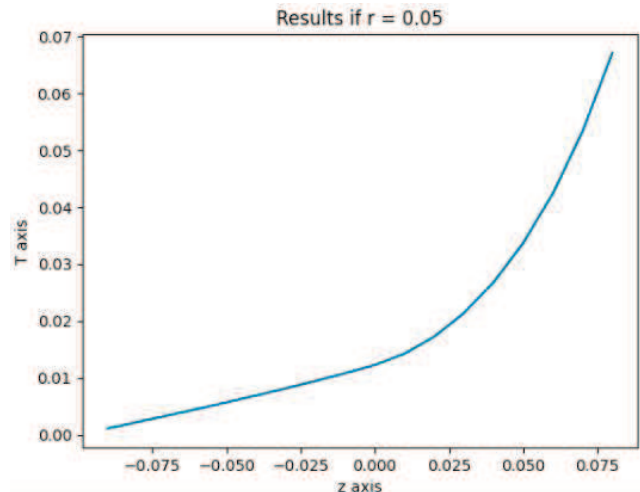
$$t(r, z) = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k\vartheta(r, z)}{\lambda^0}} \right), \quad (22)$$

яка цілком описує поведінку температурного поля в термочутливому шарі.

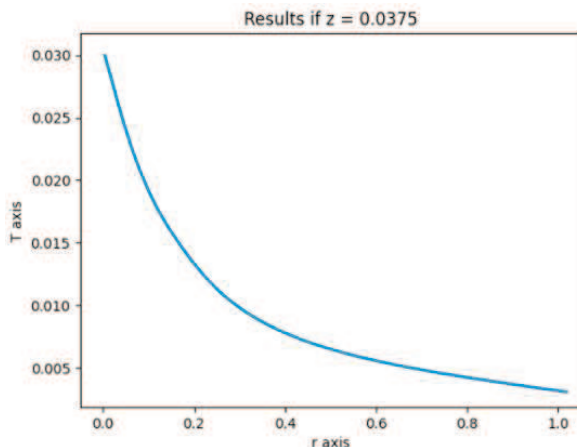
Аналіз числових результатів. За формулою (6) виконано числові розрахунки температурного поля $T(r, z)$ та наведено його поведінку в середовищі залежно від просторових радіальної r та аксіальної z координат для таких вихідних даних: $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$; $l = 0,1 \text{ м}$; $h = 0,075 \text{ м}$; $R = 0,05$; $\alpha = 17,64 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$; матеріалом середовища вибрано кремній, для якого коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 67,9 \text{ Вт/(град} \cdot \text{м)}$ за температури $27 \text{ }^\circ\text{C}$ (рис. 2). Для термочутливого середовища, матеріалом якого є кремній, на інтервалі температур $[0 \text{ }^\circ\text{C}; 1127 \text{ }^\circ\text{C}]$ співвідношення (21), як частковий випадок, внаслідок виконаної інтерполяції буде таким: $\lambda(t) = 67,9 \text{ Вт/(град} \cdot \text{м)}(1 - 0,0005t / \text{град})$. Результати свідчать, що температура $T(r, z)$ як функція просторових координат є гладкою та монотонною, що підтверджує адекватність розроблених математичних моделей реальному фізичному процесу.

Обговорення результатів дослідження. У роботі [16] проаналізовано особливості поширення температурного поля та реакцію теплопровідного матеріалу як функцію від параметрів його шліфування. Для шліфування рейок широко використовують як техніку для повторного профілю поверхонь рейок у разі їх зношення, так і для усунення відсутніх пошкоджень. Однак шліфування може призвести до вигорання поверхні та утворення білого шару травлення (англ. *White Etching Layer, WEL*). Беручи до уваги положення поверхні рейки, результатом дослідження стало створення аналітичної теплової моделі на підставі нерівномірно розподіленого джерела тепла для прогнозування температурного поля під час шліфування. Температуру під час здійснення експерименту шліфування рейки вимірювали за допомогою спеціальних термопар. Детально про-

аналізовано реакцію матеріалу рейки з погляду нагрівання поверхні та білого шару травлення. Результати показують, що за температури шліфування близько $400 \text{ }^\circ\text{C}$ на поверхні рейки починає з'являтися WEL. На шліфованих поверхнях рейок виявлено залишки аустеніту, що вказує на існування також мартенситу як результат ефекту поєднання термічної та механічної взаємодії. Для описання залежності між температурою шліфування, вигоранням поверхні та WEL розроблено відповідні діаграми, призначені для використання у реальному виробництві.



a



б

Рис. 2. Залежність температури від просторових аксіальної (а) та радіальної (б) координат / Dependence of temperature on spatial conditions a) axial and b) radial coordinates

Розглянуто особливості інверсії температурного поля систем джерела тепла (англ. *Temperature Field Inversion of Heat-Source System, TFI-HSS*) через нейронні мережі з фізичною інформацією. Виявлено, що інверсія температурного поля систем джерела тепла з обмеженими спостереженнями важлива для моніторингу працездатності системи. Хоча деякі методи, зокрема інтерполяція, запропоновані для вирішення проблем *TFI-HSS*, проте у разі використання таких методів ігнорують взаємодію між обмеженнями даних і фізичними обмеженнями, що спричиняє їх низьку розрахункову точність. Розроблено метод інверсії температурного поля на підставі нейронної мережі (англ. *Physics-Informed Neural Network-Based Temperature Field Inver-*

sion, PINN-TFI) для виконання завдання TFI-HSS і метод вибору позиції спостережень на підставі кількості умов матриці коефіцієнтів (англ. *Coefficient Matrix Condition Number Based Position Selection of Observations, CMCN-PSO*) для вибору оптимальної позиції спостережень за шумом. Для завдання TFI-HSS метод PINN-TFI дає змогу кодувати терміни обмеження у функцію втрат і в такий спосіб сформульоване завдання перетворюється на задачу мінімізації функції втрат. Виявлено, що спостереження за шумом істотно впливають на продуктивність реконструкції методу PINN-TFI. Щоб зменшити потребу в спостереженнях за шумом, рекомендовано використовувати метод CMCN-PSO для пошуку оптимальних позицій, за яким кількість умов спостережень застосовують для оцінювання певних позицій. Результати демонструють, що використання методу PINN-TFI дає змогу істотно підвищувати точність прогнозування, а за допомогою методу CMCN-PSO можна виявити зручніший спосіб отримання надійного температурного поля [17].

Автори [18] висвітлюють результати експериментально-числового дослідження реконструкції температурного поля на підставі акустичної томографії. Вони стверджують, що високоякісне вимірювання розподілу температури має вирішальне значення для оптимального регулювання процесу спалювання матеріалу в котлі. Водночас, акустичну томографію (англ. *Acoustic Tomography, AT*) використовують для вимірювання розподілу температури за багатопробним акустичним часом польоту (англ. *Time of Flight, TOF*). Реконструйована модель і модель вимірювання TOF мають вирішальне значення щодо практичного застосування для вимірювання AT. Температурне поле подано у вигляді моделі реконструкції на підставі апроксимації радіальної базисної функції з поліноміальним відтворенням для розв'язання оберненої задачі. У такій реконструйованій моделі враховано ефект заломлення шляхів звукової хвилі в неоднорідному температурному полі. Для покращення якості реконструкції температурного поля та його захисту від шуму використано метод реконструкції розкладу зі зрізаним сингулярним значенням (англ. *Truncated Singular Value Decomposition Reconstruction, TSVDR*). Окрім цього, узагальнену крос-кореляцію з другою кореляцією застосовано для оцінювання TOF з метою ефективного уникнення перешкод від шуму. Для оцінювання ефективності наведеного методу реконструкції температурного поля виконано числове моделювання та експериментальні дослідження. Отримані результати свідчать, що модель із урахуванням ефекту заломлення, яку розробили автори, дає змогу реконструювати розподіл температури з вищою точністю та кращою антишумовою здатністю порівняно з іншими наявними методами. Експериментальні результати порівняно з результатами вимірювання за допомогою термометри. Виявлено, що врахування ефекту заломлення поліпшує характеристики реконструкції.

Отже, за результатами виконаної роботи сформулюємо наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів досліджень полягає у наведеному способі лінеаризації нелі-

нійної математичної моделі теплопровідності та отриманні в замкненому вигляді аналітичних розв'язків відповідних лінійної та нелінійної крайових задач для ізотропних теплоактивних просторових середовищ, які зазнають локального внутрішнього теплового нагрівання.

Практична значущість результатів дослідження: на підставі отриманих аналітичних розв'язків лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для ізотропних теплоактивних просторових середовищ з внутрішнім нагріванням можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних режимів у окремих конструкційних елементах та вузлах електронних пристроїв, що зазнають локального внутрішнього теплового навантаження, з метою прогнозування їх режимів роботи, ідентифікації невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

Висновки / Conclusions

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурних полів, а надалі й аналізу температурних режимів, зумовлених локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами для конструкцій, які геометрично описано ізотропною теплоактивною просторовою структурою у вигляді шару. Внаслідок цього підвищено точність визначення температурних полів, що істотно впливає на ефективність методів проектування пристроїв, окремі елементи та вузли яких зазнають внутрішніх теплових навантажень. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки:

За допомогою лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів проаналізовано температурні режими, зумовлені локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами для конструкцій, які геометрично описано ізотропною просторовою структурою у вигляді шару.

Використано перетворення Кірхгофа, яке дало змогу звести нелінійну крайову задачу теплопровідності до лінійної та одержати у замкненому вигляді її аналітично розв'язок.

На підставі отриманих аналітичних розв'язків як для лінійної, так і для нелінійної крайових задач теплообміну запропоновано розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації. Надалі заплановано дослідження для низки матеріалів, які застосовують під час проектування цифрових пристроїв, щодо впливу їх термочутливості на розподіл температури у певних інтервалах температур із використанням наведених розроблених лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у теплоактивних просторових середовищах.

Запропоновано враховувати термочутливість конструкційних матеріалів для певних інтервалів температур, що істотно ускладнює розв'язання відповідних нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач дещо адекватніше до реального фізичного процесу описують поведінку температури як функції просторових координат.

References

- [1] Haopeng, S., Kunkun, X., & Cunfa, G. (2021). Temperature, thermal flux and thermal stress distribution around an elliptic cavity with temperature-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 216, 136–144. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.010>
- [2] Zhang, Z., Zhou, D., Fang, H., Zhang, J., & Li, X. (2021). Analysis of layered rectangular plates under thermo-mechanical loads considering temperature-dependent material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 92, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.036>
- [3] Gong, J., Xuan, L., Ying, B., & Wang, H. (2019). Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method. *Composite Structures*, 224, 111071. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111071>
- [4] Demirbas, M. D. (2017). Thermal stress analysis of functionally graded plates with temperature-dependent material properties using theory of elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 131, 100–124. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.005>
- [5] Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *International Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, 8(4), 1–12.
- [6] Yaghoobi, M. P., & Ghannad, M. (2020). An analytical solution for heat conduction of FGM cylinders with varying thickness subjected to non-uniform heat flux using a first-order temperature theory and perturbation technique. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 116, 104684. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104684>
- [7] Eker, M., Yanımpabuç, D., & Celebi, K. (2020). Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation. *Engineering Computations*, 38(1), 371–391. <http://dx.doi.org/10.1108/EC-02-2020-0120>
- [8] Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, 22(5), 1801–1812.
- [9] Evstatieva, N., & Evstatiev, B. (2023). Modelling the Temperature Field of Electronic Devices with the Use of Infrared Thermography. 13th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), Bucharest, Romania, 1–5. <http://dx.doi.org/10.1109/ATEE58038.2023.10108375>
- [10] Haoran, L., Jiaqi, Y., & Ruzhu, W. (2023). Dynamic compact thermal models for skin temperature prediction of portable electronic devices based on convolution and fitting methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 210, 124170. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124170>
- [11] Vincenzo Bianco, Mattia De Rosa, Kambiz Vafai (2022). Phase-change materials for thermal management of electronic devices, *Applied Thermal Engineering*, Volume 214, 118839, ISSN 1359–4311. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118839>
- [12] Mathew J., & Krishnan, S. (2021). A Review On Transient Thermal Management of Electronic Devices. *Journal of Electronic Packaging*, 144(1), 010801. <https://doi.org/10.1115/1.4050002>
- [13] Havrysh, Vasyl, & Kochan, Volodymyr. (2023). Mathematical Models to Determine Temperature Fields in Heterogeneous Elements of Digital with Thermal Sensitivity Taken into Account. Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS' 2023, 2, pp. 983–991.
- [14] Havrysh V. I., Kolyasa L. I., Ukhanska O. M., & Loik V. B. (2019). Determination of temperature fields in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universitetu*, 1, 94–100.
- [15] Havrysh, Vasyl, Koliassa, Liubov, & Vozna, Svitlana (2021). Temperature field in a layered plate with local heating. *International scientific journal "Mathematical modeling"*, 5(3), 90–94.
- [16] Zhou, Kun, Ding, Haohao, Steenbergen, Michael, Wang, Wenjian, Guo, Jun, & Liu, Qiyue (2021). Temperature field and material response as a function of rail grinding parameters. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 175, 121366. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121366>
- [17] Liu, Xu, Peng, Wei, Gong, Zhiqiang, Zhou, Weien, & Yao, Wen. (2022). Temperature Field Inversion of Heat-Source System via Physics-Informed Neural Networks. Cornell University. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.104902>
- [18] Kong, Qian, Jiang, Genshan, Liu, Yuechao, & Yu, Miao. (2020). Numerical and experimental study on temperature field reconstruction based on acoustic tomography. *Applied Thermal Engineering*, 170, 114720. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.114720>

V. I. Havrysh, R. R. Shkrab

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELS FOR THE DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELDS IN THERMOACTIVE ELEMENTS OF DIGITAL DEVICES WITH LOCAL INTERNAL HEATING AND TAKING THERMOSENSITIVITY INTO ACCOUNT

Linear and non-linear mathematical models for the determination of the temperature field, and subsequently for the analysis of temperature regimes in isotropic spatial heat-active media subjected to internal local heat load, have been developed. In the case of a nonlinear boundary-value problem, the Kirchhoff transformation is applied, using which the original nonlinear heat conduction equation and nonlinear boundary conditions are linearized, and as a result, a linearized second-order differential equation with partial derivatives and a discontinuous right-hand side and partially linearized boundary conditions is obtained. For the final linearization of the partially linearized boundary conditions, the approximation of the temperature by the radial spatial coordinate on the boundary surface of the thermosensitive medium was performed by a piecewise constant function, as a result of which the boundary value problem was obtained completely linearized. To solve the linear boundary value problem, as well as the obtained linearized boundary value problem with respect to the Kirchhoff transformation, the Henkel integral transformation method was used, as a result of which analytical solutions of these problems were obtained. For a heat-sensitive environment, as an example, a linear dependence of the coefficient of thermal conductivity of the structural material of the structure on temperature, which is often used in many practical problems, was chosen. As a result, an analytical relationship was obtained for determining the temperature distribution in this medium. Numerical analysis of temperature behavior as a function of spatial coordinates for given values of geometric and thermophysical parameters was performed. The influence of the power of internal heat sources and environmental materials on the temperature distribution was studied. To determine the numerical values of the temperature in the given structure, as well as to analyze the heat exchange processes in the middle of these structures, caused by the internal

heat load, software tools were developed, using which a geometric image of the temperature distribution depending on the spatial coordinates was made. The developed linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field in spatial heat-active environments with internal heating testify to their adequacy to a real physical process. They make it possible to analyze such environments for their thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can cause the destruction of not only individual nodes and their elements, but also the entire structure.

Keywords: temperature field, isotropic spatial heat-active environment, thermal conductivity, convective heat exchange, local internal heating, thermosensitivity.

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

Email: gavryshvasyl@gmail.com; <http://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Шкраб Роман Романович, асистент, кафедра програмного забезпечення.

Email: rrshkrab@gmail.com

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Шкраб Р. Р. Математичні моделі визначення температурних полів у теплоактивних елементах цифрових пристроїв з локальним внутрішнім нагріванням та із урахуванням термочутливості. *Український журнал інформаційних технологій*. 2023. Т. 5, № 2. С. 09–16.

Citation APA: Havrysh, V. I., & Shkrab, R. R. (2023). Mathematical models for the determination of temperature fields in thermoactive elements of digital devices with local internal heating and taking thermosensitivity into account. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 5(2), 09–16. <https://doi.org/10.23939/ujit2023.02.009>