

Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, *Я. Савула

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра прикладної математики

АЛГОРИТМИ РОЗРАХУНКУ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ТЕЧІЇ ГАЗУ В ТРУБОПРОВОДАХ (2)

© Лопух Н., Притула М., П'янило Я., Савула Я., 2008

Запропоновано ітераційний метод розв'язування нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних та досліджено вплив кроків дискретизації за координатою та часом на достовірність і збіжність ітераційного процесу. В основу методу покладено лінеаризацію вихідної системи з подальшим уточненням розв'язку шляхом обчислення відповідної неув'язки. Лінеаризована система розв'язується методом скінченних елементів. Результати досліджень апробовані під час обчислювального експерименту.

The iteration method of uniting of the nonlinear systems of differential equations in derivative parts is offered in this paper, also the investigation of the influences of co-ordinate and time discretization steps on authenticity and convergence of iteration process are explored. In the base of the method lies the linearization of the initial system with further clarification of the solution by the calculation of the appropriate mix-up. Linearity system is solved by the finite elements method. The results of researches are approved during a calculating experiment.

Вступ

У літературі розглядаються диференціальні рівняння (або системи рівнянь) у частинних похідних, які описують з різним ступенем адекватності неізотермічний нестационарний процес руху газу в трубопроводі [1, 2]. В загальному випадку ці рівняння є нелінійними, і їхнє розв'язування пов'язане із суттєвими труднощами. Одним із підходів розв'язування є лінеаризація і побудова ітераційних процедур з використанням числових методів. З аналізу способів розв'язування випливає, що достатньо ефективним є поєднання декількох методів розв'язування. Більшість методів моделювання, що мають практичне застосування, використовують такі постановки задач, які приводять до систем алгебраїчних чи звичайних диференціальних рівнянь. Прямих числових методів розв'язування рівнянь газової динаміки (які могли б достатньо якісно дослідити динаміку транспорту газу) практично не зустрічається. Одним із прикладів гідравлічного розрахунку трубопровідних систем є інженерні методи розрахунку параметрів руху газу, які ґрунтуються на усередненні багатьох параметрів. Як методи отримання аналітичних залежностей використовують методи розділення змінних Фур'є, операційні методи, методи автотельних розв'язків. Всі вони вимагають лінеаризації вихідних систем рівнянь. При моделюванні трубопровідних систем повна система рівнянь газової динаміки без значних спрощень не використовується. Спрощення моделі ґрунтуються на спільному використанні числових і аналітичних способів отримання розв'язку. Наближення звичайними диференціальними рівняннями може бути здійснено методами розділення змінних та інтегральних перетворень тощо. У роботі [3] запропоновано ітераційний метод розв'язування нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, в основу якого покладено лінеаризацію вихідної системи з подальшим уточненням розв'язку шляхом обчислення відповідної неув'язки. Ця робота є продовженням попередньої. У ній, крім проведеного дослідження побудованого методу, описано підхід до використання методу скінченних елементів для обчислення неув'язки.

Постановка задачі

Неусталений рух газу в трубопроводі описується системою взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda\rho v^2}{2D} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для замикання системи рівнянь використано рівняння стану газу

$$P = \rho zRT,$$

а для обчислення коефіцієнта стиснення z – емпіричну формулу [3]

$$z = \frac{1}{1 + fp}, \quad (2)$$

де p – вимірюється в атмосферах, а $f = (24 - 0.21t^\circ C) \cdot 10^{-4}$, $t^\circ C$ – температура газу за

Цельсієм, яка з достатньою для практики точністю описує відмінність реального газу від ідеального. Тут ρ, v, p – відповідно густина, швидкість руху та тиск газу; λ – коефіцієнт гідравлічного опору; D – діаметр трубопроводу; g – прискорення вільного падіння; h – відносна висота залягання трубопроводу; k – коефіцієнт теплопередачі від трубопроводу до ґрунту; T_{zp} – температура ґрунту; T – температура газу; $t > 0$ – час; $x \in [0, l]$ – лінійна координата, l – довжина трубопроводу. Якщо ввести позначення $\omega = \rho v$ – масова швидкість,

$$a_p = p_1(1 + fp_1) - b_p p_1, \quad c_0 = 1 - \alpha v_c^2 \rho_0 T_0 b_p / p_0 T, \quad c_1 = \alpha v_c, \quad a_v = v_1 + v_2,$$

$$b_v = -v_1 v_2 - \frac{1}{8}(v_2 - v_1)^2, \quad c_2 = \alpha b_v / 2D,$$

$$c_3 = \frac{\rho_0 T_0}{p_0 T} b_p \left(q \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{\lambda a_v}{2D} \right), \quad c_4 = \frac{\rho_0 T_0}{p_0 T} a_p \left(q \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{\lambda a_v}{2D} \right),$$

$p \in [p_1, p_2]$, де p_1 та p_2 – межі зміни тиску, а v_1 і v_2 – межі зміни швидкості, v_c – середня швидкість руху газу в трубопроводі, які приймаються відомими, то в ізотермічному випадку система рівнянь, яка описує рух газу, набуде вигляду:

$$\begin{cases} c_0 \frac{\partial p}{\partial x} + c_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + c_2 \omega + c_3 p = -c_4, \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

За початкові умови вибрано розподіл тиску у вихідному усталеному режимі, який визначається співвідношенням

$$p(x, 0) = \sqrt{p_o^2 - \frac{\lambda z r T}{d} \left(\frac{\rho_o q_o}{s} \right)^2} x. \quad (4)$$

Як правило, досліджується трубопровід, який міститься між послідовними компресорними станціями. Оскільки на компресорних станціях є витратоміри, то природно граничні умови задавати на об'ємні витрати $q_0(t)$ на вході в трубопровід та $q_l(t)$ – на виході у вигляді

$$q_0(t) = q_{0n} + (q_0 - q_{0n}) e^{-\gamma_0 t}, \quad (5)$$

$$q_l(t) = q_{ln} + (q_l - q_{ln}) e^{-\gamma_l t}. \quad (6)$$

Тут індекс нуль відповідає вхідним об'ємним витратам газу, а l – вихідним. У цьому випадку q_0, q_{0n} – об'ємні витрати газу у вихідному та новому стаціонарному стані руху газу та параметр γ_0 , який характеризує швидкість переходу із одного стану в інший на початку трубопроводу, а

q_l, q_{ln}, γ_l – аналогічні параметри в кінці трубопроводу. При переході до масової швидкості $\omega = \rho v$ граничні умови запишуться так

$$\omega(0, t) = \frac{\rho_{st}}{s} q_0(t), \quad \omega(l, t) = \frac{\rho_{st}}{s} q_l(t). \quad (7)$$

Параметри газу обчислювали за такими формулами.

Розподіл температури вздовж трубопроводу

$$T(x) = T_{01} + T_{02} e^{-ax},$$

де позначено

$$T_{00} = \frac{1}{aL} \left(\Delta p \left(D_i - \frac{1}{c_p \rho_0} \right) + \frac{g \Delta h}{c_p} \right),$$

$$T_{01} = T_2 - T_{00}, \quad T_{02} = T_0 - T_2 + T_{00}, \quad a = \frac{k \pi D}{C_p M}, \quad \Delta p = p_0 - p_k$$

Коефіцієнт гідравлічного опору

$$\lambda = \left(\frac{Y + \varepsilon + C^{1.5}}{1 + 76C} \right)^{0.2}, \quad \varepsilon = \frac{k_{uu}}{D}, \quad Y = \frac{79}{\text{Re}}, \quad C = (2Y)^{10}.$$

Числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{D}{\mu_0} \frac{v}{R} \frac{p}{T} \frac{T + C}{273 + C} \left(\frac{273}{T} \right)^{3/2}.$$

У поданих вище формулах позначено: α – коефіцієнт Коріоліса (для ламінарного потоку $\alpha = 2$, а для турбулентного $-\alpha = 1.1$); $h = h(x)$ – крива, що описує рельєф траси газопроводу і у цьому випадку моделюється похилою прямою

$$h = h(x) = \frac{\Delta h}{l} x + h_0;$$

$M = \rho_0 Q_0$ – масовий розхід; T_0 – температура газу на вході в трубопровід; T_{gr} – температура ґрунту; D_h – коефіцієнт Джоуля-Ленца; C_p – коефіцієнт теплопередачі від газу до ґрунту; Δh – перепад висот між кінцем і початком газопроводу; p_0 – значення тиску на початку газопроводу; $p = p(x)$ – розподіл тиску по довжині трубопроводу; λ – коефіцієнт гідравлічного опору; T – температура газу; R – газова стала; z – коефіцієнт стисливості газу; ρ_0 – густина газу в нормальних умовах; x – поточна координата $x \in [0, L]$, де l – довжина трубопроводу; D – внутрішній діаметр трубопроводу.

Метод розв'язування задачі

Ітераційна процедура розв'язування поставленої задачі математичної фізики з використанням методу скінченних елементів полягає в наступному.

- На першому етапі розв'язується аналітично лінеаризований варіант вихідної системи (система (3)) при нульовій неув'язці. Отриманий розв'язок є початковим наближенням ітераційної процедури.

- На наступному кроці знайдений розв'язок використовується для визначення неув'язки і уточнення початкового наближення шуканого розв'язку.

- Процес ітерацій продовжується доти, поки різниця між двома послідовними наближеннями буде меншою за задану точність.

Оскільки в лінеаризованому варіанті отримується система зі сталими коефіцієнтами, то для її розв'язування доцільно використати інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною.

Використання методу скінченних елементів полягає в наступному.

Якщо для скорочення запису замість шуканих функцій ω та p ввести вектор $W = (\omega, p)$, то в матрично-векторній формі система (3) запишеться у вигляді

У матрично-векторній формі система (3) записується у вигляді

$$A \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial x} = VW + M, \quad (8)$$

де $W = [\omega, p]$ – вектор шуканих функцій ω і p ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} -c_2 & -c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} -c_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок відповідної задачі математичної фізики шукається в прямокутній області $[x_0 - x_N, t_0 - t_k]$, де x_0, x_N, t_0, t_k – початкові та кінцеві значення просторової та часової координат відповідно.

Нехай w – апроксимуюча функція компонентів вектора W . При використанні чотирикутного елемента w вибирається у вигляді

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 t + \alpha_4 xt \quad (9)$$

Вузлові значення величин w_i подаються так:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{n-1} + \alpha_3 t_{k-1} + \alpha_4 x_{n-1} t_{k-1}; \\ w_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 t_{k-1} + \alpha_4 x_n t_{k-1}; \\ w_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 t_k + \alpha_4 x_n t_k; \\ w_4 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{n-1} + \alpha_3 t_k + \alpha_4 x_{n-1} t_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Подамо функцію (9) у векторній формі

$$w = [x][\alpha], \quad (11)$$

де

$$[\bar{x}] = [1, x, t, xt], \quad [\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T.$$

Індекс T означає операцію транспонування. Якщо позначити

$$K = \begin{bmatrix} 1 & x_{n-1} & t_{k-1} & x_{n-1} t_{k-1} \\ 1 & x_n & t_{k-1} & x_n t_{k-1} \\ 1 & x_n & t_k & x_n t_k \\ 1 & x_{n-1} & t_k & x_{n-1} t_k \end{bmatrix}, \quad [\bar{w}] = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T,$$

то вектор вузлових значень записується

$$[\bar{w}] = K[\alpha], \quad (12)$$

звідки

$$[\alpha] = K^{-1}[\bar{w}] \quad (13)$$

Тут K^{-1} обернена матриця до K .

Оскільки визначник $\det K = -S^2$, де S – площа чотирикутника x_0, x_N, t_0, t_k , то матриця K не вироджена і існує обернена. Підставляючи (13) до (11), отримаємо

$$w = [\bar{x}]K^{-1}[\bar{w}] \quad (14)$$

Позначимо $N = [N_1, N_2, N_3, N_4] = [\bar{x}]K^{-1}$. Елементи N_i є базисними функціями, які можуть бути подані у вигляді добутку поліномів Лагранжа [9].

Тоді похідні за часом і координатою від апроксимуючої функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial N_1}{\partial t} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial t} w_2 + \frac{\partial N_3}{\partial t} w_3 + \frac{\partial N_4}{\partial t} w_4, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} w_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} w_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} w_4. \end{aligned} \quad (15)$$

Похідні від апроксимуючої функції при використанні чотирикутного симплекс-елемента в його межах не є постійними, а залежать від аргументів x, t [4]. Це дає можливість алгебраїзувати вихідне рівняння на чотирикутному симплекс-елементі x_0, x_N, t_0, t_k .

У формулах (16)–(19) нижній індекс відповідає за просторову координату, а верхній індекс – за час. При апроксимації області вважається, що величини w_n^{k-1} , $n=0, \dots, N$, N – кількість елементів розбиття області за просторовою координатою, отримані з розрахунку $k-1$ -го часового шару. Тому загальна алгебраїчна система будується відносно k -го часового шару. Із співвідношень (15) та (8) отримується рівняння для вузла на одному елементі:

$$\left(\frac{A^k}{\Delta t} - \frac{B^k}{\Delta x} \right) W_{n-1}^k + \frac{B^k}{\Delta x} W_n^k = V^k W_{n-1}^k + M^k + \frac{A^k}{\Delta t} W_{n-1}^{k-1}, \quad (16)$$

При зіставленні сусідніх елементів на часовому шарі записується глобальне рівняння для вузла:

$$\left(-\frac{B^k}{2\Delta x} \right) W_{n-1}^k + \left(\frac{A^k}{\Delta t} - V^k \right) W_n^k + \left(\frac{B^k}{2\Delta x} \right) W_{n+1}^k = \left(\frac{A^{k-1}}{\Delta t} \right) W_n^{k-1} + M^{k-1} \quad (17)$$

для $n=1 \dots N-1$;

$$\left(\frac{A^k}{\Delta t} - \frac{B^k}{\Delta x} - V^k \right) W_n^k + \left(\frac{B^k}{\Delta x} \right) W_{n+1}^k = \left(\frac{A^{k-1}}{\Delta t} \right) W_n^{k-1} + M^{k-1} \quad (18)$$

для $n=0$ і

$$\left(-\frac{B^k}{\Delta x} \right) W_{n-1}^k + \left(\frac{A^k}{\Delta t} + \frac{B^k}{\Delta x} - V^k \right) W_n^k = \left(\frac{A^{k-1}}{\Delta t} \right) W_n^{k-1} + M^{k-1} \quad (19)$$

для $n=N$.

Останні співвідношення утворюють систему лінійних рівнянь розмірністю $(N+1) \times (N+1)$. Розв'язують цю систему на кожному часовому рівні.

Обчислювальні експерименти проводились для труб різних довжин, діаметрів та різних значень надходження та відбору газу. Для дослідження стійкості обчислювального процесу за граничними умовами на тиск було знайдено розподіл масової швидкості вздовж трубопроводу. Тоді розв'язувалась обернена задача – за знайденою масовою швидкістю відновлювався розподіл тиску. Результати обчислень подані на рис. 1, де крива 1 відповідає відносній похибці (в процентах) заданого та обчисленого тиску на вході трубопроводу, а крива 2 – абсолютній похибці.

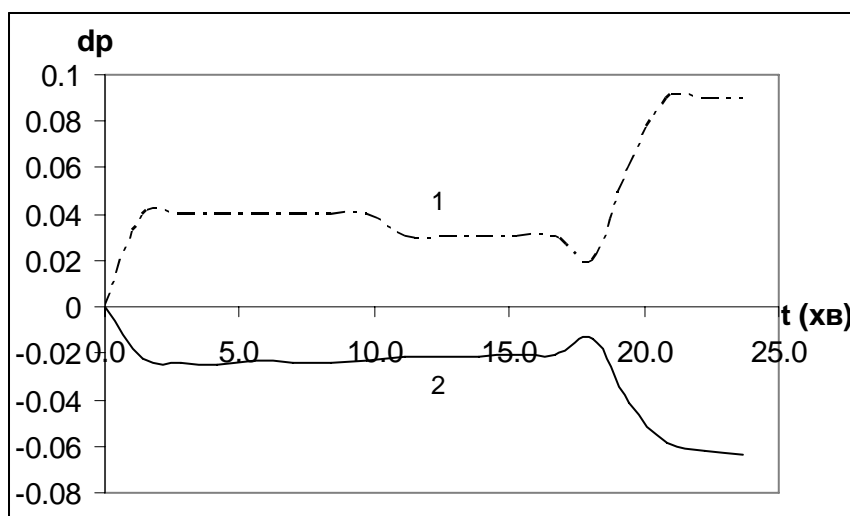


Рис. 1. Динаміка зміни відносної (крива 1 в процентах) та абсолютної (крива 2) похибок при обчисленні тиску на основі прямої та оберненої задач

У табл. 1 подані значення відносних похибок при обчисленні тиску в трубопроводі довжиною 100 км, діаметром 1.388 м, надходження і відбір газу змінювались від 900 до 1200 $\frac{м^3}{с}$ для різних кроків розбиття за часом (dt) та різної кількості елементів розбиття за координатою (klm). Відносною похибкою вважалось

$$\varepsilon = \max_x (|p(T, x) - p_{st2}(x)| / p_{st2}(x)),$$

де $p(t, x)$ – тиск, порахований методом скінченних елементів, у момент часу t в точці x ;

$p_{st2}(x)$ – функція розподілу тиску в усталеному режимі руху газу.

Таблиця 1

dt\klm	3	6	8	12	20	40	60
0.5	1.6832	X					
1	1.6833	0.2478	0.1619	0.1181			
2	1.6834	0.2479	0.1619	0.1181			
5	1.6838	0.2481	0.1621	0.1182	X		
10	1.6844	0.2485	0.1622	0.1187	0.0942		
20	1.6856	0.2492	0.1626	0.1194	0.0948		
50	1.6933	0.2526	0.1642	0.1203	0.0959	X	
100	1.6990	0.2564	0.1660	0.1221	0.0981	0.0920	X
200	1.7313	0.2710	0.1730	0.1289	0.1047	0.0943	0.0921

У табл. 2 подані значення відносних похибок при обчисленні тиску в трубопроводі довжиною 100 км, діаметром 1 м, надходження і відбір газу змінювались від 500 до 600 $\frac{м^3}{с}$

Таблиця 2

dt\klm	3	6	8	12	20	40	60
0.5	X	X					
1	1.7265	0.3655	0.2883	0.2348			
2	1.7268	0.3655	0.2883	0.2348			
5	1.7280	0.3657	0.2884	0.2349	X		
10	1.7291	0.3659	0.2887	0.2350	0.2136		
20	1.7363	0.3665	0.2893	0.2356	0.2136		
50	1.7493	0.3682	0.2919	0.2365	0.2137	X	
100	1.7649	0.3724	0.2951	0.2383	0.2144	0.2056	X
200	1.8212	0.3834	0.3061	0.2475	0.2196	0.2086	0.2063

Таблиця 3

Υ	0.05	0.05	0.05	0.005	0.005	0.005	0.0005	0.0005	0.0005
D\L	100	25	6	100	25	6	100	25	6
1.4	2190	360	20	2440	800	300	7810	3100	2000
1.2	2330	380	20	2600	900	300	8000	3600	2400
1	2530	400	20	2820	1000	400	8360	4000	3000

У табл. 3 подано час (у секундах) виходу процесу на стаціонарний режим з точністю ϵ , тобто $T = \arg \min_t (\min_t |p(t) - p_{st}| < \epsilon)$ для задач із різними довжинами $L = 100\text{км}; 25\text{км}; 6\text{км}$, діаметру $D = \{1.4\text{м}; 1.2\text{м}; 1\text{м}\}$ і коефіцієнтами, що характеризують швидкість зміни крайових умов $\gamma = 0.05; 0.005; 0.0005$.

Висновки

Збіг результатів обчислення тиску на початку трубопроводу на основі знаходження розв'язку прямої і оберненої задачі показує достатньо добру з практичного погляду стійкість побудованого алгоритму розв'язування нелінійних задач математичної фізики. В процесі проведення числових експериментів встановлено, що: існують такі співвідношення між кроками розбиття за координатою Δx і часом Δt , при яких обчислювальний процес є розбіжним; в області збіжності обчислювальний процес збігається швидше при $\Delta t \rightarrow 0$ і $\Delta x \rightarrow 0$; на величину перехідних часів значно впливає динаміка зміни граничних умов та довжина трубопроводу.

1. Александров А.В., Яковлев Е.И. Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. – М.: Недра, 1974. – 432 с. 2. Бобровский С.А., Щербаков С.Г., Яковлев Е.И., Гарляускас А.И., Грачев В.В. Трубопроводный транспорт газа. – М.: Наука, 1976. – 495 с. 3. Лопух Н., Притула М., П'янило Я., Савула Я. Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2007. – Вип. 12. – С. 108–117. 4. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 221 с.