

УДК 517.9:519.6

Любов ЖУРАВЧАК¹, Наталія ЗАБРОДСЬКА²¹ Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, тел. +38(032)2582578, ел. пошта: liubov.m.zhuravchak@lpnu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-1444-5882>² Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна, тел. +38(032)2648563, ел. пошта: nataliya.zabrodska@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0001-8850-6721><https://doi.org/10.23939/jgd2024.01.098>

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ГЕОЕЛЕКТРОРОЗВІДКИ МЕТОДОМ ПРОФІЛЮВАННЯ

Мета. З використанням непрямих методів граничних, приграничних та частково-граничних елементів побудувати алгоритм розпізнавання фізичних та геометричних параметрів включення за даними потенціального поля. **Методика.** Розв'язано пряму та обернену двовимірні задачі теорії потенціалу стосовно геофізики під час моделювання земної кори неоднорідною півплощиною, складеною із змішувального середовища та включення, які перебувають в ідеальному контакті. Для побудови інтегрального подання розв'язку прямої задачі використано спеціальний фундаментальний розв'язок для півплощини (функцію Гріна) рівняння Лапласа, який автоматично задовольняє нульову крайову умову другого роду на денній поверхні, та фундаментальний розв'язок для включення. Щоб знайти інтенсивності невідомих джерел, уведених у граничних, приграничних чи частково-граничних елементах, ми використали колокаційну методику, тобто умови ідеального контакту задовольнялись у середині кожного граничного елемента. Після розв'язання отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь знайдено шуканий потенціал у середовищі та включенні та потік через їхні межі, враховуючи, що середовище і включення розглянуто як цілком незалежні області. **Результати.** Обчислювальний експеримент здійснено для задачі електророзвідки постійним штучним полем методом опору, зокрема, електропрофілюванням. Зосереджено увагу на фізичній та геометричній інтерпретації даних. За змінами позірного опору визначено початкові наближення для електропровідності включення, його центра мас, орієнтації та розмірів. Для розв'язання оберненої задачі організовано два каскади ітерацій: перший для уточнення місцезнаходження локальної неоднорідності та її приблизних розмірів, другий – для уточнення її форми та орієнтації в просторі. Виконано мінімізацію функціонала, розглянутого на ділянці межі, де задано надлишок крайових умов. **Наукова новизна.** Обґрунтовано ефективність непрямих методів граничних, приграничних та частково-граничних елементів (як варіантів методу граничних інтегральних рівнянь) для побудови числових розв'язків прямої та оберненої задач теорії потенціалу в кусково-однорідній півплощині. **Практична значущість.** Ефективність запропонованого підходу до розв'язування оберненої задачі електророзвідки постійним струмом зумовлена тим, що вдалося реалізувати поетапне, “каскадне” розпізнавання форми, розмірів, орієнтації та електропровідності включення, керуючись принципом: за доволі неточних початкових наближень не використовувати усі тонкощі моделі й не здійснювати розпізнавання параметрів, що мало впливають на результат.

Ключові слова: математичне моделювання; теорія потенціалу; пряма задача; обернена задача; непрямий метод приграничних елементів; частково-граничні елементи; кусково-однорідне середовище; електричне профілювання.

Вступ

Вивчення земних надр геолого-геофізичними методами дає основу для з'ясування фундаментальних питань геодинамічних процесів, які, насамперед, стосуються розуміння того, як формуються та проникають у земну кору глибинні високотемпературні флюїди – важливе джерело для усіх подальших процесів формування вуглецевих, сульфідних і залізовмісних метасоматитів, а також утворення рудних і нафтогазових родовищ. Як відомо, флюїди проникають крізь літосферу дренувальними глибинними зонами високої проникності, які часто відповідають глибинним розломам. Дослідження показують, що області зчленування різного типу

тектонічних плит (океанських і континентальних або внутрішньоконтинентальних) характеризуються електропровідними структурами. Природа таких глибинних регіональних аномалій не обов'язково пояснюється частковим плавленням, вони можуть бути результатом транспортування флюїдів і, відповідно, рудних компонентів з кори і мантії за тектономагматичної активізації. Водень і вуглець у земній корі та верхній мантії можуть переміщатися в зонах контакту різновікових геологічних утворень, спричиняючи у такий спосіб збільшення електропровідності, що дає змогу прогнозувати перспективні площі на виявлення корисних копалин. Области зчленування тектоніч-

них плит різного віку вивчають експериментально у межах площинних магнітотелуричних та магнітоваріаційних методів [Nikolaev, et al., 2019].

Під час вивчення геодинамічних процесів у земній корі, породжених природними чи штучними силовими полями різної фізичної природи, аналізують численні фізичні та механічні наслідки, які змінюють її структуру та проявляються на її поверхні. Пошук неоднорідних об'єктів (проваль, порожнин, різноманітних печер, зсувів ґрунту, покладів вуглеводнів чи рудних копалин), їхня локалізація та визначення фізичних властивостей, моніторинг територій їхнього знаходження належать до завдань геофізичних методів дослідження, зокрема електророзвідки.

Перевагами методів, які ґрунтуються на використанні природних та штучних потенціальних полів (гравітаційних, магнітних, електричних, теплових, фільтраційних) для виявлення неоднорідності об'єкта, є простота реалізації в польових чи експериментальних умовах та економічна доцільність, оскільки вони не потребують спеціального дорогого обладнання. Водночас математичні моделі стаціонарних процесів, використані у цих методах, складаються з рівнянь Лапласа чи Пуассона, доповнених крайовими умовами першого, другого чи третього родів та змішаними, і добре вивчені [Lv, et al., 2023; Milson, Eriksen, 2011; Pierre van Baal, 2014; Qu, et al., 2015; Zhdanov, 2009].

Виділення і виявлення фізичних аномалій – складна математична і технічна проблема, оскільки це здійснюють на фоні не завжди однорідного і спокійного нормального поля серед різноманітних завад – геологічних, природних, техногенних (неоднорідності верхньої частини геологічного середовища, нерівності рельєфу, космічні, атмосферні, кліматичні, промислові та інші завади), тобто завжди спостерігають інтерференцію полів різної природи. Відзначаються як проста суперпозиція параметрів полів, так і їхні складні нелінійні взаємодії. Аномалії проявляються зміною фізичних характеристик об'єкта: гравітаційне поле залежить від зміни густини порід, магнітне – від магнітної сприйнятливості та залишкової намагніченості його складових; електричне – від питомого електричного опору; температурне – від теплових властивостей, зокрема, теплопровідності.

Аналітичне або числове розв'язання прямих задач, тобто визначення параметрів фізичного поля за відомими фізичними характеристиками, розміром і формою складових об'єкта, здійснюється однозначно, хоч інколи й за складними алгоритмами [Brebbia, et al., 2012; Foks, et al., 2014; Zhang, et al., 2013]. Разом з тим, той самий розподіл параметрів фізичного поля може відповідати різним співвідношенням фізичних характеристик і розмірів складових об'єкта. Іншими словами, знайти розв'язок оберненої задачі математичної фізики, тобто визначити розміри складових об'єкта та їхні фізичні характеристики за спостереженим

полем значно складніше внаслідок його неоднозначності [Mikheeva, et al., 2023; Mukanova & Modin, 2018].

Інтерпретація гравітаційних, магнітних і електричних аномалій має багато спільних рис. Це пояснюється подібністю основних законів взаємодії гравітаційних, магнітних і електричних мас (законів Ньютона, Кулона і Ома), які зумовили встановлення математичних зв'язків між гравітаційним, магнітним та електричним потенціалами. Однак, поряд із подібністю є й відмінності в природі й морфології гравітаційних, магнітних та електричних аномалій [Zhou, et al., 2023; Li, et al., 2022]. Аномалієвірні об'єкти у гравірозвідці однополярні, тобто утворюють або додатні, або від'ємні аномалії. Аномалієвірні об'єкти у магніторозвідці двополярні, оскільки кожне намагнічене тіло може утворювати і додатну, і від'ємну аномалію. Тому структура аномального магнітного поля складніша, ніж гравітаційного. Вона додатково ускладнюється за рахунок різної довжини тіл у напрямі намагнічення, різного кута намагнічення, наявності індукційної та залишкової намагніченості порід. Форма й інтенсивність аномалій, а отже, і ефективність електричного профілювання (ЕП) як методу електророзвідки (ЕР) постійним струмом, залежать від таких природних і технічних факторів: оптимального вибору методу, глибини розвідки, системи спостережень, інтенсивності первинного (живильного) поля і його поляризації, тобто напрямку вектора електричного поля щодо простягання об'єктів. Наприклад, коли напрям цього вектора збігається із простяганням об'єктів, у провідних тілах індукуються максимальні вторинні магнітні поля, а коли він перпендикулярний до простягання, спостерігають максимальні кондуктивні аномалії вторинних електричних полів. Методологія, або теорія раціональної інтерпретації, для всіх методів ЕР однакова, а геолого-геофізичне тлумачення, як і сфера застосувань, відрізняються. Фізико-математична кількісна інтерпретація цих методів, яка переважно зводиться до розв'язування оберненої задачі, добре розроблена лише для одновимірних (горизонтально шаруватих) моделей середовищ. Інтерпретація електричних полів за допомогою сучасних комп'ютерів здійснюється з більшою точністю, об'єктивністю і швидкістю. Серед багатьох алгоритмів розв'язування оберненої задачі ЕР найпоширеніші алгоритми різних варіантів підбору.

Кількісна інтерпретація даних ЕП – процес складний і неточний, тому є сенс говорити лише про напівкількісну інтерпретацію, головне завдання якої полягає у визначенні епіцентра розвідувального об'єкта, тобто площі, під якою він розміщений, а також в оцінюванні форми і глибини його залягання, інколи розмірів, фізичної та геологічної природи аномалій. Вона починається із вибору фізико-геологічних моделей, якими можна апроксимувати розвідувальні об'єкти: контакти се-

редовищ, потужні й тонкі пласти, ізометричні (кулеподібні), витягнуті (лінзоподібні, циліндроподібні) об'єкти тощо. Розв'язування прямих і особливо обернених задач методами математичного і фізичного моделювання для перерахованих моделей є складнішим, ніж для вертикальних електричних зондувань. Ефективність ЕП визначається не лише наявністю сприятливих геоелектричних умов і вдалим вибором методу, але й достатньою кількістю додаткової геолого-геофізичної інформації. Зокрема, залежно від фізичних властивостей порід, ЕП доцільно виконувати спільно із магніторозвідкою, терморозвідкою чи радіометрією. Для тлумачення результатів ЕП необхідні апіорні дані, геологічні розрізи і карти, які, своєю чергою, уточнюють після здійснення ЕП.

Мета

Мета дослідження – побудова алгоритму розпізнавання фізичних та геометричних параметрів включення за даними потенціального поля з використанням непрямих методів граничних, приграничних та частково-граничних елементів.

Методика

Формулювання задачі

Нехай необхідно визначити геометричні параметри включення за характером потоку потенціального поля на електроізолюваній межі $\partial\Omega = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}$ півплощини, яка займає в декартовій системі координат (x_1, x_2) область $\Omega = \mathbf{R}^{2-} = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < 0\}$. Вважаємо, що на $\partial\Omega$ потік потенціального поля дорівнює нулю всюди, за винятком точок $A(x_{1A}, 0)$ та $B(x_{1B}, 0)$, в яких розміщено джерела струму – живильні електроди із відомими сталими інтенсивностями g_A та g_B відповідно. Окрім того, є ділянка $\partial\Omega_b \subset \partial\Omega$, на якій додатково знаємо значення потенціалу u .

Вважаємо, що всередині півплощини потенціал $u_0(x)$ стаціонарного електричного поля задовольняє рівняння

$$P(u_0(x)) = \Delta u_0(x) = \sigma_0 \left(\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_2^2} \right) = -g_0(x) \chi_g(x), \quad x \in \Omega_0, \quad (1)$$

всюди, за винятком включення Ω_1 ($\Omega_1 \subset \Omega$). В області Ω_1 середовища однорідне, але відрізняється від того, в якому діє оператор $P(u_0(x))$, тому в ній процес описують рівняннями

$$P(u_1(x)) = \Delta u_1(x) = \sigma_1 \left(\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2} \right) = 0,$$

$$x \in \Omega_1, \quad (2)$$

де σ_s ($s = 0, 1$) – постійна фізична характеристика (коефіцієнт електропровідності), $\chi_g(x)$ – характеристична функція області $\Omega_g \subset \Omega_0$, $x = (x_1, x_2)$.

Для математичного формулювання надлишку крайових умов вважаємо, що на межі $\partial\Omega$ задано крайову умову другого роду, а на ділянці $\partial\Omega_b$ – ще й крайову умову першого роду:

$$q_0(x) = -\sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = 0, \quad x \in \partial\Omega = \partial\Omega^{(2)} \cup \partial\Omega_b, \quad (3)$$

$$u_0(x) = u_b(x), \quad x \in \partial\Omega_b, \quad (4)$$

де $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$ – однозначно визначена зовнішня одинична нормаль до межі $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \partial\Omega_1$.

Вибір джерел на межі півплощини у вигляді

$$g_0(x) = g_0(\xi_A) + g_0(\xi_B),$$

де

$$g_0(\xi_A) = 2g_A / \sigma_0, \quad g_0(\xi_B) = 2g_B / \sigma_0,$$

забезпечує виконання умови (3).

Зауважимо, що для коректного формулювання прямих задач математичної фізики $\partial\Omega_b$ повинно бути порожньою множиною. Для розв'язування обернених задач наявність $\partial\Omega_b$ обов'язкова, а якість та достовірність результату тим вище, чим менша площа $\partial\Omega^{(2)}$, тобто найкращі, коли виконується співвідношення $\partial\Omega^{(2)} = \emptyset$.

На межі поділу середовищ $\partial\Omega_1$ задано умови ідеального контакту:

$$u_0(x) = u_1(x), \quad -\sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = -\sigma_1 \frac{\partial u_1(x)}{\partial \mathbf{n}(x)}, \quad x \in \partial\Omega_1. \quad (5)$$

Геометричну інформацію про включення Ω_1 подамо у вигляді N пар точок з координатами (x_{1n}^1, x_{2n}^1) та (x_{1n}^2, x_{2n}^2) ($n = 1, \dots, N$) і змоделюємо $\partial\Omega_1$ N лінійними відрізками Γ_n , які задамо так: $(x_{1n}, x_{2n}) \in \Gamma_n$, якщо $x_{1n} = x_{1n}^1 \varphi_1(\eta) + x_{1n}^2 \varphi_2(\eta)$, $x_{2n} = x_{2n}^1 \varphi_1(\eta) + x_{2n}^2 \varphi_2(\eta)$, де (x_{1n}^1, x_{2n}^1) та (x_{1n}^2, x_{2n}^2) – координати крайніх точок відрізка Γ_n , $\varphi_1(\eta) = 0.5(\eta - 1)\eta$, $\varphi_2(\eta) = 0.5(\eta + 1)\eta$, η – одновимірною координатою, яка змінюється від -1 до 1 під час руху точки (x_{1n}, x_{2n}) від (x_{1n}^1, x_{2n}^1) до (x_{1n}^2, x_{2n}^2) по відрізку Γ_n . Оскільки замкнута ламана, що моделює $\partial\Omega_1$, неперервна, то необхідно, щоб

$$\left(x_{1n}^2 = x_{1(n+1)}^1\right), \left(x_{2n}^2 = x_{2(n+1)}^1\right), \text{ якщо } n < N \text{ і}$$

$$\left(x_{1n}^2 = x_{11}^1\right), \left(x_{2n}^2 = x_{21}^1\right), \text{ якщо } n = N.$$

Знаходимо невідомі $x_{1n}^1, x_{2n}^1, x_{1n}^2, x_{2n}^2$ будемо поетапно. Спочатку запишемо алгоритм розв'язування прямої задачі теорії потенціалу, тоді їх вважаємо відомими, а потім побудуємо спосіб розпізнавання фізичних та геометричних параметрів включення Ω_1 .

Алгоритм розв'язування прямої задачі електророзвідки постійним струмом із використанням електропрофілювання

Знайдемо розв'язки задачі (1)–(3), (5) ($\partial\Omega_b = \emptyset$), використовуючи непрямі методи граничних (МГЕ) [Brebbia, et al., 2012], приграничних (МПГЕ) [Zhuravchak, 2019], Zhuravchak, Zabrodska, 2021] та частково-граничних елементів (МЧГЕ) [Zhuravchak, Zabrodska, 2021]. Зазначимо, що серед перерахованих методів найточнішим є МПГЕ, але він потребує більше часу, ніж МГЕ, а методом частково-граничних елементів вдається досягти вищої, ніж у МГЕ, точності за короткий час, ніж в МПГЕ. Для побудови розв'язку використаємо спеціальний фундаментальний розв'язок для півплощини (функцію Гріна) рівняння Лапласа (1), який автоматично задовольняє нульову крайову умову (3):

$$\mathbf{E}_{0h}(r) = \mathbf{E}_0(r) + \mathbf{E}_0(r'),$$

фундаментальний розв'язок для включення:

$$\mathbf{E}_s(r) = \mathbf{E}_s(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi\sigma_s} \ln |r / r_0|,$$

та їх похідні по нормалі:

$$\mathbf{F}_{0h}(r) = \mathbf{F}_0(r) + \mathbf{F}_0(r'),$$

$$\mathbf{F}_s(r) = \mathbf{F}_s(x, \xi) = \sigma_s \sum_{i=1}^2 \frac{n_i (x_i - \xi_i)}{2\pi r^2},$$

де ξ_1, ξ_2 – система координат, яка збігається з

$$x_1, x_2, \quad r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2},$$

$$r' = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2},$$

константу r_0 використано для підвищення точності обчислень.

Крок 1. У МГЕ розділяємо межу $\partial\Omega_1$ на граничні елементи Γ_{sv} так, щоб $\bigcup_{v=1}^V \Gamma_{sv} = \partial\Omega_1$, $\Gamma_{sv} \cap \Gamma_{sq} = \emptyset$, $v \neq q$, $v, q = \overline{1, V}$. У разі використання МПГЕ та МЧГЕ вводимо зовнішні приграничні області $G_s = B_s / \Omega_s$, де $B_s \subset \mathbf{R}_1^2$, $\Omega_s \subset B_s$, $\partial B_s \cap \partial\Omega_s = \emptyset$. У МПГЕ кожен приграничну область G_s розділяємо на елементи G_{sv} так, щоб кожному граничному елементу Γ_{sv} відповідало два приграничні

$$G_{sv}: G_{sv} \cap \partial\Omega_1 = \Gamma_{sv}, \quad G_{sv} \cap G_{sq} = \emptyset, \quad v \neq q, \\ v, q = \overline{1, V}, \quad \bigcup_{v=1}^V G_{sv} = G_s.$$

Частково-граничні елементи вводимо так. У кожній приграничній області G_s введемо криві G_{sv}^+, G_{sv}^- так, що початком G_{sv}^+ є початок Γ_{sv} , а початком G_{sv}^- є кінець Γ_{sv} . Об'єднання $G_{sv}^- \cup \Gamma_{sv} \cup G_{sv}^+ = G_{sv}^\Gamma$ називаємо частково-граничним елементом [Zhuravchak, Zabrodska, 2021]. На кожному із дискретних елементів

$$\gamma_{sv} = [\Gamma_{sv}, G_{sv}^-, G_{sv}^+]$$

вводимо фіктивні джерела невідомої інтенсивності $g_{sv}^\gamma(\xi)$.

Крок 2. Апроксимуємо інтенсивності $g_{sv}^\gamma(\xi)$

невідомих джерел константами d_{sv}^γ і переходимо від диференціальних рівнянь (1), (2) до їхніх інтегральних подань, тобто записуємо потенціали та їхні похідні по нормалі у вигляді:

$$u_0^\gamma(x) = \sum_{v=1}^V d_{0v}^\gamma \int_{\gamma_{0v}} \mathbf{E}_{0h}(x, \xi) d\gamma_{0v}(\xi) + \\ + \mathbf{E}_{0h}(x, \xi_A) g_0(\xi_A) + \mathbf{E}_{0h}(x, \xi_B) g_0(\xi_B),$$

$$u_1^\gamma(x) = \sum_{v=1}^V d_{1v}^\gamma \int_{\gamma_{1v}} \mathbf{E}_1(x, \xi) d\gamma_{1v}(\xi) + C_1, \quad (6)$$

$$q_0^\gamma(x) = -\sigma_0 \frac{\partial u_0^\gamma(x)}{\partial \mathbf{n}} = -0.5 \chi_{0v}^\gamma d_{0v}^\gamma +$$

$$+ \sum_{v=1}^V d_{0v}^\gamma \int_{\gamma_{0v}} \mathbf{F}_{0h}(x, \xi) d\gamma_{0v}(\xi) + \\ + \mathbf{F}_{0h}(x, \xi_A) g_0(\xi_A) + \mathbf{F}_{0h}(x, \xi_B) g_0(\xi_B).$$

$$q_1^\gamma(x) = -\sigma_1 \frac{\partial u_1^\gamma(x)}{\partial \mathbf{n}} = -0.5 \chi_{1v}^\gamma d_{1v}^\gamma +$$

$$+ \sum_{v=1}^V d_{1v}^\gamma \int_{\gamma_{1v}} \mathbf{F}_1(x, \xi) d\gamma_{1v}(\xi), \quad (7)$$

де $\chi_{sv}^\gamma(x) = 1$, $x \in \Gamma_{sv}$, $\chi_{sv}^\gamma(x) = 0$, $x \notin \Gamma_{sv}$.

Зауважимо, що за винятком $\partial\Omega_1$ (6) абсолютно точно задовольняє (1), (2) в Ω . Завдяки цьому не потрібно будувати сітку в Ω .

Крок 3. Щоб знайти інтенсивності невідомих джерел, використаємо колокаційну методику, тобто умови ідеального контакту задовольнятимемо у середині кожного граничного елемента. Підставляючи (6), (7) в (5) та додаючи умову рівності нулю в $\mathbf{R}_1^2$ суми усіх джерел на нескінченності, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для знаходження невідомих d_{sv}^γ та C_1 :

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^V d_{0v}^\gamma \int_{\gamma_{0v}} \mathbf{E}_{0h}(x^w, \xi) d\gamma_{0v}(\xi) - \\ & - \sum_{v=1}^V d_{1v}^\gamma \int_{\gamma_{1v}} \mathbf{E}_1(x^w, \xi) d\gamma_{1v}(\xi) - C_1 = \\ & - \mathbf{E}_{0h}(x, \xi_A) g_0(\xi_A) - \mathbf{E}_{0h}(x, \xi_B) g_0(\xi_B), \\ & x^w \in \partial\Omega_1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & -0.5\chi_{0w}^\gamma d_{0w}^\gamma + \sum_{v=1}^V d_{0v}^\gamma \int_{\gamma_{0v}} \mathbf{F}_{0h}(x^w, \xi) d\gamma_{0v}(\xi) + \\ & + 0.5\chi_{1w}^\gamma d_{1w}^\gamma - \sum_{v=1}^V d_{1v}^\gamma \int_{\gamma_{1v}} \mathbf{F}_1(x^w, \xi) d\gamma_{1v}(\xi) = \\ & - \mathbf{F}_{0h}(x, \xi_A) g_0(\xi_A) - \mathbf{F}_{0h}(x, \xi_B) g_0(\xi_B), \\ & x^w \in \partial\Omega_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sum_{v=1}^V d_{1v}^\gamma \int_{\gamma_{1v}} d\gamma_{1v}(\xi) + C_1 = 0. \quad (10)$$

Крок 4. Знайшовши невідомі d_{sv}^γ та C_1 як розв'язки СЛАР (8)–(10), шуканий потенціал у середовищі та включенні й потік через їхні межі обчислюємо за формулами (6), (7), оскільки середовище і включення тепер розглядаємо як цілком незалежні області.

Розв'язування оберненої задачі електророзвідки постійним струмом із використанням електропрофілювання

Геометричну інформацію про $\partial\Omega_1$ зберігаємо у вигляді N четвірок чисел $x_{1n}^1, x_{2n}^1, x_{1n}^2, x_{2n}^2$. Якщо тепер врахувати, що вони доволі складно входять у інтегральні зображення (6), (7), а також те, що для їх знаходження використовуватимемо ітераційні процедури, то доцільно на перших етапах розпізнавання зменшити кількість невідомих. Для цього введемо додаткові залежності між $x_{1n}^1, x_{2n}^1, x_{1n}^2, x_{2n}^2$ й обмежимося для включення випадком $N=4$.

Ітераційний алгоритм розпізнавання організуємо так.

Крок 1. За зміною позірного опору $\rho^\gamma = \frac{k_u}{I} \left| u_0^\gamma(x_M) - u_0^\gamma(x_N) \right|$ визначаємо знак і початкові наближення для $\Delta\sigma$, (x_{10}, x_{20}) – центра мас включення, змодельованого прямокутником зі сторонами $2l_1$, $2l_2$ або ромбом з однаковими діагоналями довжиною $2l_0$, причому x_{10} визначаємо точно за екстремумом кривої ρ^γ , а x_{20} та

l_0 (чи l_1 , l_2) – приблизно за кривою ρ^γ , проінтегрованою у межах між її точками перегину. У цьому рівнянні

$$k_u = 2\pi \left(\frac{1}{\ln r_{AM}} - \frac{1}{\ln r_{AN}} - \frac{1}{\ln r_{BM}} + \frac{1}{\ln r_{BN}} \right)^{-1} -$$

коефіцієнт установки ABMN,

$$r_{CD} = \sqrt{(x_1^C - x_1^D)^2 + (x_2^C - x_2^D)^2};$$

зрозуміло, що позірний опір ρ^* однорідної півплощини дорівнює одиниці у кожній точці.

Крок 2. Приймаємо $\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma$, вважаючи, що σ_0 відоме.

Крок 3. Організовуємо перший каскад ітерацій для уточнення місцезнаходження локальної неоднорідності та її приблизних розмірів.

1. Моделюємо $\partial\Omega_1$ прямокутником або ромбом із координатами вершин:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_{10} - l_1, x_2^1 = x_{20} - l_2, x_1^2 = x_{10} + l_1, x_2^2 = x_{20} - l_2, \\ x_1^3 &= x_{10} + l_1, x_2^3 = x_{20} + l_2, x_1^4 = x_{10} - l_1, x_2^4 = x_{20} + l_2, \\ \text{або } x_1^1 &= x_{10} - l_0, x_2^1 = x_{20}, x_1^2 = x_{10}, x_2^2 = x_{20} - l_0, \\ x_1^3 &= x_{10} + l_0, x_2^3 = x_{20}, x_1^4 = x_{10}, x_2^4 = x_{20} + l_0. \end{aligned} \quad (11)$$

2. Для вибраного σ_1 за описаним вище алгоритмом розв'язування прямої задачі обчислюємо потенціал $u_0^\gamma(x)$ за формулою (6) для $x \in \partial\Omega_b$.

3. Виконуємо мінімізацію функціоналу

$$I^f = \int_{\partial\Omega_b} |u_b(x) - u_0^\gamma(x)| d\partial\Omega_b(x), \quad (12)$$

допускаючи варіацію лише x_{20}, l_0 (чи l_1, l_2).

4. Фіксуємо x_{20}^f, l_0^f (чи l_1^f, l_2^f), які відповідають знайденому мінімуму функціоналу (12), та уточнюємо електропровідність σ_1 за допомогою мінімізації (12). Її позначимо σ_1^f .

5. У результаті знайдемо, використовуючи формули, аналогічні до (11), уточнені координати вершин прямокутника чи ромба (x_1^{nf}, x_2^{nf}) , $n = 1, \dots, 4$.

Крок 4. Організовуємо другий каскад ітерацій для уточнення форми та орієнтації в просторі включення.

1. Одержаний на кроці 3 прямокутник чи ромб будемо обертати навколо його центра мас, одночасно масштабуючи по осях. Для цього вводимо три нові параметри φ_0, s_1, s_2 і обчислюємо нові координати вершин прямокутника чи ромба:

$$\begin{aligned} x_1^{nr} &= (x_1^{nf} - x_{10}) \cos \varphi_0 - (x_2^{nf} - x_{20}) \sin \varphi_0 + x_{10}, \\ x_2^{nr} &= (x_1^{nf} - x_{10}) \sin \varphi_0 + (x_2^{nf} - x_{20}) \cos \varphi_0 + x_{20}, \\ x_1^{nc} &= x_1^{nr} s_1 + (1 - s_1) x_{10}, \end{aligned}$$

$$x_2^{nc} = x_2^{nr} s_2 + (1 - s_2) x_{20}^f. \quad (13)$$

2. Мінімізуємо функціонал (12) за допомогою варіації φ_0, s_1, s_2 і фіксуємо $\varphi_0^f, s_1^f, s_2^f$, які відповідають знайденому мінімуму.

3. Для сталих x_{10}, x_{20}, l_0^f (чи l_1^f, l_2^f), $\varphi_0^f, s_1^f, s_2^f$ уточнюємо електропровідність σ_1^f за допомогою мінімізації (12), її позначимо σ_1^{f2} .

Крок 5. Знайдені x_1^{nc}, x_{2n}^{nc} слугують замість змінних x_1^{nf}, x_2^{nf} у формулах (13) для подальшого уточнення в ітераційному процесі мінімізації (12) за сталої σ_1^{f2} . Зауважимо, що останні два кроки інколи доцільно повторити декілька разів.

Результати

Пряму й обернену задачі електророзвідки постійним струмом із використанням електропрофілювання розв'язували непрямим методом приграничних елементів для $A = (-25, 0)$ та $B = (25, 0)$, $g_A = -0.5$ та $g_B = 0.5$ відповідно. Приймали, що сила струму I та електропровідність σ_0 геологічного середовища Ω_0 дорівнюють одиниці. Відстань між приймальними електродами вибирали $MN = 0,1$ АВ і переміщували їх вздовж лінії $(-25, 25)$ з кроком 0,1.

Маючи з попереднього досвіду деяку інформацію про ділянку досліджень, визначили початкові наближення та можливий діапазон параметрів, які нам потрібно знайти. Несиметричність графіка вказує, що включення розміщене під кутами до горизонтальної осі, відмінними від 0 та 90 градусів. Початкові наближення для $\Delta\sigma$ (відхилення від електропровідності середовища) та (x_{10}, x_{20}) (центра мас включення) визначаємо за графіком позірного опору (рис. 1).

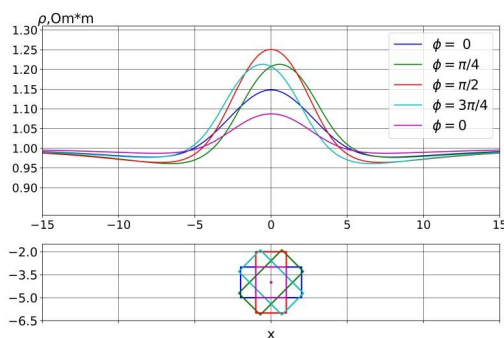


Рис. 1. Графіки позірного опору для вибору початкових наближень

Його опуклість свідчить, що електропровідність включення менша за електропровідність середовища, оскільки позірний опір є величиною, оберненою до електропровідності, тому $\Delta\sigma$ прий-

маємо від'ємним. Увігнутість на графіку показує, що електропровідність включення перевищує електропровідність середовища, тому $\Delta\sigma$ вважаємо додатним. Координату x_{10} визначаємо точно за екстремумом кривої ρ^y , а x_{20} та l_0 (чи l_1, l_2) – приблизно за кривою ρ^y , проінтегрованою у межах між її точками перегину. Розмір включення по горизонталі l_1 (чи l_0) буде меншим за відстань між мінімумами кривої приблизно на 50 %, а вертикальний розмір l_2 та глибина центра мас h будуть пропорційними до висоти максимуму на графіку.

Спочатку розв'яжемо обернену задачу для включення у формі прямокутника зі сторонами $2l_1 = 4$, $2l_2 = 2$, розміщеного горизонтально, тобто довша його сторона паралельна до денної поверхні. Знайшовши початкові наближення, обчислюємо значення функціонала за двох фіксованих параметрів (σ_1 та h) та двох змінних. Знаходимо діапазон значень змінних параметрів, в околі якого функціонал є мінімальним. На рис. 2 подано ізолінії, які показують, що існують ділянки, де значення функціонала найменше, і вони охоплюють можливі пари розв'язку задачі: шукані значення l_1 містяться у діапазоні від 1 до 2,1, а l_2 – від 0.2 до 2.

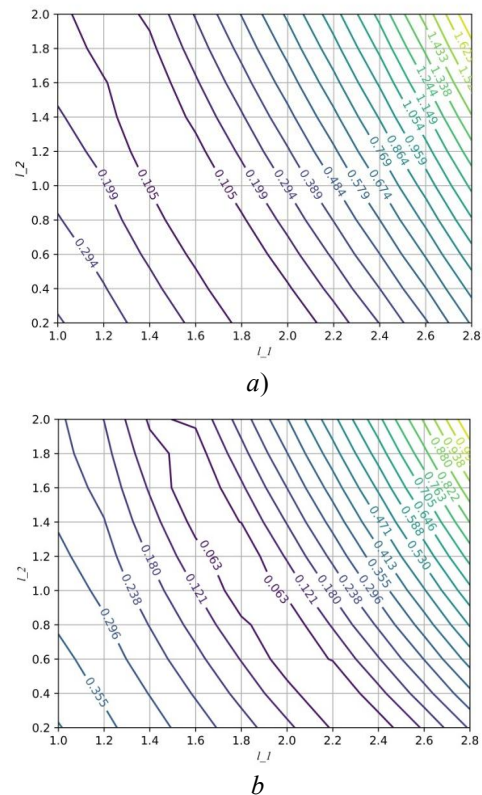


Рис. 2. Графіки ізоліній значень функціонала, обчислених за двох фіксованих параметрів:

$a - \sigma_1 = 0,05, h = 3,6$ м, $b - \sigma_1 = 0,2, h = 3,6$ м

На рис. 3 продемонстровано покроковий підбір параметрів включення, за умови мінімізації функціонала (12), від $\sigma_1 = 0,05$, $h = 3,6$ до оптимальних $\sigma_1 = 0,2$, $h = 4$.

Тепер знайдемо розв'язок оберненої задачі для включення у формі квадрата зі стороною $2l_0 = 2$, паралельною до денної поверхні. Щоб продемонструвати уточнення орієнтації в просторі включення, початковим наближенням вибрано ромб.

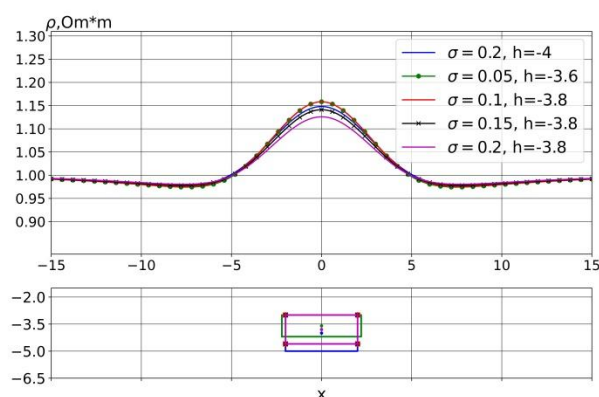


Рис. 3. Покрокове знаходження параметрів включення-прямокутника, початковим наближенням вибрано прямокутник

На рис. 4 показано покроковий підбір параметрів включення, за умови мінімізації функціонала (12), від $\sigma_1 = 0,1$, $\phi_0 = 0$ до оптимальних $\sigma_1 = 0,2$, $\phi = \pi/2$ при $h = 4$.

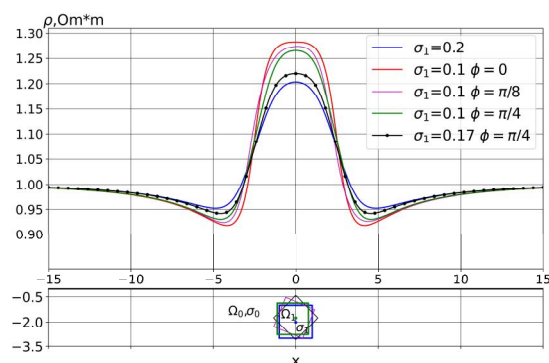


Рис. 4. Графіки покрокового знаходження параметрів включення-квадрата, початковим наближенням вибрано ромб

Числові результати показали, що у разі профілювання звичайною градієнтною установкою можна приблизно визначити протяжність включення (його початок і кінець) за координатою, паралельною до денної поверхні, беручи до уваги відстань між точками перегину кривої позірного опору, та

встановити, більша чи менша електропровідність включення (порівняно з основним середовищем). Центр мас включення майже завжди ідентифікується за екстремумом (мінімумом або максимумом) кривої, але у випадку двох включень, розташованих близько одне від одного, трапляється, що два включення ідентифікуються як одне. Зміна форми включення незначно відображається на кривій. Відстань між "центрами мас" двох включень однієї провідності, розміщених горизонтально, ідентифікується за відстанню між максимумами на кривих позірного опору. Отримані дані слугують початковими наближеннями під час розв'язування обернених задач.

Зазначимо, що два включення, розміщені одне під одним (по вертикалі), ідентифікуються як одне у методі профілювання. Щоб розрізнити їх, а також визначити глибини їхнього залягання, потрібно використовувати вертикальне електричне зондування.

Здійснено програмну реалізацію запропонованих підходів на сучасній потужній мові програмування Python, оскільки вона розповсюджується безкоштовно, містить чимало додаткових бібліотек, зокрема таких, як NumPy, SciPy, Matplotlib тощо. Їхнє використання значно прискорює та полегшує написання програм, які дають змогу візуально контролювати процеси формування геометричної області дослідження, дискретної моделі та обчислювальний процес загалом. На основі запропонованого підходу на Python створено автоматизовані комп'ютерні модулі для розв'язування прямої та оберненої задач теорії електророзвідки постійним струмом.

У подальших дослідженнях ми плануємо розширити запропонований алгоритм розв'язування оберненої задачі методом профілювання для двох, трьох і більше включень, розміщених горизонтально, однакової та різної електропровідності, а також розробити алгоритм розпізнавання двох включень, розміщених одне під одним, методом вертикального електричного зондування.

Наукова новизна

Обґрунтовано ефективність непрямих методів граничних, приграничних та частково-граничних елементів (як варіантів методу граничних інтегральних рівнянь) для побудови числових розв'язків прямої та оберненої задач теорії потенціалу в кусково-однорідній півплощині.

Практична значущість

Ефективність запропонованого підходу до розв'язування оберненої задачі електророзвідки

постійним струмом зумовлена тим, що вдалося реалізувати поетапне, “каскадне” розпізнавання форми, орієнтації, розмірів та електропровідності включення, керуючись принципом: за доволі неточних початкових наближень не використовувати усі тонкощі моделі й не займатися розпізнаванням параметрів, що мало впливають на результат.

Висновки

1. Аналітично розв’язати пряму задачу, і, відповідно, запропонувати способи інтерпретації можна лише для джерел збурень у вигляді простих геометричних моделей (куля, циліндр, уступ тощо). Апроксимація реальних геологічних об’єктів такими моделями для низки випадків умовна, бо геологічні об’єкти ідеальної форми є рідкістю. Однак навіть оцінка глибини відіграє для геології істотну роль. У складніших випадках задачу розв’язують числовими методами, які мають бути високоточними, надійними та швидкодіючими. МПГЕ добре зарекомендував себе у розв’язуванні прямих та обернених задач електророзвідки постійним струмом для включень неканонічної форми.

2. Для інтерпретації та геологічного тлумачення аномалій потрібно детально вивчати фізичні характеристики порід, закономірності їхньої зміни і в горизонтальних напрямках, і з глибиною. Аномальна фізична характеристика геологічних об’єктів має бути тим більшою, чим глибше вони залягають. Ефективність електророзвідки підвищується, якщо фізична характеристика досліджуваного геологічного об’єкта істотно відрізняється від фізичної характеристики вмщувальних порід.

3. Згідно із принципом суперпозиції полів ефекти, зумовлені різними геологічними факторами, додаються. Сумарні аномалії першої похідної потенціалу визначаються глибинною будовою земної кори і її різною потужністю, рельєфом поверхні кристалічного фундаменту і його петрографічним складом, неоднорідністю будови товщ осадових порід і наявністю у ній тих чи інших структур, корисних копалин. Між геологічними факторами й аномаліями потенціального поля теоретично існує функціональна залежність, але на практиці найчастіше встановлюють лише кореляційну залежність. Основним способом геологічного тлумачення даних розвідки є зіставлення карт і графіків потенціального поля із геологічними картами. Між аномаліями потенціального поля й відомими геологічними аномаліями можна спостерігати кореляційний зв’язок, що свідчить про тотожність цих геологічних утворень і виявленого джерела збурення поля. Якщо такого зв’язку нема, то поле

зумовлено глибшими і невідомими геологічними утвореннями. Від ступеня урахування відзначених особливостей залежить точність геологічного тлумачення аномалій потенціального поля.

4. Якщо невідомі фізичні характеристики і форма тіл, то математичний розв’язок оберненої задачі розвідки неоднозначний і кількісна інтерпретація дає кілька варіантів. Для підвищення надійності інтерпретації варто застосовувати комплекс різних геофізичних методів аналізу та технологій, це допомагає отримувати найдостовірніші дані щодо геологічної будови району досліджень. Створення геоінформативних систем дасть змогу в повному обсязі застосовувати усі відомі технології для ефективної інтерпретації геофізичних даних. Програмне забезпечення дає можливість підвищити ступінь автоматизації процесу вимірювань з безпосереднім формуванням робочого проєкту, забезпечуючи оперативність одержання інформації про ефективні й кількісні характеристики досліджуваного середовища.

Список літератури

- Ніколаєв І. Ю., Кушнір А. М., Ільєнко В. А., Ніколаєв Ю. І. Електромагнітні дослідження західної частини Українського щита. *Геофізичний журнал*. 2019. 41(3). 120–133. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i3.2019.172433>
- Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*, Springer. 2012. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3>
- Foks N. L., Krahenbuhl, R., Li, Y. Adaptive sampling of potential-field data: A direct approach to compressive inversion. *Geophysics*, 2014, 79(1), IM1–IM9. <https://doi.org/10.1190/geo2013-0087.1>
- Li Z., Ma G., Meng Q., Wang T., Li L. Gravity and magnetic fast inversion method with cross-gradient based on function fitting. *Geophysical Journal International*, 2022. No. 2, 1209–1218. <https://doi.org/10.1093/gji/ggac384>
- Ly M., Zhang Y., Liu S. Fast forward approximation and multitask inversion of gravity anomaly based on UNet3+. *Geophysical Journal International*, 2023. No. 2, 972–984. <https://doi.org/10.1093/gji/ggad106>
- Міхєєва Т. Л., Лапіна О. П., Кишман-Лаванова Т. М., Причепій Т. І. Технології інтерпретації геофізичних даних при дослідженні та розвідці нафтогазових родовищ, *Геофізичний журнал*. 2023. 44(5). 106–122. <https://doi.org/10.24028/gj.v44i5.272329>
- Milson J., Eriksen A. *Field Geophysics*: 4th ed. John Wiley & Sons, 2011. 287 p.

- Mukanova B., Modin I. The Boundary Element Method in Geophysical Survey, Springer. 2018. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-72908-4>
- Pierre van Baal. A Course in Field Theory, 1st Edition, CRC Press, 2014. <https://doi.org/10.1201/b15364>
- Qu W., Chen W., Fu Z. Solutions of 2D and 3D non-homogeneous potential problems by using a boundary element-collocation method, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2015, No. 60, 2–9. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.04.018>
- Zhang Y., Qu W., Chen J. A new regularized BEM for 3D potential problems, *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.*, 2013, No. 43, 297. <https://doi.org/10.1360/132012-499>
- Zhdanov M. S. Geophysical Electromagnetic Theory and Methods. Methods in Geochemistry and Geophysics (Vol. 43), Elsevier, 2009.
- Zhou S., Jia H., Lin T., Zeng Z., Yu P., Jiao J. An accelerated algorithm for 3D inversion of gravity data based on improved conjugate gradient method. *Applied Sciences*, 2023, No. 18, p. 10265. <https://doi.org/10.3390/app131810265>
- Zhuravchak L. M., Zabrodska N. V. Using of partly-boundary elements as a version of the indirect near-boundary element method for potential field modeling. *Mathematical Modeling and Computing*, 2021, Vol. 8, No. 1, 1–10. <https://doi.org/10.23939/mmc2021.01.001>
- Zhuravchak L. M., Zabrodska N. V. Identification of inhomogeneities according to potential field data using the near-boundary element method. *16th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*, 2021. <https://doi.org/10.1109/CSIT52700.2021.9648583>
- Zhuravchak L. M. Computation of pressure change in piecewise-homogeneous reservoir for elastic regime by indirect near-boundary element method. *14th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT)*, 2019, 141–144.

Liubov ZHURAVCHAK¹, Nataliya ZABRODSKA²

¹ Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery str., Lviv, 79013, Ukraine, tel. +38(032)2582578, e-mail: liubov.m.zhuravchak@lpnu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-1444-5882>

² Carpathian branch of S. Subbotin Institute of Geophysics of National Academy of Sciences of Ukraine, 3-b, Naukova str., Lviv, 79060, Ukraine, tel. +38(032)2648563, e-mail: nataliya.zabrodska@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0001-8850-6721>

ALGORITHM FOR DETERMINING INCLUSION PARAMETERS IN SOLVING INVERSE PROBLEMS OF GEOELECTRICAL EXPLORATION USING THE PROFILING METHOD

Purpose. The paper aims to develop an algorithm for recognizing the physical and geometric parameters of inclusion, using indirect methods of boundary, near-boundary, and partially-boundary elements based on the data of the potential field. **Methodology.** The direct and inverse two-dimensional problems of the potential theory concerning geophysics were solved when modeling the earth's crust with a piecewise-homogeneous half-plane composed of a containing medium and inclusion that are an ideal contact. To construct the integral representation of the solution of the direct problem, a special fundamental solution for the half-plane (Green's function) of Laplace's equation, which automatically satisfies the zero-boundary condition of the second kind on the day surface, and a fundamental solution for inclusion were used. To find the intensities of unknown sources introduced in boundary, near-boundary, or partially-boundary elements, the collocation technique was used, i.e. the conditions of ideal contact are satisfied in the middle of each boundary element. After solving the obtained SLAE, the unknown potential in the medium and inclusion and the flow through their boundaries are found, considering that the medium and inclusion are considered as completely independent domains. **Results.** The computational experiment for the task of electric prospecting with a constant artificial field using the resistance method, in particular, electrical profiling, was carried out, while focusing on the physical and geometric interpretation of the data. Initial approximations for the electrical conductivity of the inclusion, its center of mass, orientation and dimensions are determined by the nature of the change in apparent resistivity. To solve the inverse problem two cascades of iterations are organized: the first one is to specify the location of the local heterogeneity and its approximate dimensions, the second one is to specify its shape and orientation in space. At the same time, the minimization of the functional considered on the section of the boundary, where an excess of

boundary conditions is set, is carried out. **Originality.** The method of boundary integral equations is shown to be effective for constructing numerical solutions of direct and inverse problems of potential theory in a piecewise homogeneous half-plane, using indirect methods of boundary, near-boundary, and partial-boundary elements as variants. **Practical significance.** The proposed approach for solving the inverse problem of electrical exploration with direct current is effective because it allows for a step-by-step, “cascade” recognition of the shape, size, orientation, and electrical conductivity of the inclusion. We follow the principle of not using all the details of the model and not attempting to recognize parameters with little effect on the result, especially with imprecise initial approximations.

Key words: mathematical modeling; potential theory; direct problem; inverse problem; indirect near-boundary element method; partially-boundary elements; piecewise homogeneous medium; electrical profiling.

Надійшла 30.03.2024 р.